

주자유도 선정 기법에 의한 동하중의 등가 정하중으로의 변환

김현기[†], 조맹효^{*}

Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads by the Selection Scheme of Primary Degrees of Freedom

Hyungi Kim, Maenghyo Cho

Key Words : Primary Degrees of freedom(주자유도), Equivalent Static Loads(등가 정하중), Critical Time (위험 시간), Two-level condensation scheme(2 단계축소기법)

Abstract

The systematic method to construct equivalent static load from the given dynamic load is proposed in the present study. Previously reported works to construct equivalent static load were based on ad hoc methods. They may results in unreliable structural design. The present study proposes a selection scheme of degrees of freedom(d.o.f) for imposing the equivalent static loads. The d.o.fs are selected by Two-level condensation scheme(TLCS). TLCS consists of two two-steps. The first step is the energy estimation in element-level and the second step consists of the traditional sequential elimination precudure. Through several numerical examples, the efficiency and reliability of proposed scheme is verified.

1. 서 론

일반적인 구조해석은 외력이 정하중이라는 가정 하에 수행된다. 그러나, 실제로 구조물에 작용되는 하중은 동하중이며, 정하중 조건으로 해석된 결과는 구조물의 안전 설계를 반영하기 위해서는 적절하지 못하다. 따라서, 하중이 작용하는 구조물의 실제거동을 표현하는 과도응답을 통해 동하중을 고려하는 연구들이 많이 진행되어 왔다. 그러나, 시간에 따른 구조물의 거동을 나타내는 과도응답에 의해 구조해석을 하는 것은 상당한 전산자원과 시간비용을 요구한다. 최근에는 모달해석 방법에 의해 최대 변위가 발생하는 임계시간을 결정한 후, 임계시간에서 발생하는 변위와 동등한 결과를 산출하는 등가 정하중(equivalent static load)을 근사화 기법에 의해 계산함으로써, 동하중을 고려한 구조해석 및 최적화를 수행하였다⁽¹⁾. 이 기법은 다양한 구조물에서 등가 정하중에 의해 발생하는 변위가

임계시간에서 산출되는 변위 보다 크게 산출되게 함으로써, 안전설계 관점에서 바람직한 것이라고 할 수 있다. 그러나, 동하중을 등가 정하중으로 변환할 경우, 하중을 분포시키는 자유도를 경험적으로 선정해야 하는 문제가 있다. 등가 정하중을 분포시키는 절점을 잘 선정하는 것은 중요하다. 하중을 분포시키는 자유도가 적절하게 선정되지 못한다면, 임계시간에서 발생하는 최대 변위보다 적은 결과를 산출할 수 있으며, 선정된 자유도 이외의 지점에서도 안정성 측면에서 적절한 결과를 제공하지 못할 위험을 갖게 된다.

본 연구에서는 에너지 평가에 의한 주자유도 선정을 통하여 동하중을 등가 정하중으로 적절하게 분포시키는 방법을 제안한다. 주자유도는 구조물의 거동을 주로 지배하는 자유도를 의미하며, 축소시스템을 구성하기 위해 사용되는 개념이다. 본 연구에서 등가 정하중을 분포시키기 위한 주자유도 선정 기법으로 Two-level Condensation Scheme(TLCS)을 제안한다.⁽²⁾ 선정된 주자유도에 의해 등가 정하중을 분포시킨 후, 몇 가지 수치예제를 통해서 제안된 방법의 신뢰성과 구조적인 안정성을 검증한다.

[†] 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : shotgun1@snu.ac.kr

Tel : (02) 880-1695

^{*} 서울대학교 기계항공공학부 부교수

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

Tel : (02) 880-1693 Fax : (02) 886-1693

2. 근사화 기법

정적 문제에서 일반적인 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$Kd = s \quad (1)$$

여기서, 임계시간이 결정되면 그 시간에서 변위 값 $d(t_c)$ 가 결정된다. $d(t_c)$ 는 식 2)로 구해진다.

$$d_p(t_a) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \left(\sum_{j=1}^N u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, N) \quad (2)$$

그러나, 식 2)에 의해서 등가정하중을 구하는 것은 많은 전산자원을 요구하며, 매우 비효율적인 방법이라고 할 수 있다.

일반적으로 구조물의 거동은 저차 모드에 지배된다. 그러므로, 전체 시스템에 의해 구성되는 N개의 방정식을 푸는 것 보다는 모달해석에 의해 N개보다 훨씬 적은 n개의 방정식을 구성하는 것이 보다 효율적이다. 모달해석을 통해서 각 시간 경과에 따른 변위를 계산할 수 있으며, 최대 변위가 발생하는 시간을 임계시간으로 결정한다.

임계시간에서 선정된 자유도에 부여되는 등가정하중은 식 3)과 같이 표현되는 근사화 기법에 의해 구해질 수 있다.⁽³⁾

$$d_p(t_a) \leq x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, h) \quad (3)$$

when d_p is positive

$$d_p(t_a) \geq x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, h)$$

when d_p is negative

여기서, p 는 동하중에서의 변위와 동일한 변위를 요구하는 모든 중요한 자유도 개수이고, l 는 등가정하중이 부과되는 개수를 의미한다.

식 3)으로부터 등가정하중을 구하기 위한 정식화는 식 4)와 같다.⁽⁴⁾

$$\begin{aligned} &\text{Find } s_i \quad (i=1, \dots, l') \\ &\text{Minimization : } s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_i^2 \\ &\text{Subject to } d_p \leq x_p \end{aligned} \quad (4)$$

3. 주자유도 선정

일반적으로 등가정하중을 부여하기 위한 자유도는 경험적으로 선정된다. 자유도 선정이 적절하지 못한 경우 임계시간에서의 변위보다 적은 값을 산출하는 등가정하중을 제공하게 된다. 본 연구에서는 등가정하중이 분포될 위치 선정을 이전에 수행된 연구들과 달리 공학적인 관점에서 접근하고자

한다. 일반적인 구조물의 거동은 저차 모드에 의해서 지배되고, 이런 특성을 이용하여 몇 개의 자유도만으로 구성된 축소시스템을 통해 고유치 해석을 수행하는 연구가 많이 진행되어 왔다. 이 때 선정된 자유도는 구조물의 거동을 잘 표현하므로, 등가정하중을 부과하는 자유도로 선정되기에 적합하다.

3. 1 Two-level Condensation Scheme

축소시스템을 구성하기 위한 주자유도 선정은 순차적 소거법이 신뢰성 높은 결과를 제공한다. 그러나, 순차적 소거법은 최종적인 자유도를 얻기 위해서는 지나치게 많은 시간을 필요로 한다. TLCS는 시간 비용에 대한 문제점을 해결하고, 구조물의 거동을 잘 표현할 수 있는 자유도 선정에 대한 신뢰를 주는 기법이다. TLCS는 두 단계로 구성된다. 첫 번째 단계에서는 리츠(Ritz vector)벡터에 의해 각 요소별 레일리 에너지 평가에 의해 근사화된 축소모델을 구성한다. 두 번째 단계에서는 순차적 소거법을 적용하여 최종적인 주자유도가 선정된다. 두 번째 단계에서 적용되는 순차적 소거법은 에너지 평가에 의해 충분히 축소된 모델에 적용되기 때문에 많은 시간을 요구하지 않게 된다.

3.1.1 리츠(Ritz vector)벡터에 의한 에너지 평가

첫 번째 단계에서 요소단위의 에너지를 평가하기 위해서는 리츠벡터를 구해야 한다. 초기 리츠벡터는 질량 행렬의 대각항으로부터 근사화된다.

$$[K]\{x^{(1)}\} = \{m_{ii}\} \quad (5)$$

식 5)에서 구해진 정적벡터는 정규화 과정을 거친 후 첫 번째 리츠벡터가 된다.

$$\{x^{(1)}\}^T [M]\{x^{(1)}\} = 1 \quad (6)$$

첫 번째로 구해진 리츠벡터는 두 번째 정적벡터를 구하기 위해 사용된다. 구해진 정적벡터는 정규화 과정을 거친 후 두 번째 리츠벡터로 얻어진다. 그 과정은 식 7)과 같다.

$$\{x^{(i)}\} = \{x^{(i)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} \left[\{x^{(k)}\}^T [M]\{z^{(k)}\} \right] \{z^{(k)}\} \quad (7)$$

초기에 설정했던 k 번째 리츠벡터를 얻을 때 까지 위의 과정은 반복되어진다.

위의 과정에서 구성된 리츠벡터를 사용하여 각 요소에서의 레일리값들은 다음과 같이 계산된다.

$$\lambda_e^i = \sum_{k=1}^n \frac{\{z^{(k)}\}^T [K_e^i] \{z^{(k)}\}}{\{z^{(k)}\}^T [M_e^i] \{z^{(k)}\}} \quad (8)$$

$\{z\}$ 는 k 번째 리츠벡터이다. i 번째 요소의 레일리 에너지는 1st 부터 nth 까지의 리츠벡터에 의해 계

산된 각 레일리 값들의 합에 의해서 구해진다. 모든 영역에서 구해진 레일리 에너지 중에서 가장 작은 값을 갖는 m 개의 요소를 선정한다.

3.1.2 순차적 소거법에 의한 축소모델의 구성

첫 번째 단계를 거쳐서 구성된 축소모델에 순차적 소거법을 적용하여 최종적인 축소모델을 구성하게 된다. 반복적인 연산과정에서 강성/질량 행렬의 비가 가장 작은 자유도는 순차적으로 소거된다. TLCS 에 의한 전체적인 축소과정은 아래 그림과 같다. Fig. 1 에서 (a)는 초기 시스템이고, (b)는 첫 번째 단계에 의해서 근사화된 영역을 표시한 것이다. (c)는 두 번째 단계에서 순차적 소거법에 의해 선정된 자유도이다. 그림에서 표시된 점은 선정된 자유도를 포함하는 절점을 표시한 것이다.

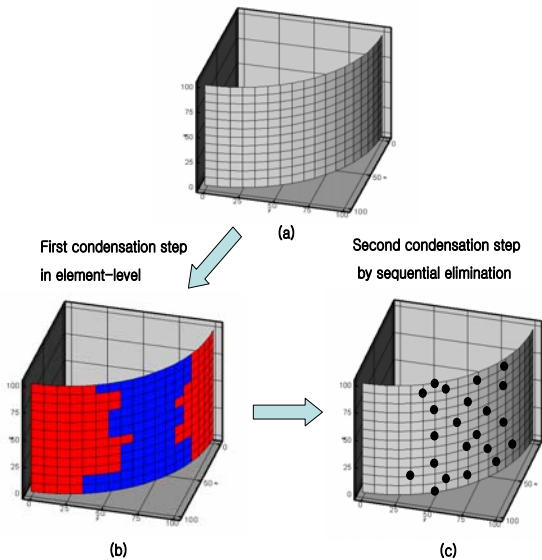


Fig. 1 The reduction scheme by TLCS

Fig. 2 는 주자유도 선정을 위한 전체적인 알고리즘이다.

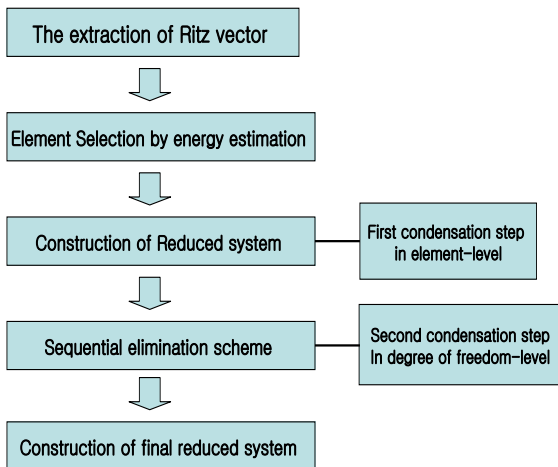


Fig. 2 Two-step algorithm of TLCS to construct a reduced system

3.2 주자유도 선정의 수치예제

3.2.1 샤프트(SHAFT)

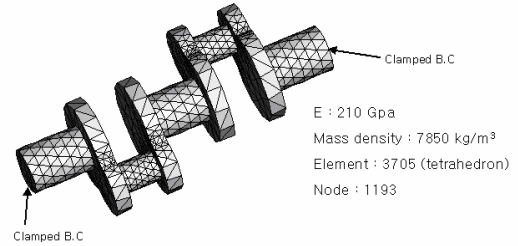


Fig. 3 Analysis condition of shaft

Fig. 3 은 4 절점 솔리드 요소(Tetrahedron)로 구성된 샤프트 예제이다. 양쪽 면에서 고정 경계이고, 총 요소수는 1193 이다. Fig. 4 는 TLCS 에 의한 주자유도 선정 결과이다. (a)는 첫번째 축소 단계에 의한 근사화된 영역을 나타낸 것이고, (b)는 순차적 소거법에 의한 주자유도 선정 결과이다.

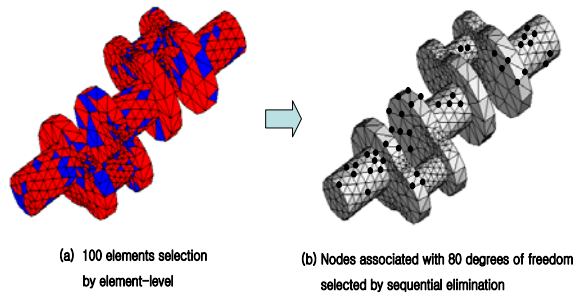


Fig. 4 The selection result of primary D.O.F by TLCS

3.2.2 실린더 튜브

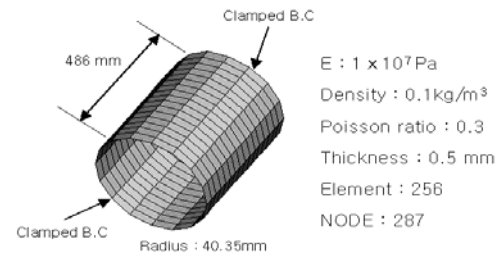


Fig. 5 Analysis condition of cylinder tube

Fig. 5 는 실린더 예제이다. 4 절점 flat 요소를 사용하고 있으며, 총 1722 개의 자유도로 구성되어 있다. Fig. 6 은 주자유도 선정 결과이다.

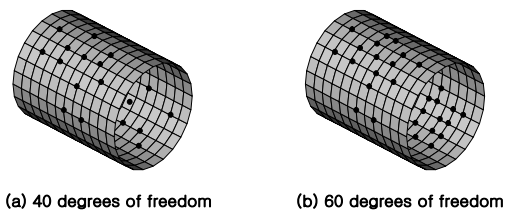


Fig. 6 The selection result of primary D.O.F by TLCS

4. 주자유도 선정에 의한 등가정하중으로의 전환

4.1 충격하중하의 평판

Fig. 7 은 평판 모델에 작용하는 하중을 나타내고 있다.

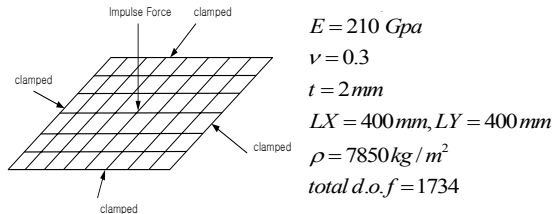


Fig. 7 Analysis condition of plate under impulse force

평판의 중앙에서 충격하중이 작용하고 있으며, 네 변은 고정 경계이다. 모달해석에 의한 최대 변위가 발생하는 시간은 0.0027s 이고, 최대변위는 충격하중이 작용하는 지점에서 발생하며 그 값은, -0.1018 mm 이다. Fig. 8 은 최대 변위값이 발생하는 자유도의 과도응답을 나타낸 그림이다.

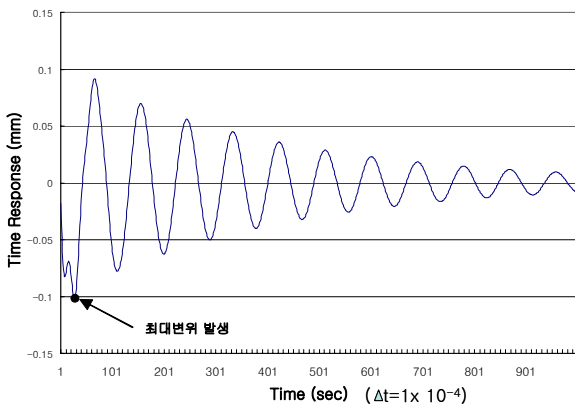


Fig. 8 Time response at the maximum displacement position

Fig. 9 는 TLCS 에 의한 주자유도 선정 결과이다.

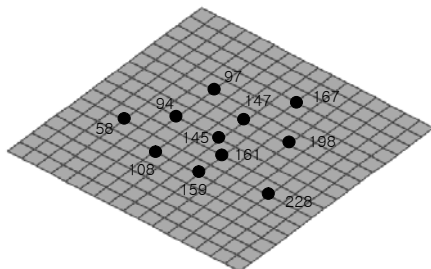


Fig. 9 The primary D.O.F selection by TLCS (The nodes connected with the selected D.O.F are marked and No. 145 is the loading point)

Fig. 9 의 결과처럼 충격하중을 분포시키기 위해 10 개의 자유도를 선정하였다. 식 3)의 관계식에 의한 방정식이 구성되면, 식 4)에 의한 정식화를 통해 SLP(sequential linear program) 알고리즘을 통

해 최적의 등가 정하중이 구해진다. 구해진 등가 정하중 값들은 정적해석을 통해 임계시간에서의 변위보다 큰 값을 도출해냄을 확인할 수 있다. Table 1 은 각 자유도에서 등가 정하중에 의한 변위결과와 임계시간에서의 변위값을 비교한 것이다.

Table 1 The displacement comparison between the Equivalent force and Time response

Node Num.	D.O.F	등가정하중 변위	시간응답 (임계시간)
58	3	-0.0314	-0.0251
94	3	-0.0734	-0.0688
97	3	-0.0522	-0.0454
108	3	-0.0641	-0.0574
145	3	-0.1030	-0.1018
147	3	-0.0883	-0.0859
159	3	-0.0713	-0.0658
161	3	-0.0961	-0.0935
167	3	-0.0340	-0.0292
198	3	-0.0622	-0.0574
228	3	-0.0298	-0.0251

등가 정하중을 적용함으로써 더 엄격한 해석 결과를 얻을 수 있으며, 등가 정하중이 부여된 이외의 모든 절점에서도 유사한 경향을 나타내고 있다. 이것은 안정성을 고려한 최적화 설계시 바람직한 사항으로 사료된다. 만약 동하중이 작용하는 절점에만 등가정하중을 부여할 경우 나머지 절점에서는 시간응답보다 엄격한 해석 결과를 얻을 수 없거나 전환된 정하중 값이 지나치게 크게 산출되므로 매우 비효율적인 구조해석이 이루어지게 된다. 또한 적절한 자유도가 선택되지 못한 경우에도 구조안정성을 위한 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 없다.

4.2 정현파가 작용하는 평판

두 번째 문제는 평판의 한쪽면이 고정되어 있고, 반대편 끝단 중앙에 정현파가 작용하는 문제이다.

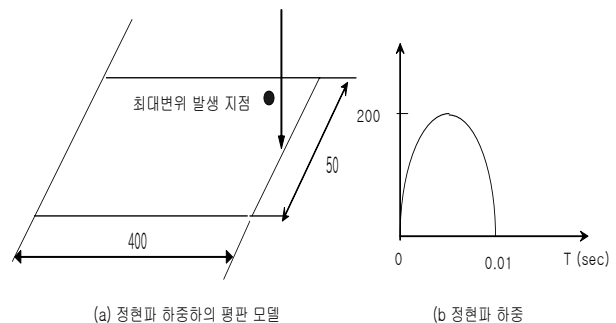


Fig. 10 Plate under dynamic load
임계시간은 0.1498 sec 이며, 그 때의 최대 변위값은 1.108 mm 이다.

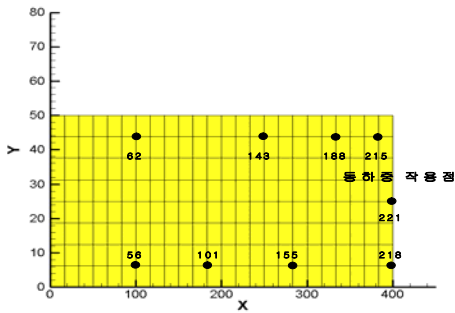


Fig. 11 The selection result of primary D.O.F by TLCS 8 개의 주자유도를 선정하였으며, 동하중이 작용하는 자유도를 등가정하중을 분포시키는 자유도에 포함시켰다. 등가정하중 계산 결과는 Table 2 와 같다.

Table 2 The displacement comparison between the Equivalent force and Time response

Node Num.	D.O.F	등가 정하중 변위	시간응답 (임계시간)
56	3	0.0997	0.0297
62	3	0.0992	0.0297
101	3	0.3082	0.1818
143	3	0.5284	0.4101
155	3	0.6518	0.5517
188	3	0.8428	0.7840
215	3	0.0000	0.0000
218	3	1.1090	1.1080
221	3	1.1081	1.1080

4.3 충격하중하의 실린더 튜브

Fig. 12 는 충격하중의 실린더 튜브를 나타낸 것이다. 축방향으로 충격하중이 작용하고 있으며 원편 끝단에서는 고정경계, 양쪽 측면에서는 대칭경계가 부과되었다. 길이방향은 400mm, 반경방향은 100mm 이다.

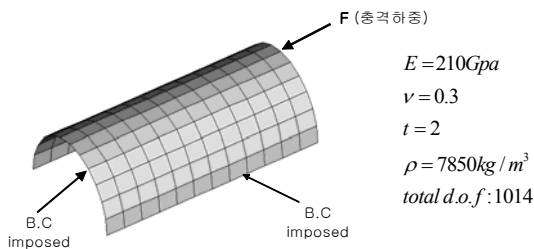


Fig. 12 Analysis condition of cylinder tube

자유도 선정은 등가 정하중의 크기가 적절하게 부과되도록 그 개수를 설정하여야 한다. 만약, 선정된 자유도 개수가 너무 작게 선택된다면, 등가 정하중의 크기가 상대적으로 크게 부여되므로, 지나친 하중 하에서 구조해석이 수행된다. Fig. 13 에서는 총 11 개의 자유도 선정(하중작용점 포함) 결과를 보여주고 있으며, 해당 절점과 자유도를 표시하였다.

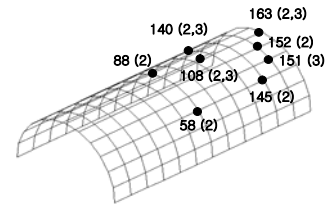


Fig. 13 The selection result by TLCS
(): Selected D.O.F (1.u, 2.v, 3.w)

최대 변위가 발생하는 임계시간은 0.0968sec 이며 그 때의 최대 변위값은 하중작용점인 절점 163 번에서 w 방향으로 25.948 mm 이다.

Fig. 14 는 임계시간에서의 변형된 형상을 나타낸 것이다.

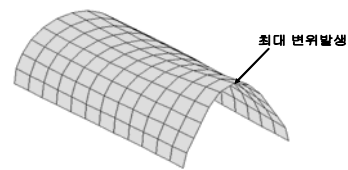


Fig. 14 The global deformation and maximum displacement position at the critical time

앞에서 선정된 주자유도에서의 등가정하중에 의한 해석결과를 임계시간에서의 변위와 비교한 결과가 Table 3 에 주어져 있다. 최대 변위가 발생하는 자유도 뿐만 아니라, 이외의 위치에서도 안전 설계를 위해 보수적인 결과를 제시하고 있다. 그러나, 앞의 예제와 비교하여, 등가 정하중에 의한 변위와 시간 응답에서의 변위값의 차이가 상대적으로 크게 나타나고 있으며, 이는 동하중을 적절하게 분포시키기 위해서는 몇 개의 자유도를 더 포함시켜야 한다는 것을 의미한다.

Table 3 The displacement comparison between the equivalent force and time response

Node Num.	D.O.F	등가 정하중 변위	시간응답 (임계시간)
58	2	0.1420	0.0973
88	3	2.9090	2.9547
108	2	-2.2807	-1.8877
108	3	3.5211	2.5362
140	2	7.1943	6.5357
140	3	2.3343	1.9647
145	2	-12.7222	-10.2814
151	3	20.8822	16.8060
152	2	4.7746	3.9807
163	1	-3.2401	-2.4701
163	3	33.6129	25.9484

본 연구에서 제안하고 있는 TLCS 는 동하중 방향과 단지 같은 방향으로의 자유도만을 선정하지 않는 장점이 있다. 실린더 예제에서 하중은 축방향 (u 방향)으로 작용하고 있으나, 임계시간에서 최대 변위는 w 방향이다. 그러므로, 동하중 방향과 동일한 자유도만을 선택하는 것은 매우 부적절하며, 경험에 바탕을 둔 선정에서도 이런 점들을 고려하

기는 용이하지 않다.

4.4 3 차원 트러스 구조물

다음 예제는 3 차원 트러스 구조물이다. 하단부가 고정되어 있고, 상단부 2 곳에서 충격하중이 작용하고 있다. 주자유도로 선정된 자유도 위치들이 Fig. 15 에 표시되었다. 총 7 개의 자유도(하중위치 포함)가 선정되었으며, ()안의 숫자는 선택된 자유도를 나타낸다. 1 은 u, 2 는 v, 3 은 w 방향 자유도를 의미한다.

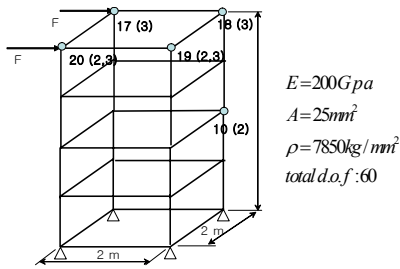


Fig. 15 Analysis condition of truss structure

모달해석에 의해 위험시간은 0.00271sec 이며, 절점 17 의 w 방향에서 최대 변위가 발생하게 된다. 그 때의 최대 변위값은 3.3336mm 이다. 최대 변위가 발생하는 자유도의 시간응답이 Fig. 16 에 주어져 있다.

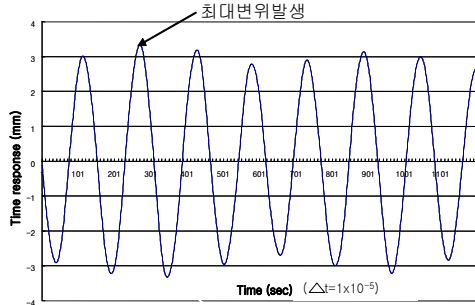


Fig. 16 Time response of the maximum displacement position

Table 4 는 시간응답과 등가정하중의 변위 비교 결과이다.

Table 4 The displacement comparison between the equivalent force and time response

Node Num.	D.O.F	등가 정하중 변위	시간응답 (임계시간)
10	2	0.0857	0.0645
17	3	3.5473	3.3336
18	3	3.5378	3.3290
19	2	-0.3788	-0.3722
19	3	1.9031	1.8508
20	2	0.3379	0.3282
20	3	1.9096	1.8535

5. 결 론

구조물에 작용하는 하중은 동하중이라고 할 수

있다. 그러나, 일반적인 구조해석은 정하중이 작용하는 것으로 가정하여 이루어 지고 있으며, 그 결과를 바탕으로 수행되는 최적화 작업은 구조물의 안정성 측면에서 충분한 신뢰를 주기 어렵다고 할 수 있다. 지금까지 구조 안정성을 고려한 최적화 작업을 보다 효율적으로 수행하기 위해 동하중을 정하중으로 전환한 방법들이 제안되어 왔다. 최대 변위가 발생하는 임계시간에서의 변위보다 큰 변위를 산출하는 등가 정하중을 부과하고, 정하중하의 조건과 동일한 방법으로 최적화가 수행되어 왔다. 그러나, 동하중을 분포시킬 적절한 자유도는 경험적으로 선택되어졌다. 만약 타당하지 않은 절점의 선정이 이루어지는 경우 임계시간보다 적은 변위값들을 제공하며, 이는 구조물의 평가와 해석, 설계의 신뢰도에 심각한 영향을 줄 수 있다.

본 연구에서는 축소시스템을 구성하기 위해서 사용되는 축소기법(Two-level condensation scheme)에 의해 등가정하중이 분포될 주자유도를 선정하였다. 수치예제를 통하여 선택된 주자유도에 등가 정하중을 분포시킨 후 구조해석을 수행하였다. 임계시간에서의 변위 비교를 통하여 모든 경우에서 구조 안정성을 보다 엄격하게 고려할 수 있는 결과를 얻을 수 있었으며, 선정된 자유도 이외의 절점에서 시간 응답보다 큰 변위결과들을 얻을 수 있었다. 만약 선정된 주자유도에 동하중이 작용하는 자유도가 포함되지 않았다면 인위적으로 추가시켜 주는 것이 바람직하다.

후 기

이 연구는 기계분야 BK21 의 지원을 받아서 수행되었고 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) 최우석, 강병수, 박경진,1998, “모드해석에 기초한 동하중의 등가정하중으로의 변환”, 대한기계학회논문집 A 권, 제 22 권 제 7 호, pp. 1193~1204
- (2) H.Kim, M.Cho, 2003, “Two-level scheme for selection of degrees of freedom by energy estimation combined with sequential elimination”,*Int.J.Numer.Mech.Engng.*, submitted.
- (3) W.S.Choi, G.J.Park, 1999, “Transformation of dynamic loads into equivalent static loads based on modal analysis,” *Int.J.Numer.Mech.Engng.*,Vol.46, pp. 29-43
- (4) 강병수, 최우석, 박경진,2000, “변위에 기초한 동하중에서 변환된 등가정하중에서의 구조최적 설계”, 대한기계학회 논문집 A 권, 제 24 권 8 호, pp 1949-1957