

타이어 Belt Cord 의 파단

김 석 남* • Akasaka Takashi**

Failure of Tire Belt Cord

Seok-nam Kim • Takashi Akasaka

Key Word : Tire(타이어), Belt Cord(벨트 코드), Failure(파단), Braking(제동), Membrane Force(막력), Rubber Composite(고무 복합재료)

Abstract

Tire subjected to inflation pressure and the load of passenger car has a important roll to dynamic performance characteristics of radial tires such as cornering and braking. These performance characteristics are directly related to the belt cord durability of tires. In this paper, we analyze the mechanism of belt cord broken due to cord tension at braking theoretically.

1. 서론

Braking 시에 타이어 Belt 는 커다란 장력이 접지부 Leading 부에 작용할 뿐 만 아니라 국부적으로는 커다란 압축력이 Trailing 부에 발생한다는 것은 참고 문헌[2]에서 정량적으로 지적하였다.

본 논문에서는 Leading 부(접지부 전반)에서 Cord 파단 강도에 대하여 서술한다.

Fig1 은 어떤 타이어의 Cord 파단 현상을 나타낸다. 여기에서, Radial Carcass 에 직접 접착하고 있는 하측 구성층을 #1 Belt 로 하고 상측 구성층을 #2 Belt 로 한다.

* 한국타이어 중앙연구소 구조해석 연구팀

** 일본 중앙대학 명예교수

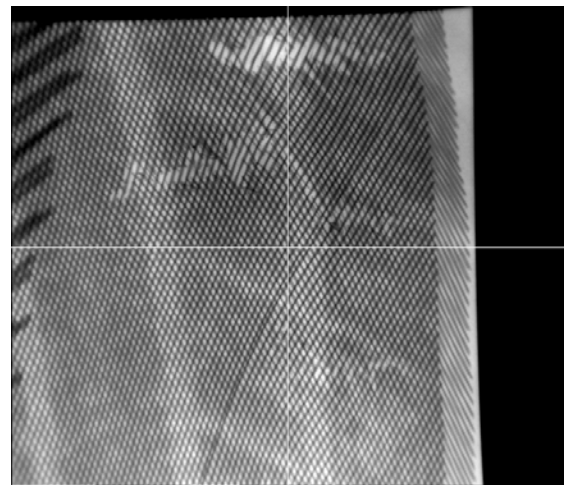


Fig.1 : An example of belt cord failure due to extension of the belt in the circumferential direction for 1*2(0.3)HT, 24EPI(Only #1 cord layer is broken)

Fig.1 에서 보여주는 것과 같이, Cord 파단은 #1Belt 만에서 발생하고 있음을 알 수 있다.

2. Model 화와 기초방정식

Fig.2 에 표시한 Belt 는 Bias 적층 구조에서 (Bias 각 θ) #1, #2 Belt 둘 다 폭을 $2b$ 로 한다.

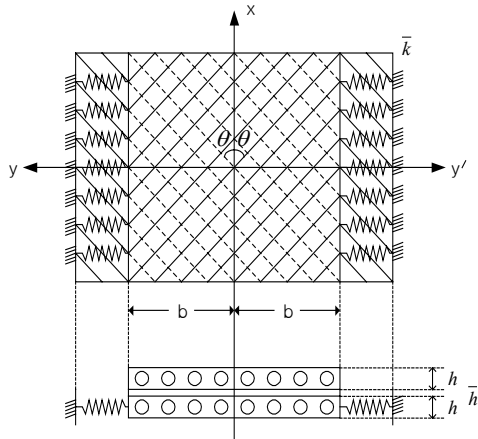


Fig.2 : Belt structure of two layered laminate with bias angle θ and lateral spring constant K

#2 Belt 보다 긴 #1 Belt 부분을 Spring 계로 바꾼다. Fig.2 을 참조하면 이 스프링은 #1Belt Leading 부의 Carcass 면 사이에 y 방향 접착 전단력을 의미하고 있다.

Fig3 는 각 구성층의 Cord 방향과 막력(N_x, N_y, N_{xy}) 및 변위 성분 (u, v)로 정의를 나타내고 있다. 각 구성층의 #1, #2 Belt 에 관해서는 상첨자 1,2 를 붙여 구별하도록 한다.

2 개의 구성층 사이에는 얇은 고무층이 들어 있어 #1, #2 Belt 의 상대적 변위에 비례하는 층간 전단응력 P_x, P_y (각각 x, y 방향)가 발생한다. 즉

$$\begin{aligned} P_x &= k(u^2 - u^1) \\ P_y &= k(v^2 - v^1) \end{aligned} \quad (1)$$

로 표시할 수 있다. 여기에서, 전단 스프링 상수를 k , 고무 전단 강성률을 G , Belt 사이

의 두께를 \bar{h} 로 하면, 아래의 수식으로

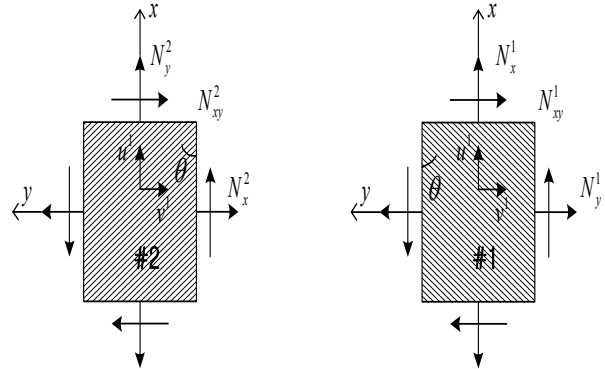


Fig.3 : Deformation of membrane forces and displacement for two constitutive layers

$$k = \frac{G}{\bar{h}} \quad (2)$$

주어진다. 또한, #1 Belt 면내 Hooke's 법칙은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} N_x^1 \\ N_y^1 \\ N_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx}^1 & A_{xy}^1 & A_{xs}^1 \\ A_{xy}^1 & A_{yy}^1 & A_{ys}^1 \\ A_{xs}^1 & A_{ys}^1 & A_{ss}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^1 \\ v_{,y}^1 \\ u_{,y}^1 + v_{,x}^1 \end{Bmatrix}$$

(3)

여기에서, 강성 Matrix $[A]$ 는 참고문헌[1]을 참조. #2Belt 에서는 식(3)과 같은 Hooke's 법칙(상첨자 2 을 붙임)이 얻어지지만 #1Belt 에서 Cord 의 Bias 각 θ 에 대하여 $-\theta$ 가 대응하기 때문에 A_{ij}^1 에 대한 A_{ij}^2 ($i, j = x, y, s$) 는 다음의 관계가 있다.

$$\begin{aligned} A_{xx}^1 &= A_{xx}^2 \equiv A_{xx} & A_{xs}^1 &= -A_{xs}^2 \equiv A_{xs} \\ A_{yy}^1 &= A_{yy}^2 \equiv A_{yy} & A_{ys}^1 &= -A_{ys}^2 \equiv A_{ys} \\ A_{xy}^1 &= A_{xy}^2 \equiv A_{xy} & A_{ss}^1 &= A_{ss}^2 \equiv A_{ss} \end{aligned} \quad (4)$$

따라서, 각 구성층의 평형방향식은 Fig.3 을 참고함으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial N_x^j}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^j}{\partial y} = (-1)^j p_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial N_{xy}^j}{\partial x} + \frac{\partial N_y^j}{\partial y} = (-1)^j p_y, j = 1, 2$$

Hooke's 법칙(3)을 식(5) 에 대입하면 각 구성층에 대한 방정식을 얻을 수 있다.

$$(A_{xx}u_{,xx}^j - (-1)^j 2A_{xs}u_{,xy}^j + A_{ss}u_{,yy}^j) + \{A_{xs}v_{,xx}^j (A_{xy} + A_{ss})v_{,xy}^j + A_{ys}v_{,yy}^j\} \quad (6)$$

$$= (-1)^j k(u^2 - u^1)$$

$$\{(-1)^j A_{xs}u_{,xx}^j + (A_{xy} + A_{ss})u_{,xy}^j - (-1)^j A_{ys}u_{,yy}^j\} + (A_{ss}v_{,xx}^j - (-1)^j 2A_{ys}v_{,xy}^j + A_{yy}v_{,yy}^j) = (-1)^j k(v^2 - v^1) \quad j = 1, 2 \quad (7)$$

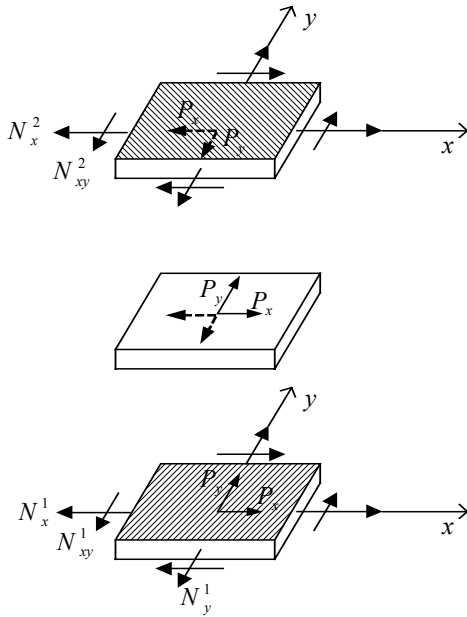


Fig. 4 : Free diagram of constitutive layers of belt structure

여기에서 변위 성분을 다음과 같이 놓는다.

$$u^1 = \varepsilon_0 x + U^1(y)$$

$$v^1 = V^1(y) \quad (8)$$

$$u^2 = \varepsilon_0 x + U^2(y)$$

$$v^2 = V^2(y)$$

식(8)를 식(6)과 식(7)에 대입한 후, 합과 차를 고려하여 정리하면 다음식으로 정리할 수 있다.

$$A_{ss}U_{,yy} - A_{ys}\bar{V}_{,yy} = 0 \quad (9)$$

$$A_{ss}\bar{U}_{,yy} - A_{ys}V_{,yy} = 2k\bar{U} \quad (10)$$

$$-A_{ys}\bar{U}_{,yy} + A_{yy}V_{,yy} = 0 \quad (11)$$

$$-A_{ys}U_{,yy} + A_{yy}\bar{V}_{,yy} = 2k\bar{V} \quad (12)$$

여기에서,

$$U^2 + U^1 \equiv U \quad U^2 - U^1 \equiv \bar{U} \quad (13)$$

$$V^2 + V^1 \equiv V \quad V^2 - V^1 \equiv \bar{V}$$

로 놓았다.

식(9)를 식(12)에, 식(11)를 식(10) 대입하여, $U_{,yy}$ 와 $V_{,yy}$ 를 소거한다면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{A_{ss}A_{yy} - A_{ys}^2}{A_{yy}}\bar{U}_{,yy} = 2k\bar{U} \quad (14)$$

$$\bar{V}_{,yy} - \frac{2kA_{ss}}{\hat{A}_{xx}}\bar{V} = 0 \quad (15)$$

여기에서,

$$\alpha^2 \equiv \frac{A_{yy}}{\hat{A}_{xx}} 2k, \quad \beta^2 \equiv \frac{A_{ss}}{\hat{A}_{xx}} 2k$$

(16)

$$A_{ss}A_{yy} - A_{ys}^2 \cong \hat{A}_{xx} \quad (17)$$

이다. 따라서, 식(14)를 식(11), 식(15)를 식

(9)에 대입한 후 적분하면 아래와 같이 U, V 에 대하여 정리할 수 있다.

$$U = \frac{A_{ys}}{A_{ss}}(C_3 \sinh \beta y + C_4 \cosh \beta y) + C_5 y + C_6 \quad (18)$$

$$V = \frac{A_{ys}}{A_{ss}}(C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y) + C_7 y + C_8 \quad (19)$$

3. 변위계의 표식

식(18), 식(19)를 식(8)에 대입하고 식(13)을 이용하면 각 구성층의 변위를 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$u^1 = \varepsilon_0 x + \frac{1}{2} \left(-C_1 \sinh \alpha y + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_3 \sinh \beta y - C_2 \cosh \alpha y + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_4 \cosh \beta y + C_5 y + C_6 \right) \quad (20)$$

$$v^1 = \frac{1}{2} \left(-C_3 \sinh \beta y + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_1 \sinh \alpha y - C_4 \cosh \beta y + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_2 \cosh \alpha y + C_7 y + C_8 \right) \quad (21)$$

$$u^2 = \varepsilon_0 x + \frac{1}{2} \left(C_1 \sinh \alpha y + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_3 \sinh \beta y + C_2 \cosh \alpha y + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_4 \cosh \beta y + C_5 y + C_6 \right) \quad (22)$$

$$v^2 = \frac{1}{2} \left(C_3 \sinh \beta y + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_1 \sinh \alpha y + C_4 \cosh \beta y + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_2 \cosh \alpha y + C_7 y + C_8 \right) \quad (23)$$

여기에서, 변형이 일정한 x 방향의 변위를 제거하면

$$C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0 \quad (24)$$

가 된다. 한편, 식(20) ~ 식(23)을 식(3)에 대입하면 막력 성분은 간단히 얻을 수 있다.

또 한편, 식(1)로부터 층간 전단응력 P_x, P_y 는 다음과 같이 얻어진다.

$$P_x = k(u^2 - u^1) = kC_1 \sinh \alpha y \quad (25)$$

$$P_y = k(v^2 - v^1) = kC_3 \sinh \beta y \quad (26)$$

4. 경계조건

경계 $y = b$ 에서, #1Belt 는 막력(\bar{N}_y) 을 받고 있지만 #2 Belt 는 막력 Free 임을 고려한다. 여기에서 막력을 다음과 같이 놓는다.

$$\bar{N}_y \equiv \bar{N} \varepsilon_0 \quad (27)$$

따라서, 이하의 경계조건을 생각한다.

[1] $y = b$ 에서 $N_y^1 = \bar{N}_y$:

$$A_{xy} \varepsilon_0 + A_{yy} \bar{Y} + A_{ys} \bar{Z} = \bar{N}_y \quad (28)$$

[2] $y = b$ 에서 $N_y^2 = 0$:

$$A_{xy} \varepsilon_0 + A_{yy} Y - A_{ys} Z = 0 \quad (29)$$

[3] $y = b$ 에서 $N_{xy}^1 = 0$:

$$A_{xs} \varepsilon_0 + A_{ys} \bar{Y} + A_{ss} \bar{Z} = 0 \quad (30)$$

[4] $y = b$ 에서 $N_{xy}^2 = 0$:

$$-A_{xs} \varepsilon_0 - A_{ys} Y + A_{ss} Z = 0 \quad (31)$$

여기서,

$$\frac{1}{2}(-C_3 \beta \cosh \beta b + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_1 \alpha \cosh \alpha b + C_7) \equiv \bar{Y}$$

$$\frac{1}{2}(-C_1 \alpha \cosh \alpha b + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_3 \beta \cosh \beta b + C_5) \equiv \bar{Z} \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}(C_3 \beta \cosh \beta b + \frac{A_{ys}}{A_{yy}} C_1 \alpha \cosh \alpha b + C_7) \equiv Y$$

$$\frac{1}{2}(C_1 \alpha \cosh \alpha b + \frac{A_{ys}}{A_{ss}} C_3 \beta \cosh \beta b + C_5) \equiv Z$$

이다. 이상의 4 개의 경계조건을 이용하면 식(32)에 포함되어 있는 4 개의 미지상수인 C_1, C_3, C_5, C_7 가 아래와 같이 구할 수 있다.

$$C_1 \alpha \cosh ab = -\varepsilon_0 \frac{2\hat{A}_{xs} - \bar{N}A_{ys}}{\hat{A}_{xx}} \quad (33)$$

$$C_3 \beta \cosh \beta b = -\varepsilon_0 \frac{\bar{N}A_{ss}}{\hat{A}_{xx}} \quad (34)$$

$$C_5 = \frac{A_{ys}}{A_{ss}} \varepsilon_0 \frac{A_{ss}}{A_{xx}} - \varepsilon_0 \frac{\bar{N}A_{ys}}{\hat{A}_{xx}} = 0 \quad (35)$$

$$C_7 = \varepsilon_0 \frac{-2A_{xy} + \bar{N}}{A_{yy}} \quad (36)$$

5. 막력의 결정

적분상수가 ε_0 , \bar{N} 에 의해 구해졌을 때 막력 분포는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$N_x^j = \varepsilon_0 \left[\frac{\hat{A}_{ss} + \frac{\bar{N}}{2} A_{xy}}{A_{yy}} + (-1)^j \frac{\bar{N} \hat{A}_{xy} \cosh \beta y}{2 \hat{A}_{xx} \cosh \beta b} \right] \quad (37)$$

$$\left[\frac{\hat{A}_{xs} \left(\hat{A}_{xs} - \frac{\bar{N}}{2} A_{ys} \right) \cosh \alpha y}{A_{yy} \hat{A}_{xx} \cosh ab} \right]$$

$$\therefore N_y^j = \varepsilon_0 \frac{\bar{N}}{2} \left(1 - (-1)^j \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} \right) \quad (38)$$

$$\therefore N_{xy}^1 = (-1)^j \frac{\hat{A}_{xs} - \frac{\bar{N}}{2} A_{ys}}{A_{yy}} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \quad (39)$$

여기서, $j = 1, 2$ 이다

또한, 층간 전단응력 P_x, P_y 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_x = -k\varepsilon_0 \left(\frac{2\hat{A}_{xs} - \bar{N}A_{ys}}{\hat{A}_{xx}} \right) \frac{\sinh \alpha y}{\alpha \cosh ab} \quad (40)$$

$$P_y = -k\varepsilon_0 \frac{\bar{N}A_{ss}}{\hat{A}_{xx}} \frac{\sinh \beta y}{\alpha \cosh \beta b} \quad (41)$$

6. \bar{N} 및 P 의 결정

막력 \bar{N} 는 식(27)에 의해 $\bar{N}_y = \bar{N}\varepsilon_0$ 로 정의되어 있지만 Fig.2 에 표시한 것처럼 #1Belt 의 Leading 부의 스프링 반력(스프링 상수 \bar{K})으로 생각할 수 있다. 즉 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{N}_y = -\bar{K}v^1(b) \quad (42)$$

식(27),식(42)을 고려함으로써 다음식이 얻어진다.

$$\bar{N} = \frac{\left(\frac{A_{xy}}{A_{yy}} b + \frac{\hat{A}_{xs} A_{ys}}{\hat{A}_{xx} A_{yy}} \frac{\tanh ab}{\alpha} \right)}{\frac{2}{\bar{K}} + \frac{b}{A_{yy}} + \frac{A_{ss}}{\hat{A}_{xx}} \frac{\tanh \beta b}{\beta} + \frac{A_{ys}^2}{\hat{A}_{xx} A_{yy}} \frac{\tanh ab}{\alpha}} \quad (43)$$

또 한편 장력 P 는 N_x^1 및 N_x^2 의 표현식으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P = 2\varepsilon_0 \left[\frac{2\hat{A}_{ss} + \bar{N}A_{xy} b}{A_{yy}} - \frac{\hat{A}_{xs} (2\hat{A}_{xs} - \bar{N}A_{ys}) \cosh \alpha y}{A_{yy} \hat{A}_{xx} \cosh ab} \right] \quad (44)$$

막력 $\bar{N}\varepsilon_0$ 에 의해 P 는 증가함을 알 수 있다.

7. Cord 방향 막력

Cord 에 걸리는 장력을 구하기 위하여 #1 및 #2Belt 의 Cord 방향 막력 N_L^1, N_L^2 을 구한다. 참고문헌[1]로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$N_L^1 = N_x^1 \cos^2 \theta + N_y^1 \sin^2 \theta + N_{xy}^1 \sin 2\theta \quad (45)$$

$$N_L^2 = N_x^2 \cos^2 \theta + N_y^2 \sin^2 \theta - N_{xy}^2 \sin 2\theta \quad (46)$$

이하 N_L^1 과 N_L^2 의 대소 관계를 조사한다. 또한, 식(37), 식(38), 식(39)을 이용하면 다

음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{N_L^1}{\epsilon_0} = & \left\{ \left(\frac{\hat{A}_{xs}}{A_{yy}} - \frac{\hat{A}_{xs}^2}{A_{yy}\hat{A}_{xx}} \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \right. \\ & + \frac{\bar{N}}{2} \left(\frac{\hat{A}_{xy}}{\hat{A}_{xx}} - \frac{A_{xy}}{A_{yy}} \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} + \frac{\hat{A}_{xs}A_{ys}}{\hat{A}_{xx}A_{yy}} \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \left. \right\} \\ & \times \cos^2 \theta + \frac{\bar{N}}{2} \left(1 + \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} \right) \sin^2 \theta \\ & - \left(\frac{\hat{A}_{xs}}{A_{yy}} - \frac{\bar{N}}{2} \frac{A_{ys}}{A_{yy}} \right) \left(1 - \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_L^2}{\epsilon_0} = & \left\{ \left(\frac{\hat{A}_{ss}}{A_{yy}} - \frac{\hat{A}_{xs}^2}{A_{yy}\hat{A}_{xx}} \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \right. \\ & + \frac{\bar{N}}{2} \left(\frac{\hat{A}_{xy}}{\hat{A}_{xx}} + \frac{A_{xy}}{A_{yy}} \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} + \frac{\hat{A}_{xs}A_{ys}}{\hat{A}_{xx}A_{yy}} \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \left. \right\} \quad (48) \\ & \times \cos^2 \theta + \frac{\bar{N}}{2} \left(1 - \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} \right) \sin^2 \theta \\ & - \left(\frac{\hat{A}_{ss}}{A_{yy}} - \frac{\bar{N}}{2} \frac{A_{ys}}{A_{yy}} \right) \left(1 - \frac{\cosh \alpha y}{\cosh ab} \right) \sin 2\theta \end{aligned}$$

식(47)과 식(48)의 차를 취하면

$$\Delta N_L \equiv N_L^1 - N_L^2 \quad (49)$$

로 쓸 수 있고, 이것을 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_L}{\epsilon_0} = & \bar{N} \left(\frac{-\hat{A}_{xy}}{\hat{A}_{xx}} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \quad (50) \\ & \times \frac{\cosh \beta y}{\cosh \beta b} \end{aligned}$$

이 얻어 진다. 식(50)는 $\bar{N} = 0$ 일때 는 $N_L^1 = N_L^2$ 임을 표시하고 있다. 여기에서 참고문헌[1]을 참고하면

$$-\hat{A}_{xy} = A_{xy}A_{ss} - A_{xs}A_{ys} \quad (51)$$

이고, $-\hat{A}_{xy} > 0$ 이 되어야 한다. 즉

$$\begin{aligned} -\hat{A}_{xy} = & (A_L \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} A_T) \\ & (A_L \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} A_T) \quad (52) \\ & - (A_L \sin \theta \cos^3 \theta)(A_L \sin^3 \theta \cos \theta) \\ = & \frac{3}{4} A_L A_T \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{8} A_T^2 > 0 \end{aligned}$$

이 되기 때문이다. 따라서

$$N_L^1 \geq N_L^2 \quad (53)$$

를 얻는다. 등호는 $\bar{N} = 0$ 일 때 성립한다.

9. 결론

이상, Braking 시의 Belt Cord 의 파단에 관

하여 #1Belt 의 막력 $\bar{N}_y (= \epsilon_0 \bar{N})$ 을 고려한 경우의 cord 방향 막력 (N_L^1, N_L^2) 의 표현식을 구하면서 아래와 같은 결론을 얻었다.

(1) Cord 파단은 결국 #1Belt 구성층에서 일어난다. 이것은 Bias 각 θ 에 무관하다.

(2) #1 Belt 에서 Cord 파단은 #1 Belt 의 Leading 부의 횡 변위(v^1)의 구속 작용에 의한다. 또는 횡력 \bar{N}_y 에 의한다고 말할 수도 있다.

(3) N_L^1 의 표현식을 구하였다. 구체적으로 구조 Dimension 을 정함에 있어서 이것으로부터 Cord 최대 인장 응력이 산정된다. 이 때의 인장력 P 는 Braking 시의 최대 장력([2] 참조)을 이용하면 좋다.

(4) Cord 파단은 Belt 폭의 중심($y=0$)에서 일어난다고 생각할 수 있고 그곳에서부터 Belt 폭 전체로 파급된다고 생각할 수 있다.

참고 문헌

[1] T. Akasaka, K. Kabe, and K. Sako :
Bending Stiffness of a Tire-Belt Structures with

Steel Cords, Composite structure and Technology,
24(1985), pp.215-230

[2] 김석남, 김용희, Akasaka Takashi :
"Braking 시 타이어 Belt 거동의 1 차원적 해석", 한국 자동차 공학회 추계 학술 발표회
논문집, 2001.10.