

내부 비정상유동을 갖는 파이프계의 동강성모델링

박종환[†] · 이우식^{*}

Exact Dynamic Stiffness Model for the Pipelines Conveying Internal Unsteady Flow

Jonghwan Park and Usik Lee

Key Words : Exact Dynamic Stiffness Model(엄밀한 동강성 모델), Internal Unsteady Flow(내부 비정상유동), Pipe(파이프), Spectral Element Method(스펙트럴요소법)

Abstract

Exact dynamic stiffness model for a uniform straight pipeline conveying unsteady fluid is formulated from a set of fully coupled pipe-dynamic equations of motion, in which the fluid pressure and velocity of internal flow as well as the transverse and axial displacements of the pipeline are all treated as dependent variables. The accuracy of the dynamic stiffness model formulated herein is first verified by comparing its solutions with those obtained by the conventional finite element model. The spectral element analysis based on the present dynamic stiffness model is then conducted to investigate the effects of fluid parameters on the dynamics and stability of an example pipeline problem.

1. 서론

유체를 전송하는데 사용하는 파이프계(piping system)로는 증기 터빈, 송유관, 펌프 유출관, 액체추진 로켓의 파이프계 등이 있다. 일반적으로 유체를 전송하는 파이프계가 진동을 하면 파이프 내부 유동장은 파이프 구조진동의 영향을 받아 유동특성이 변화하게 된다. 변화된 내부 유동장은 파이프의 벽과 상호연계되어 파이프계의 동특성을 다시 변화시키는 과정을 반복하게 되고 경우에 따라서는 파이프 구조의 파괴를 초래할 수 있다. 내부에 비정상 유동을 갖는 파이프계의 진동과 내부 유체의 유동특성을 보다 정확하게 예측하기 위해서는 파이프 구조와 유체 사이의 연성(coupling)이 보다 엄밀하게 고려된 파이프 동역학(pipe-dynamics) 이론이 사용되어야 한다. 따라서 지난 반세기 동안 파이프계의 유체유발 진동의 모델링과 해석에 관한 연구가 많은 연구자들에 의해 이루어졌다.⁽¹⁾

내부유동에 의한 파이프계의 횡방향 진동을 처음으로 다룬 연구자는 Ashley와 Haviland⁽²⁾이다. Housner⁽³⁾가 Ashley와 Haviland⁽²⁾가 유도한 초기 파이프 동역학 방정식을 내부 유동에 의한 코리올리(Cor-iolis)력의 영향을 포함시켜 수정한 이후 다양한 파이프 동역학 이론이 문헌에 발표되었다. 여기에는 Nemat-Nasser 등⁽⁴⁾, Païdoussis 등⁽⁵⁾, Lesmez 등⁽⁶⁾의 선형 이론과 Lin, Tsai⁽⁷⁾, Zhang 등⁽⁸⁾의 비선형 이론이 포함된다. 현재까지 문헌에 발표된 파이프 동역학 이론을 살펴보면 대부분의 연구에서 단지 파이프 자체의 구조진동만을 다루었을 뿐 파이프 진동과 연성된 내부 유동의 동특성은 고려하지 않았다. 단지 파이프 동역학 방정식에서 내부 유체의 속도나 압력을 내부 유체가 파이프 진동에 미치는 영향을 고려하기 위한 매개변수로만 사용하였다.

파이프 진동과 내부 비정상 유동 사이의 연성을 고려하기 위해 Lee 등⁽⁹⁾은 파이프계의 축방향, 반경방향, 횡방향의 진동 뿐만 아니라 내부 비정상 유동의 압력과 속도까지 모두 변수로 고려한 상호연성된 파이프 동역학 운동방정식을 유도하였다. 이후에 내부 유동압력으로 인해 발생하는 변형률⁽¹⁰⁾과 반경방향의 쉘 진동과 축방향의 장력⁽¹¹⁾을 고려하기 위한 연구가 이루어졌다.

[†] 인하대학교 기계공학과

^{*} 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)867-7318 FAX : (032)866-1434

파이프 동역학 문제에 사용되어온 해석방법에는 모드해석법⁽³⁾, Galerkin방법^(4,5), 전달행렬법⁽⁶⁾, 유한요소법^(7,9), 유한차분법(finite difference method)⁽¹¹⁾, 특성법(method of characteristics)⁽¹¹⁾, 파동법(wave approach)⁽¹²⁾ 등이 있다.

구조의 진동 형상은 진동주파수에 따라 변화한다. 따라서, 정적 다항 함수를 사용하여 유도되는 일반 유한요소모델의 경우 고주파에서 만족할 만한 해석결과를 얻기 위해서 미세한 요소분할이 불가피하다. 반면에 동강성법(dynamic stiffness method)에서 사용되는 동강성행렬은 주파수영역에서 구조 동역학 방정식을 만족하는 해를 동적 형상함수로 사용하여 엄밀하게 유도되기 때문에 균일한 구조 요소의 경우 요소분할 없이 하나의 유한요소만을 사용하여 엄밀해를 제공한다. 이러한 이유에서 동강성법은 엄밀해법의 하나로 구분되고 있다.

FFT(fast Fourier transforms)에 기초한 동강성법을 특별히 스펙트럴요소법(SEM: the spectral element method)이라고도 한다.^(13,14) SEM에서는 동강성법에서와 마찬가지로 동강성행렬을 사용하기 때문에 요소분할을 최소화하여 전체 구조시스템의 총 자유도 수를 크게 줄일 수 있는 엄밀해법의 하나이며, FFT를 이용하여 주파수응답으로부터 시간응답을 보다 신속하고 효율적으로 구할 수 있으므로 전산용량과 전산시간을 크게 줄일 수 있는 장점이 있다. 이러한 SEM의 장점을 이용하기 위해서 Lee와 Oh⁽¹⁵⁾가 정상유동을 갖는 파이프계에 대한 스펙트럴요소를 유도하고 횡방향과 축방향 진동해석과 안정성해석을 수행하였다. 그러나 비정상유동을 갖는 파이프계에 SEM을 적용한 사례는 아직 문헌에 발표되지 않았다.

따라서 본 논문의 목적은 (1) 파이프계의 축방향과 횡방향 진동뿐만 아니라 비정상유동의 압력과 속도에 대해서도 동강성모델을 유도하고, (2) 동강성모델의 정확성을 수치적으로 나타내고, (3) SEM을 적용하여 파이프계에 대한 예제의 진동과 안정성에 관련된 유체 매개변수들의 영향을 살펴보는데 있다.

2. 운동방정식

본 연구에서 다루고자 하는 파이프계는 지표면과 θ 의 각도로 기울어진 직선 파이프계이며 진폭은 작다고 가정한다. Fig. 1은 미소 파이프 구조요소와 유체요소를 나타낸다. $w(x, t)$ 와 $u(x, t)$ 는 파이프계의 횡방향과 축방향 변위를 나타내고 $p(x, t)$ 와 $c(x, t)$ 는 유체의 압력과 속도이다. N 과 τS 는 유체에 의해 파이프벽에 작용하는 수직방향과 접선방향의 합력을 나타낸다.

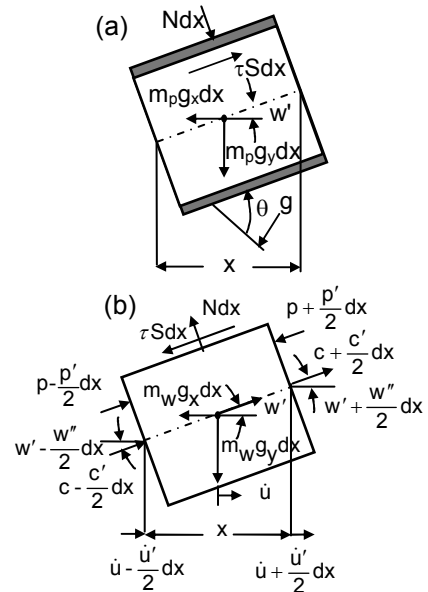


Fig. 1 Free body diagrams for (a)the pipeline element, and (b)the fluid element(control volume).

파이프 동역학방정식과 상응하는 경계조건은 다음의 Hamilton원리로부터 유도할 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \tag{1}$$

운동에너지 T 와 포텐셜에너지 V 는 다음과 같다.

$$T = \frac{m_p}{2} \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{w}^2] dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{T_0^2}{EA_p} + u'^2 + 2T_0 u' + T_0 w'^2 \right] dx \tag{2}$$

$$+ \frac{EI_p}{2} \int_0^L w''^2 dx + m_p \int_0^L (g_x u + g_y w) dx$$

여기서 $(\dot{\quad})$ 와 (\prime) 은 각각 시간 t 와 공간좌표 x 에 대한 미분을 나타낸다. L, E, A_p, I_p, m_p, T_0 는 각각 파이프의 길이, 탄성계수, 파이프의 단면적, 파이프의 관성모멘트, 파이프의 단위 길이당 질량, 축방향으로 작용하는 장력을 나타낸다. $g_x = g \cos \theta$ 이고 $g_y = g \sin \theta$ 이며 여기서 g 는 중력가속도이다.

파이프벽에 작용하는 유체유발력에 의한 가상일 δW 와 경계에서의 합력과 모멘트는 다음과 같다.

$$\delta W = \int_0^L [(\tau S + Nw')\delta u + (\tau Sw' - N)\delta w] dx$$

$$+ M_1 \delta w'(0) + M_2 \delta w'(L) + V_1 \delta w(0) \tag{3}$$

$$+ V_2 \delta w(L) + T_1 \delta u(0) + T_2 \delta u(L)$$

여기서 (M_1, V_1, T_1) 와 (M_2, V_2, T_2) 는 파이프요소의 좌측 끝단과 우측 끝단에 작용하는 모멘트, 횡방향 전단력, 축방향 장력을 각각 나타낸다.

식(2-3)을 Hamilton원리에 적용하고 부분적분을 적용하면 파이프의 횡방향과 축방향 진동에 대한

운동방정식과 상응하는 경계조건은 다음과 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 EI_p w'''' - T_0 w'' + m_p \ddot{w} + m_p g_y - \tau S w' + N &= 0 \\
 EA_p u'' - m_p \ddot{u} - m_p g_x + \tau S + N w' &= 0 \\
 M_1 = -EI_p w''(0) \text{ or } w'(0) &= 0 \\
 V_1 = EI_p w'''(0) - T_0 w'(0) \text{ or } w(0) &= 0 \\
 T_1 = -EA_p u'(0) - T_0 \text{ or } u(0) &= 0 \\
 M_2 = EI_p w''(L) \text{ or } w'(L) &= 0 \\
 V_2 = -EI_p w'''(L) + T_0 w'(L) \text{ or } w(L) &= 0 \\
 T_2 = EA_p u'(L) + T_0 \text{ or } u(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Fig. 1(b)의 유체요소예 뉴턴의 운동법칙을 적용하여 유체의 운동량방정식(momentum equations)을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (pA)' + N w' + \tau S + m_w (g_x + \ddot{u} + \dot{c} + c c' + c u') &= 0 \\
 (pA w')' - N + \tau S w' & \\
 + m_w (g_y + \ddot{w} + 2c \dot{w}' + \dot{c} w' + c^2 w'' + c c' w') &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

여기서 m_w 는 유체의 단위 길이당 질량이다. 유체의 연속방정식(continuity equation)은 유체요소에 질량보존법칙을 적용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{p}A + m_w a^2 (c' - 2v \dot{u}') = 0
 \tag{7}$$

여기서 a 는 유체의 파동속도(wave speed)⁽¹⁶⁾이다. 식(4)와 (6)을 결합하고 유체의 전달효과를 나타내는 항들과 크기가 작은 비선형 항들을 무시하면 연성된 4개의 식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 EI_p w'''' + (m_w c^2 - T_0 + pA) w'' & \\
 - m_w \left(\frac{f}{2D} |c| c + g_x \right) w' + 2m_w c \dot{w}' + m \ddot{w} + m g_y &= 0 \\
 EA_p u'' - m_p \ddot{u} + m_w g_y w' + m_w \frac{f}{2D} |c| c - m_p g_x &= 0 \\
 p'A + m_w \frac{f}{2D} |c| c + m_w (g_x + g_y w' + \ddot{u} + \dot{c}) &= 0 \\
 \dot{p}A + m_w a^2 (c' - 2v \dot{u}') &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

여기서 $m = m_p + m_w$ 이고 f 는 Darch-Weisbach 점성 마찰계수⁽¹⁷⁾이다.

식(8)의 일반해를 정적응답과 동적응답의 합으로 가정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 w(x,t) &= w_s(x) + w_d(x,t) \\
 u(x,t) &= u_s(x) + u_d(x,t) \\
 p(x,t) &= p_s(x) + p_d(x,t) \\
 c(x,t) &= c_0 + c_d(x,t)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

여기서 아래첨자 s 와 d 는 해의 정적응답과 동적응답을 각각 나타내고 c_0 는 일정한 유속을 나타낸다. 파이프와 유체의 무게에 의한 파이프계의 정적 변

형을 무시하면 정상유동속도 c_0 에 의한 해의 정적응답 $w_s(x)$, $u_s(x)$, $p_s(x)$ 는 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 EI_p w_s'''' + (m_w c_0^2 - T_0 + p_s A) w_s'' & \\
 - m_w \frac{f}{2D} |c_0| c_0 w_s' &= 0 \\
 EA_p u_s'' + m_w \frac{f}{2D} |c_0| c_0 &= 0 \\
 p_s' A + m_w \frac{f}{2D} |c_0| c_0 + m_w (g_x + g_y w_s') &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

식(9)와 (10)을 식(8)에 적용하면 일반해의 동적응답 $u_d(x,t)$, $w_d(x,t)$, $c_d(x,t)$, $p_d(x,t)$ 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 EI_p w_d'''' + (m_w c_0^2 - T_0 + p_s A) w_d'' & \\
 - m_w \left(\frac{f}{2D} |c_0| c_0 + g_x \right) w_d' + 2m_w c_0 \dot{w}_d' + m \ddot{w}_d &= 0 \\
 EA_p u_d'' - m_p \ddot{u}_d + m_w g_y w_d' + m_w \frac{f}{D} |c_0| c_d &= 0 \\
 p_d' A + m_w \frac{f}{D} |c_0| c_d + m_w (g_y w_d' + \ddot{u}_d + \dot{c}_d) &= 0 \\
 \dot{p}_d A + m_w a^2 (c_d' - 2v \dot{u}_d') &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

정적응답 u_s , w_s , p_s 는 식(10)으로부터 구할 수 있다. w_s 와 p_s 를 식(11)에 대입하면, 식(11)의 동적응답 w_d , u_d , p_d , c_d 를 구할 수 있다. 식(8)의 일반해는 식(10)의 정적응답과 식(11)의 동적응답의 합으로 얻어질 수 있다. 식(10)의 정적응답인 $u_s(x)$, $w_s(x)$, $p_s(x)$ 를 구하는 것은 어렵지 않으므로 본 연구에서는 식(11)에 기초한 동적응답에 대해서만 동강성행렬을 유도하였다.

3. 엄밀한 동강성행렬의 유도

내부 비정상유동을 갖는 파이프계에 대한 동강성행렬을 유도하기 위하여 식(11)의 일반해를 다음과 같이 스펙트럴 형태(spectral form)로 가정한다.

$$\begin{aligned}
 w_d(x,t) &= \sum_{n=1}^N W_{dn}(x) e^{i\omega_n t}, \quad u_d(x,t) = \sum_{n=1}^N U_{dn}(x) e^{i\omega_n t} \\
 p_d(x,t) &= \sum_{n=1}^N P_{dn}(x) e^{i\omega_n t}, \quad c_d(x,t) = \sum_{n=1}^N C_{dn}(x) e^{i\omega_n t}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이고 $\omega_n = 2\pi n/T$ ($n = 1, 2, \dots, N$)는 이산 주파수이고, T 는 주기, N 은 스펙트럴 변위성분의 수이다. $W_{dn}(x)$, $U_{dn}(x)$, $P_{dn}(x)$, $C_{dn}(x)$ 은 각각 동적응답 $w_d(x,t)$, $u_d(x,t)$, $p_d(x,t)$, $c_d(x,t)$ 의 공간에 대한 함수인 스펙트럴 변위성분이다. N 은 스펙트럴 해석에서 합산되는 스펙트럴 변위성분의 총 갯수이다. 스펙트럴 변위성분 $W_{dn}(x)$, $U_{dn}(x)$, $P_{dn}(x)$, $C_{dn}(x)$ 가 계산되면 식(12)에 보인바와 같이 시간영역에서의 진동응답 $w_d(x,t)$, $u_d(x,t)$, $p_d(x,t)$, $c_d(x,t)$ 는

스펙트럴 변위성분에 역고속푸리에 변환(inverse F-FT)알고리즘을 적용하여 효율적으로 계산할 수 있다. 식(12)에서 사용된 합산기호와 아래첨자 n 은 편이상 이후부터는 생략하였다.

식(12)를 식(11)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_d'''' + a_1 W_d'' + a_2 W_d' + i\omega a_3 W_d' - \omega^2 a_4 W_d &= 0 \\ U_d'' - \omega^2 b_1 U_d + b_2 W_d' + b_3 C_d &= 0 \\ P_d' + i\omega c_1 C_d + c_2 C_d + c_3 W_d' - \omega^2 c_1 U_d &= 0 \\ C_d' + i\omega d_1 P_d + i\omega d_2 U_d' &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_w c_0^2 - T_0 + p_s A}{EI_p}, \quad a_3 = \frac{2m_w c_0}{EI_p} \\ a_2 &= -\frac{m_w}{EI_p} \left(\frac{f}{2D} |c_0| c_0 + g_x \right), \quad a_4 = \frac{m}{EI_p} \\ b_1 &= -\frac{m_p}{EA_p}, \quad b_2 = \frac{m_w g_y}{EA_p}, \quad b_3 = \frac{m_w f}{EA_p} |c_0| \\ c_1 &= \frac{m_w}{A}, \quad c_2 = \frac{m_w f}{A} |c_0|, \quad c_3 = \frac{m_w g_y}{A} \\ d_1 &= \frac{A}{m_w a^2}, \quad d_2 = -2\nu \end{aligned} \quad (14)$$

식(13)의 일반해는 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} W_d(x) &= \bar{W}_d e^{ikx}, \quad U_d(x) = \bar{U}_d e^{ikx} \\ P_d(x) &= \bar{P}_d e^{ikx}, \quad C_d(x) = \bar{C}_d e^{ikx} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 k 는 파수이다. 식(15)를 식(13)에 넣으면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ 0 & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_d \\ \bar{U}_d \\ \bar{P}_d \\ \bar{C}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} L_{11} &= k^4 - a_1 k^2 + (ia_2 - \omega a_3)k - \omega^2 a_4 \\ L_{21} &= ikb_2, \quad L_{22} = -k^2 - \omega^2 b_1, \quad L_{24} = b_3 \\ L_{31} &= ikc_3, \quad L_{32} = -\omega^2 c_1, \quad L_{33} = ik, \quad L_{34} = i\omega c_1 + c_2 \\ L_{42} &= -\omega k d_2, \quad L_{43} = i\omega d_1, \quad L_{44} = ik \end{aligned} \quad (17)$$

식(16)이 정상해(non-trivial solution)를 가져야 하는 조건으로부터 다음과 같은 분산관계식을 얻는다.

$$k^8 + r_6 k^6 + r_5 k^5 + r_4 k^4 + r_3 k^3 + r_2 k^2 + r_1 k + r_0 = 0 \quad (18)$$

여기서

$$r_6 = (b_1 - c_1 d_1)\omega^2 + i(c_2 d_1 + b_3 d_2)\omega - a_1 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} r_5 &= i(a_2 - \omega a_3) \\ r_4 &= -b_1 c_1 d_1 \omega^4 + i(b_1 c_2 d_1 - b_3 c_1 d_1)\omega^3 \\ &\quad - (a_4 + a_1 b_1 - a_1 c_1 d_1)\omega^2 - i(a_1 c_2 d_1 + a_1 b_3 d_2)\omega \\ r_3 &= (a_3 c_1 d_1 - a_3 b_1)\omega^3 \\ &\quad + i(a_2 b_1 - a_2 c_1 d_1 - a_3 c_2 d_1 - a_3 b_3 d_2)\omega^2 \\ &\quad - (a_2 c_2 d_1 + a_2 b_3 d_2)\omega \\ r_2 &= (-a_4 b_1 + a_1 b_1 c_1 d_1 + a_4 c_1 d_1)\omega^4 \\ &\quad + i(a_1 b_3 c_1 d_1 - a_4 c_2 d_1 - a_1 b_1 c_2 d_1 - a_4 b_3 d_2)\omega^3 \\ r_1 &= a_3 b_1 c_1 d_1 \omega^5 - i(a_2 b_1 c_1 d_1 - a_3 b_3 c_1 d_1 + a_3 b_1 c_2 d_1)\omega^4 \\ &\quad + (a_2 b_3 c_1 d_1 - a_2 b_1 c_2 d_1)\omega^3 \\ r_0 &= a_4 b_1 c_1 d_1 \omega^6 + i(a_4 b_3 c_1 d_1 - a_4 b_1 c_2 d_1)\omega^5 \end{aligned}$$

식(18)의 8개의 해를 이용해 식(13)의 일반해를 다음과 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} W_d(x) &= \sum_{n=1}^8 \bar{W}_{dn} e^{ik_n x}, \quad U_d(x) = \sum_{n=1}^8 \alpha_n \bar{W}_{dn} e^{ik_n x} \\ \Theta_d(x) &= \sum_{n=1}^8 ik_n \bar{W}_{dn} e^{ik_n x}, \quad P_d(x) = \sum_{n=1}^8 \beta_n \bar{W}_{dn} e^{ik_n x} \\ C_d(x) &= EI_p \sum_{n=1}^8 k_n \gamma_n \bar{W}_{dn} e^{ik_n x} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha_n &= k_n \bar{\alpha}_n \quad (n=1, 2, \dots, 8) \\ \bar{\alpha}_n &= [ib_2 k_n^2 - ib_2 c_1 d_1 \omega^2 + (b_3 c_3 d_1 - b_2 c_2 d_1)\omega] / \\ &\quad [k_n^4 - \{c_1 d_1 \omega^2 - i(c_2 d_1 + b_3 d_2)\omega\} k_n^2 \\ &\quad + b_1 \omega^3 k_n - b_1 c_1 d_1 \omega^4 + i(b_1 c_2 d_1 - b_3 c_1 d_1)\omega^3] \\ \beta_n &= -c_3 - i\omega^2 c_1 \bar{\alpha}_n + (-\omega c_1 + ic_2)EA_p \gamma_n \\ \gamma_n &= \frac{D}{m_w f |c_0|} [\bar{\alpha}_n (k_n^2 + \omega^2 b_1) - ib_2] \end{aligned} \quad (21)$$

이제 Fig. 1에 나타난 길이 l 의 파이프 유한요소를 생각보자. 스펙트럴 절점 변위성분의 자유도는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} W_d(0) &= W_1, \quad W_d(l) = W_2 \\ \Theta_d(0) &= \Theta_1, \quad \Theta_d(l) = \Theta_2 \\ U_d(0) &= U_1, \quad U_d(l) = U_2 \\ P_d(0) &= P_1, \quad P_d(l) = P_2 \end{aligned} \quad (22)$$

식(20)을 식(22)에 대입하면 절점 자유도 벡터 $\{d\}$ 와 상수 벡터 $\{H\}$ 사이의 관계가 주어진다.

$$\{d\} = [D] \{H\} \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{d\} &= \{W_1, \Theta_1, U_1, P_1, W_2, \Theta_2, U_2, P_2\}^T \\ \{H\} &= \{\bar{W}_{d1}, \bar{W}_{d2}, \bar{W}_{d3}, \bar{W}_{d4}, \bar{W}_{d5}, \bar{W}_{d6}, \bar{W}_{d7}, \bar{W}_{d8}\}^T \end{aligned} \quad (24)$$

$$[D]= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & ik_2 & ik_3 & ik_4 & ik_5 & ik_6 & ik_7 & ik_8 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ ik_1e_1 & ik_2e_2 & ik_3e_3 & ik_4e_4 & ik_5e_5 & ik_6e_6 & ik_7e_7 & ik_8e_8 \\ \alpha_1e_1 & \alpha_2e_2 & \alpha_3e_3 & \alpha_4e_4 & \alpha_5e_5 & \alpha_6e_6 & \alpha_7e_7 & \alpha_8e_8 \\ \beta_1e_1 & \beta_2e_2 & \beta_3e_3 & \beta_4e_4 & \beta_5e_5 & \beta_6e_6 & \beta_7e_7 & \beta_8e_8 \end{bmatrix}$$

위에서 다음의 정의가 사용되었다.

$$e_n = e^{ik_n l} \quad (n=1, 2, \dots, 8) \quad (25)$$

힘과 변위의 스펙트럴 성분 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T(x) &= EA_p U'_d(x), & V(x) &= -EI_p W_d'''(x) \\ M(x) &= EI_p W_d''(x), & Q(x) &= AC_d(x) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $Q(x)$ 는 유체유량의 스펙트럴 성분을 나타낸다. 파이프 요소의 두 절점에서의 장력, 횡방향 전단력, 굽힘모멘트, 유체의 유량에 대한 스펙트럴 성분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} T_1 &= -T(0), & T_2 &= T(l) \\ V_1 &= -V(0), & V_2 &= V(l) \\ M_1 &= -M(0), & M_2 &= M(l) \\ Q_1 &= Q(0), & Q_2 &= Q(l) \end{aligned} \quad (27)$$

식(20)를 식(27)에 대입하면 절점력의 스펙트럴 성분 벡터 $\{f\}$ 와 상수벡터 $\{H\}$ 사이의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{f\} = EI_p [F] \{H\} \quad (28)$$

여기서

$$\{f\} = \{ T_1 \ M_1 \ V_1 \ Q_1 \ T_2 \ M_2 \ V_2 \ Q_2 \}^T \quad (29)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} -q_{11} & -q_{12} & -q_{13} & -q_{14} & -q_{15} & -q_{16} & -q_{17} & -q_{18} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} & q_{28} \\ -q_{31} & -q_{32} & -q_{33} & -q_{34} & -q_{35} & -q_{36} & -q_{37} & -q_{38} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} & q_{46} & q_{47} & q_{48} \\ q_{11}e_1 & q_{12}e_2 & q_{13}e_3 & q_{14}e_4 & q_{15}e_5 & q_{16}e_6 & q_{17}e_7 & q_{18}e_8 \\ -q_{21}e_1 & -q_{22}e_2 & -q_{23}e_3 & -q_{24}e_4 & -q_{25}e_5 & -q_{26}e_6 & -q_{27}e_7 & -q_{28}e_8 \\ q_{31}e_1 & q_{32}e_2 & q_{33}e_3 & q_{34}e_4 & q_{35}e_5 & q_{36}e_6 & q_{37}e_7 & q_{38}e_8 \\ q_{41}e_1 & q_{42}e_2 & q_{43}e_3 & q_{44}e_4 & q_{45}e_5 & q_{46}e_6 & q_{47}e_7 & q_{48}e_8 \end{bmatrix}$$

위에서 다음의 정의가 사용되었다.

$$\begin{aligned} q_{1n} &= ik_n^3, & q_{2n} &= k_n^2, & q_{3n} &= ik_n \alpha_n A_p / I_p \\ q_{4n} &= k_n \gamma_n A A_p / I_p & (n=1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (30)$$

식(23)과 식(28)에서 상수벡터 $\{H\}$ 를 제거하면 스펙

트럴 성분의 절점력과 절점의 자유도 벡터사이의 관계가 다음의 형태로 주어진다.

$$\{f\} = [S(\omega)] \{d\} \quad (31)$$

여기서

$$[S(\omega)] = EI_p [F] [D]^{-1} \quad (32)$$

행렬 $[S(\omega)]$ 는 스펙트럴요소행렬이고 주파수의 함수이다. SEM에 기초한 스펙트럴요소행렬의 중요한 장점은 앞서 언급했듯이 단 한 개의 유한요소만으로도 균일한 파이프의 길이에 상관없이 내부 비정상유동을 갖는 균일한 파이프의 정확한 동특성을 충분히 얻을 수 있다. 그러나 파이프가 기하학적으로나 물성에 있어 균일하지 않다면 파이프를 몇몇 유한 요소로 나누는 것이 필요하다. 이런 경우 스펙트럴요소행렬을 FEM에서 쓰인 결합방법으로 결합할 수 있다. 주요한 차이점은 Do-loop 방식으로 모든 주파수 성분에 대한 계산을 반복하는 점이다. 따라서 식(12)에 보인 스펙트럴해석에서 N개의 스펙트럴 성분을 고려한 경우 N개의 준정적 문제를 다루는 것으로 생각할 수 있다.

스펙트럴요소식(32)를 결합하고 경계조건을 적용하면 주파수 영역에서 전체 계의 동역학 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{f_g(\omega)\} = [S(\omega)] \{d_g(\omega)\} \quad (33)$$

여기서 $\{f_g\}$ 와 $\{d_g\}$ 각각 전체 시스템에 대한 절점력벡터와 절점자유도 벡터이고 $[S(\omega)]$ 는 전체 시스템에 대한 스펙트럴행렬이다. 전체 시스템에 대한 고유진동수는 $[S(\omega)]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 되는 다음과 같은 조건으로부터 구할 수 있다.

$$|S(\omega)| = 0 \quad (34)$$

4. 수치해석결과

수치해석 예제로서 생각한 파이프는 내부에 유체가 흐르는 양단이 단순지지된 균일한 파이프로서 지표면과 평행을 이루고 있다. ($\theta = 0^\circ$) 파이프의 길이는 6000mm, 내경은 32.12mm, 두께는 1.4mm, 탄성계수는 117GPa이다. 파이프와 유체의 단위 길이당 질량은 각각 $m_p=0.0515\text{kg/m}$ 와 $m_w=1.318\text{kg/m}$ 이다. Darch-Weisbach 마찰 계수는 $f=0.0016$ 이다.

강제진동응답을 얻기 위해 10N의 충격력을 0.001초 동안 파이프의 중심에 가했다. 따라서 예제의 파이프를 충격력 중심으로써 좌우의 두 개의 유한요소로 나누어 스펙트럴요소해석을 수행하였다. 수치해석결과로서 유속 c_o 가 3m/s, 축방향장력 T_o 가 10N일 때 횡방향의 진동 변위와 주파수응답수를 Fig. 2(a)와 Fig. 2(b)에 각각 나타냈다.

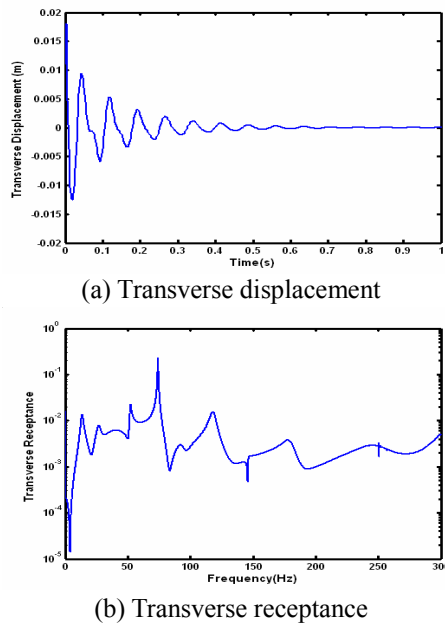


Fig. 2 Transverse displacement and receptance at the middle of the pipeline

5. 결론

본 연구에서는 내부 비정상유동을 갖는 파이프계의 동강성모델을 유도했다. 파이프의 축방향과 횡방향의 진동, 그리고 내부 유체의 압력과 속도의 과도응답 사이의 연관성을 고려하여 동강성모델을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 동강성모델의 정확성은 수치해석 예제에 대한 동강성모델의 고유진동수와 동적응답을 FEM에 의한 것과 비교함으로써 확인할 수 있다. 마지막으로 수치해석 예제에서 스펙트럴요소해석을 통해 내부 비정상유동이 파이프진동 특성에 미치는 영향을 살펴볼 수 있다.

후 기

이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Païdoussis, M. P. and Li, G. X., 1993, "Pipes Conveying Fluid: A Model Dynamical Problem," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, pp. 137-204.
- (2) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 72, pp. 229-232.
- (3) Housner, G.W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 205-209.
- (4) Nemat-Nasser, S., Prasad, S. N. and Hermann, G., 1966, "Destabilizing Effect of Velocity-Dependent

- Forces in Nonconservative Continuous Systems," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, pp. 1276-1280.
- (5) Païdoussis, M. P., Luu, T.R. and Laither, B. E., 1986, "Dynamics of Finite-Length Tabular Beams Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 106, No. 2, pp. 311-331.
- (6) Lesmez, M. W., Wiggert, D. C. and Hatfield, F. J., 1990, "Modal Analysis of Vibrations in Liquid-Filled Piping Systems," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 109, No. 2, pp. 311-331.
- (7) Lin, Y. H. and Tsai, Y. K., 1997, "Nonlinear Vibrations of Timoshenko Pipes Conveying Fluid," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 23, pp. 2945-2956.
- (8) Jensen, J. S., 1997, "Fluid Transport Due to Nonlinear Fluid-Structure Interaction," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 11, pp. 327-344.
- (9) Zhang YL, Gorman DG, Reese JM, 1999, "Analysis of the vibration of pipes conveying fluid," *Journal of Mechanical Engineering Science*, 213:849-860.
- (10) Lee, U. and Kim, J., 1999, "Dynamics of Branched Pipeline Systems Conveying Internal Unsteady Flow," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, pp. 114-122.
- (11) Gorman, D. G., Reese, J. M. and Zhang, Y. L., 2000, "Vibration of a Flexible Pipe Conveying Viscous Pulsating Fluid Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2, pp. 379-392.
- (12) Koo, G. H. and Park, Y. S., 1998, "Vibration Reduction by Using Periodic Supports in a Piping Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, No. 1, pp. 53-68.
- (13) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd ed, New York, Springer-Verlag.
- (14) Lee, U., Kim, J. and Leung, A. Y. T., 2000, "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, pp. 451-465.
- (15) Lee, U. and Oh, H., 2003, "The Spectral Element Model for Pipelines Conveying Internal Steady Flow," *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 1045-1055.
- (16) Wjlie, E. B. and Victor, L. S., 1993, *Fluid Transients in Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
- (17) Hansen, A. G., 1967, *Fluid Mechanics*, New York, John Wiley & Sons.