다물체 동역학 시스템을 위한 독립 좌표에 의한 부분 시스템 합성 방법

송금정†· 김성수*

Subsystem Synthesis Methods with Independent Coordinates for Multi-body Dynamics Systems

Kum-jung Song , Sung-Soo Kim

Key Words : Real-time Vehicle Dynamics(실시간 차량 동역학), Subsystem Synthesis Method(부분 합성법), Relative Cartesian Coordinates(상대 직교 좌표), Relative Joint Coordinates(상대 조인트 좌표), Independent Coordinates(독립 좌표)

Abstract

Two different subsystem synthesis methods with independent generalized coordinates have been developed and compared. In each formulation, the subsystem equations of motion are generated in terms of independent generalized coordinates. The first formulation is based on the relative Cartesian coordinates with respect to moving subsystem base (virtual) body. The second formulation is based on the relative joint coordinates using recursive formulation. Computational efficiency of the formulations has been compared theoretically by the operational counting method.

1. 서 론

동일한 구조의 부분 시스템으로 구성된 다물체 시스템의 효과적인 해석을 위해서 부분 시스템 합성법이 제안되었다.(1,2) 이 방법은 전체 시스템에 대한 운동방정식을 형성하는 대신 부분 시스템 별로 작은 크기의 운동 방정식을 분리하여 생성하므로 효율성을 갖는다. 부분 시스템 별로 효과적인 운동 방정식의 생성을 위하여 순환공식의 조인트 좌표계가 사용되었다. 또한, 이 방법은 차량 시스템과 같이 동일한 독립 현가 부분 시스템으로 이루어진 시스템에 효과적으로 적용되었다.(3)

다물체 공식에는 크게 두 가지의 다른 좌표계가 사용되는데, 하나는 직교(Cartesian) 좌표계이고 다른 하나는 상대 조인트(relative joint) 좌표계이다. 직교 좌표 공식에서는 각 물체의 운동을 기술하기 위해서 직교 좌표를 각 물체에 대해 설정하므로 큰 규모의 미분 대수 방정식이 생성된다. 이 공식은 큰 규모의 운동방정식을 풀어야 하는 단점을 가진 반면, 공식의 유도가 단순하고 체계적인 장점을 가지고 있다. 반면에 상대 조인트 좌표 공식에서는 작은 규모의 운동방정식이 생성되므로 효율적이지만 절단 조인트 선정 등의 시스템의 위상해석과 계산의 순서들이 결정되어야 하는 전처리 과정이 필요하고 또한 일반화가 용이하지 않다.

본 논문에서는 독립좌표에 의한 효율적인 부분 시스템 합성 공식을 제안한다. 체계적으로 독립좌표에 의한 운동방정식을 생성하기 위해 두 단계의 과정을 거친다. 첫 단계에서는 선정된 좌표계에 대한 부분 시스템 방정식을 생성하고, 두 번째 단계에서는 부분 시스템의 구속면(constraint manifold)에 접평면을 따라 움직이는 독립 좌표를 선택하여 운동방정식을 변환 시키는 방법을 제안한다.

† 충남대학교 대학원 메카트로닉스공학과
* 책임저자, 정회원, 충남대학교 메카트로닉스공학과
E-mail : sookim@cnu.ac.kr
TEL : (042)821-6782 FAX : (042)823-4919

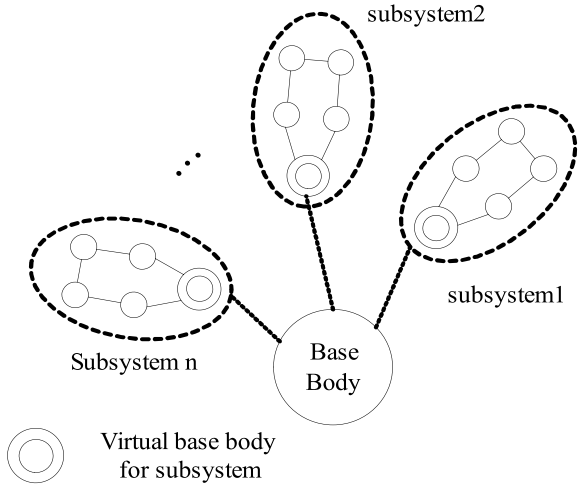

Fig. 1 Subsystem topology

또한 앞서 기술한 직교 좌표계와 상대 조인트 좌표계의 두 가지 좌표 시스템의 장단점이 부분 시스템 합성법에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 두 가지 공식의 독립 좌표에 의한 부분 시스템 합성법을 비교하였다. 즉, 첫 번째 공식은 먼저 직교 좌표계에 의해 부분 시스템 운동방정식을 생성한 후 독립 좌표에 의한 운동 방정식으로 변환하는 방법이며, 두 번째 방식은 과정은 동일하되 상대 조인트 좌표를 사용하는 방법이다. 두 공식의 효율성 비교를 위해서는 대수 연산자(arithmetic operator) 소요 개수를 비교하였다.

2. 부분 합성법

Fig. 1 은 동일한 n 개의 부분 시스템으로 구성된 개념적인 다물체 시스템을 나타내고 있다. 부분 시스템 합성법은 먼저 각 부분 시스템에서의 효과 관성 행렬과 힘 벡터를 계산한다.[1] 실제로, 효과 관성과 힘은 부분 시스템과 기준 물체(base body) 사이에서 발생하는 동역학적 연성 (coupling) 효과를 나타낸다. 각 부분 시스템으로부터 계산된 효과 관성 행렬과 힘 벡터를 통해 기준 물체의 가속도를 풀기 위해 다음의 6×6 행렬 형식의 기준 물체에 대한 운동 방정식이 얻어진다.

$$(\hat{\mathbf{M}}_0 + \sum_i^n \breve{\mathbf{M}}_i)\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 = (\hat{\mathbf{Q}}_0 + \sum_i^n \breve{\mathbf{P}}_i) \qquad (1)$$

여기서, $\breve{\mathbf{M}}_i$ 와 $\breve{\mathbf{P}}_i$ (i=1~4)는 각 부분 시스템의 효과 관성 행렬과 효과 힘 벡터이고, $\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0$ 은 기준 물체의 가속도, $\hat{\mathbf{M}}_0$ 과 $\hat{\mathbf{Q}}_0$ 은 각각 기준 물체의 관성 행렬과 일반 힘 벡터이다. 기준 물체의 가속도를 풀어낸 후, 다음과 같은 부분 시스템 운동 방정식을 통해 각 부분 시스템의 가속도를 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{qq} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}}^T \\ \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{yq}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 \qquad (2)$$

$\ddot{\mathbf{q}}$ 은 각 부분 시스템의 일반 좌표로부터 나타낸 가속도 벡터들이고, $\mathbf{M}_{qq}$, $\mathbf{M}_{yq}^T$ 와 $\mathbf{P}_q$ 는 은 각각 부분 시스템 관성 행렬과 힘 벡터를 나타낸다. $\mathbf{\Phi}_{\bar{q}}$ 는 각 부분 시스템의 구속 자코비안 행렬이고, $\boldsymbol{\lambda}$ 는 라그랑지 승수, 그리고 $\boldsymbol{\gamma}$ 는 구속 가속도 방정식의 RHS(right hand side)이다.

부분 시스템 합성법은 효율성 뿐만 아니라, 부분 시스템 별로 운동방정식을 형성하므로 효과 관성 행렬과 힘 벡터들이 생성되는 한, 부분 시스템 모듈 별로 서로 다른 다물체 동역학 공식들을 적용할 수 있다. 또한, 프로그램 구현의 측면에서는 모듈의 교환 등이 용이한 장점을 가지고 있다.

3. 상대 직교 좌표 공식

3.1 상대 직교 좌표의 기구학

부분 시스템의 운동방정식을 개별적으로 유도하기 위해서, 부분 시스템의 각 물체의 운동은 Fig. 1 에 있는 가상적인 기준 물체에 대해 상대적으로 표현되어져야 한다. Fig. 2 는 가상 기준 물체에 대한 부분 시스템 내의 각 물체의 운동을 기술하기 위한 상대 직교 좌표계를 정의하고 있다.

X-Y-Z 좌표는 직교 기준 좌표를 나타내고,

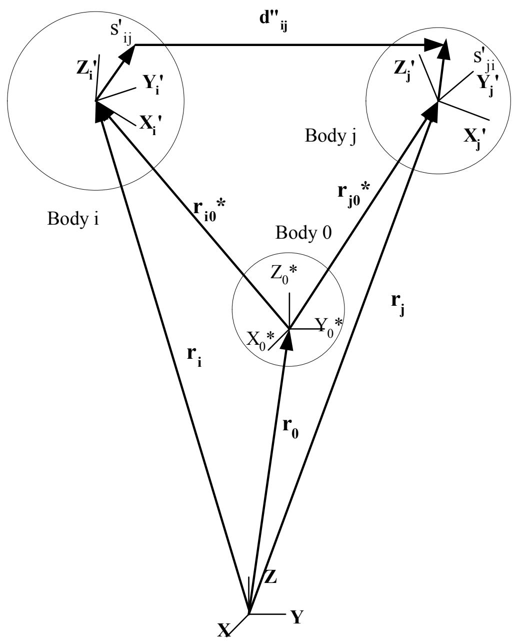

Fig. 2 Relative Cartesian coordinate kinematics

x'-y'-z' 좌표는 물체 고정 기준 좌표를, 그리고 x_0^*-y_0^*-z_0^* 좌표는 관성 기준 좌표에 대한 가상 기준 물체 0 의 물체 고정 기준 좌표를 나타낸다. 관성 기준 좌표에 대한 물체 i 기준 좌표의 자세 행렬 $\mathbf{A}_i$는 다음의 좌표 변환에 의해 나타내어진다.

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_o \mathbf{A}_{io} \tag{3}$$

여기서, $\mathbf{A}_o$ 는 가상 기준 물체 0 의 자세행렬, $\mathbf{A}_{i0}$ 는 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대적인 자세를 나타낸다. 또한, 물체 i 의 위치 벡터 $\mathbf{r}_i$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{r}_{i0}^* \tag{4}$$

여기서, $\mathbf{r}_0$ 는 가상 기준 물체 0 의 위치 벡터이고, $\mathbf{r}_{i0}^*$ 는 x_0^*-y_0^*-z_0^* 좌표에서 표현된 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대적 위치 벡터이다.

물체 i 의 각속도는 가상 기준 물체 0 의 각속도와 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대 각속도에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\omega}_i' = \mathbf{A}_{i0}^T \boldsymbol{\omega}_0^* + \boldsymbol{\omega}_{i0}' \tag{5}$$

여기서, $\boldsymbol{\omega}_i'$ 은 물체 i 의 기준 좌표에서 표현된 물체 i 의 각속도, $\boldsymbol{\omega}_0^*$ 은 물체 0 의 기준 좌표에서 표현된 물체 0 의 각속도, 그리고 $\boldsymbol{\omega}_{i0}'$ 은 물체 i 기준 좌표에서 표현된 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대각속도이다. 물체 i 의 속도 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 는 식(4)를 시간에 대해 미분함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{A}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^* \mathbf{r}_{i0}^* + \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{r}}_{i0}^* \tag{6}$$

여기서, $\dot{\mathbf{r}}_0$ 은 가상 기준 물체 0 의 속도 벡터, $\dot{\mathbf{r}}_{i0}^*$ 은 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대 직교 속도 벡터이다. 식 (5) 와 (6)을 복합 속도 벡터 $\mathbf{y}_i = [\dot{\mathbf{r}}_i^T, \boldsymbol{\omega}_i^T]^T$, $\mathbf{y}_{i0} = [\dot{\mathbf{r}}_{i0}^{*^T}, \boldsymbol{\omega}_{i0}'^T]^T$, $\mathbf{y}_0 = [\dot{\mathbf{r}}_0^T, \boldsymbol{\omega}_0^{*^T}]^T$ 로 나타내면 다음의 복합 속도 관계식이 얻어진다.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{E}_{i0}\mathbf{y}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{y}_{i0} \tag{7}$$

여기서, $\mathbf{E}_{i0} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{r}}_{i0}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i0}^T \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ 이다.

물체 i 와 가상 물체 0 사이의 가속도 관계는 식 (7)을 시간에 대해 미분함으로써 얻어진다.

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{E}_{i0}\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{G}_0 \dot{\mathbf{y}}_{i0} + \mathbf{h}_{i0} \tag{8}$$

여기서, $\mathbf{h}_{i0}$ 는 속도 연성항(velocity coupling term)이다.

3.2 상대 직교 좌표계 공식을 이용한 부분 시스템 운동 방정식

부분 시스템 운동방정식은 부분 시스템을 구성하는 물체들의 가상 일의 합으로 나타낼 수 있다. [3]

$$\delta \mathbf{z}^T \left\{ \bar{\mathbf{M}} \ \dot{\bar{\mathbf{y}}} \ - \bar{\mathbf{g}} \ \right\} = 0 \tag{9}$$

여기서, $\delta \bar{\mathbf{z}}$ 는 부분 시스템 내의 모든 물체의 병진과 회전 벡터의 합성된 가상 변위 벡터이고, $\bar{\mathbf{M}}$ 는 시불변 블록 대각 관성 행렬, $\bar{\mathbf{g}}$ 는 부분 시스템의 일반화된 힘 벡터이다.

부분 시스템 내의 물체들의 가상 변위와 가상 기준 물체 0 사이의 가상 변위 벡터, 가상 기준 물체 0 에 대한 물체들의 상대적인 가상 변위 벡터의 관계식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\delta \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{E}}_{i0} \delta \mathbf{z}_0 + \bar{\mathbf{G}}_0 \delta \bar{\mathbf{z}}_{io} \tag{10}$$

또한, 부분 시스템 내의 물체들의 가속도와 가상 기준 물체와 구성 물체와의 상대적인 가속도 관계는 다음과 같은 합성 가속도 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{E}}_{i0}\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{G}_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} + \bar{\mathbf{h}}_{i0} \tag{11}$$

식(9)을 상대 직교 좌표 공간에서 표현되는 운동방정식으로 변환하기 위해서, 식(10)과 식(11)을 식(9)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\delta \mathbf{z}_0^T \left\{ \bar{\mathbf{M}}_{EE} \dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{EG} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_E \right\}$$
$$+ \delta \bar{\mathbf{z}}_{i0}^T \left\{ \bar{\mathbf{M}}_{EG}^T \dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{GG} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_G \right\} = 0 \tag{12}$$

부분 시스템의 물체들은 조인트로 연결되어 있으므로 다음과 같은 구속 조건식을 만족해야 한다.

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{r}_{10}^* \mathbf{A}_{10}, \cdots, \mathbf{r}_{nb0}^* \mathbf{A}_{nb0}) = \mathbf{0} \tag{13}$$

또한 식(12)의 운동 방정식을 독립 좌표에 의한 운동 방정식으로 나타내기 위하여, 부분 시스템 내의 자유도 개수 만큼의 직교 좌표와는 다른 새로운 독립 좌표 벡터 $\boldsymbol{\theta}$ 를 선택한다. 이 독립 좌표와 부분 시스템의 직교 좌표

사이의 관계는 아래의 식(14)의 자유도 개수 만큼의 구속 조건식 $\boldsymbol{\Gamma}$ 로 나타낼 수 있으며, 따라서, 부분 시스템 내의 구속 조건식은 식(14)와 같게 된다.

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{r}_{10}\mathbf{A}_{10},\cdots,\mathbf{r}_{nb0}\mathbf{A}_{nb0}) \\ \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}_{10}\mathbf{A}_{10},\cdots,\mathbf{r}_{nb0}\mathbf{A}_{nb0},\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (14)$$

상대 직교 좌표에서의 가상 변위 벡터는 다음과 같이 독립 좌표계의 변분의 형태로 나타내어 질 수 있다.

$$\delta\bar{\mathbf{z}}_{i0} = -\boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}\delta\boldsymbol{\theta} \equiv \mathbf{N}\delta\boldsymbol{\theta} \qquad (15)$$

마찬가지로, 상대 직교 좌표에서의 가속도는 다음과 같이 식(14)를 두 번 미분하고 정리하여 독립 좌표의 가속도 형태로 나타내어진다.

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} = -\boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \mathbf{N}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{p} \qquad (16)$$

식(15)와 (16)를 식(12)에 대입하면

$$\delta\mathbf{z}_0^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EE}\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{EG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_E\right\}$$

$$+\delta\boldsymbol{\theta}^T\left\{\mathbf{M}_{E\theta}^T\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{M}_{\theta\theta}\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}_\theta\right\} = 0 \qquad (17)$$

여기서, $\mathbf{M}_{E\theta} = \bar{\mathbf{M}}_{EG}\mathbf{N}$, $\mathbf{M}_{\theta\theta} = \mathbf{N}^T\bar{\mathbf{M}}_{GG}\mathbf{N}$, $\hat{\mathbf{g}}_E = \bar{\mathbf{g}}_E - \bar{\mathbf{M}}_{EG}\mathbf{p}$, $\mathbf{g}_\theta = \mathbf{N}^T(\bar{\mathbf{g}}_G - \bar{\mathbf{M}}_{GG}\mathbf{p})$ 이다. 독립 좌표의 변분들은 임의로 선택할 수 있으므로 관련 계수항이 0 이 되어, 부분 시스템 운동 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}(\mathbf{g}_\theta - \mathbf{M}_{E\theta}^T\dot{\mathbf{y}}_0) \qquad (18)$$

2 장에서 언급한 효과 관성 행렬과 힘 벡터들은 식(18)을 식(17)에 대입하여 다음과 같이 얻게 된다.

$$\breve{\mathbf{M}}^c = \bar{\mathbf{M}}_{EE} - \mathbf{M}_{E\theta}\mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}\mathbf{M}_{E\theta}^T \qquad (19)$$

$$\breve{\mathbf{g}}^c = \hat{\mathbf{g}}_E - \mathbf{M}_{E\theta}\mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}\mathbf{g}_\theta \qquad (20)$$

일단, 독립 좌표의 가속도가 얻어지면, 부분 시스템에서의 상대 직교 좌표는 식(16)을 사용함으로써 계산할 수 있다.

4. 상대 조인트 좌표계 공식

4.1 상대 조인트 좌표계의 기구학

부분 시스템에 상대 조인트 좌표계의 기구적 정의를 위한 좌표계는 Fig. 3 에 보이는 바와 같다.

관성 기준 좌표에 대한 물체 j 의 기준 좌표 자세는 다음의 방향 코사인 행렬에 의해 표현될

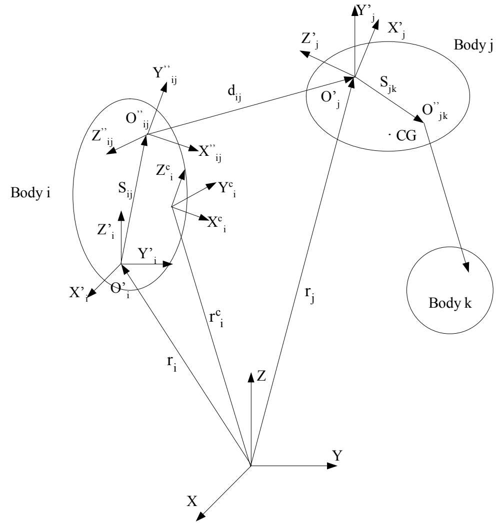

Fig. 3 Relative joint coordinate kinematics

수 있다.

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i\mathbf{C}_{ij}\mathbf{A}_{ij}^{''} \qquad (21)$$

여기서, $\mathbf{A}_i$ 와 $\mathbf{A}_j$ 는 각각 물체 i 와 j 의 자세 행렬이며, $\mathbf{C}_{ij}$ 는 $x_{ij}^{''}-y_{ij}^{''}-z_{ij}^{''}$ 좌표로부터 $x_i^{'}-y_i^{'}-z_i^{'}$ 좌표로의 직교 변환 행렬(orthogonal transformation matrix)이다. $\mathbf{A}_{ij}^{''}$ 는 $x_j^{'}-y_j^{'}-z_j^{'}$ 좌표로부터 $x_{ij}^{''}-y_{ij}^{''}-z_{ij}^{''}$ 좌표로의 직교 변환 행렬(orthogonal transformation matrix)이다. 물체 j 의 위치벡터 $\mathbf{r}_j$ 는 다음과 같이 쓰여진다;

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{s}_{ij}^{'} + \mathbf{A}_i\mathbf{C}_{ij}\mathbf{d}_{ij}^{''}(\mathbf{q}_j) \quad (22)$$

여기서, $\mathbf{r}_j$ 는 물체 j 의 위치 벡터, $\mathbf{s}_{ij}$ 는 물체 i 기준 좌표 $\mathbf{O}_i'$ 의 원점에서 조인트 기준 좌표 $\mathbf{O}_{ij}^{''}$ 의 원점까지의 벡터이고, 위치 벡터 $\mathbf{d}_{ij}$ 는 조인트 기준 좌표 $\mathbf{O}_{ij}^{''}$ 의 원점으로부터 물체 j 기준 좌표 $\mathbf{O}_j'$ 의 원점까지의 벡터이다. $\mathbf{d}_{ij}$ 는 상대 조인트 좌표 $\mathbf{q}_j$ 의 함수이다.

상태 벡터 형식을 사용함으로써 두 물체 사이의 속도 관계식을 다음과 같이 간략하게 얻을 수 있다.[5]

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \hat{\mathbf{Y}}_i + \mathbf{B}_j\dot{\mathbf{q}}_j \qquad (23)$$

여기서, $\hat{\mathbf{Y}}_j$ 와 $\hat{\mathbf{Y}}_i$ 는 각각 물체 i 와 j 의 상태 벡터이고, $\mathbf{B}_j$ 는 조인트 공간으로부터 상태 벡터 공간으로의 속도 변환 행렬이다.

두 물체 사이의 가속도 관계식은 식(23)을 미분함으로써 다음과 같이 얻는다.

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_j = \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i + \mathbf{B}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \dot{\mathbf{B}}_j \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i + \mathbf{B}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{D}_j \quad (24)$$

4.2 상대 조인트 좌표 공식을 이용한 부분 시스템 운동 방정식

직교 좌표 공식에서와는 달리, 상대 조인트 좌표 공식에서는, 부분 시스템에 대해 단지 절단 조인트의 구속조건들만이 고려된다. 만약 가상의 절단이 물체 n과 n'사이에서 이루어졌다면, 절단 조인트 구속 방정식은 다음과 같이 물체 n과 n'의 위치와 자세의 함수로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{r}_n,\ \ \mathbf{A}_n,\ \ \mathbf{r}_{n'}\ \ \mathbf{A}_{n'}\right) = \mathbf{0} \quad (25)$$

라그랑지 승수법을 사용함으로써[4], 다음과 같이 부분 시스템에 대한 가상일의 운동 방정식 (Variational Equaton of motion) 이 얻어진다.

$$\delta\hat{\mathbf{Z}}_0^T(\hat{\mathbf{M}}_0\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 - \hat{\mathbf{Q}}_0) + \sum_{i=1}^{n}\delta\hat{\mathbf{Z}}_i^T(\hat{\mathbf{M}}_i\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i) + \delta\hat{\mathbf{Z}}_n^T\mathbf{\Phi}_{\hat{\mathbf{Z}}_n}^T\boldsymbol{\lambda}$$
$$+\sum_{i=1'}^{n'}\delta\hat{\mathbf{Z}}_i^T(\hat{\mathbf{M}}_i\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i) + \delta\hat{\mathbf{Z}}_{n'}^T\mathbf{\Phi}_{\hat{\mathbf{Z}}_{n'}}^T\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (26)$$

여기서, $\delta\hat{\mathbf{Z}}_i$는 상태 벡터에 대해 기구적으로 허용 가능한(kinematically admissible) 가상 변위이고, $\hat{\mathbf{M}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{Q}}_i$는 각각 상태 질량 행렬과 상태 힘 벡터이다.

앞 절의 기구학적인 순환 공식을 적용하면 상대 조인트 좌표와 기준 물체 좌표에 대한 부분 시스템 운동 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{yy} & \bar{\mathbf{M}}_{yq} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_{yq}^T & \bar{\mathbf{M}}_{qq} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_y \\ \bar{\mathbf{P}}_q \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (27)$$

기준 물체를 제외한 부분 시스템 운동 방정식은 첫 번째와 두 번째 식에 의해, 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{qq} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}}^T \\ \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{q}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_q \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{yq}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 \quad (28)$$

식(28)은 공간에서 일반 좌표 분할법 (generalized coordinate partitioning method)에 의해 상미분방정식(ODE)의 형태로 변환이 가능하다. 그리고, 독립 일반 좌표 $\mathbf{v}$는 암시적 함수 이론(implicit function theorem)에 의해 부분 시스템의 상대 조인트 좌표 $\mathbf{q}$ 내에서 선택될 수 있다.[4] 일반 좌표 분할법에 의한 독립 좌표 $\mathbf{v}$의 함수로 나타내어진 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_q^* - \mathbf{Q}_y^*\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_0 \quad (29)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}_u^{-1}\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v\ddot{\mathbf{v}} \quad (30)$$

여기서, $\mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{M}}_{vv} - 2\bar{\mathbf{M}}_{vu}(\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}}) + (\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}})^T\bar{\mathbf{M}}_{uu}(\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}})$

$\mathbf{Q}_q^* = \bar{\mathbf{P}}_v - \bar{\mathbf{M}}_{vu}(\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\gamma}}) - (\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}})^T\bar{\mathbf{P}}_u + (\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}})^T\bar{\mathbf{M}}_{uu}(\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\gamma}})$

$\mathbf{Q}_y^* = (\bar{\mathbf{M}}_{yq_u} - \bar{\mathbf{M}}_{yq_v}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{v}}})^T$ 이다.

2 장에서 기술된 효과 질량 행렬과 힘 벡터는 식(29)과 (30)를 식(27)의 첫 번째 식에 대입함으로써 얻을 수 있다.

$$\breve{\mathbf{M}}^c = \bar{\mathbf{M}}_{yy} - \mathbf{Q}_y^{*T}(\mathbf{M}^*)^{-1}\mathbf{Q}_y^* \quad (31)$$

$$\breve{\mathbf{P}}^c = \bar{\mathbf{P}}_y - \bar{\mathbf{M}}_{yq_u}(\mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\gamma}}) - \mathbf{Q}_y^{*T}(\mathbf{M}^*)^{-1}\mathbf{Q}_q^* \quad (32)$$

종속 좌표에 대한 가속도 $\ddot{\mathbf{u}}$는 식(29)를 통해 독립 좌표에 대한 가속도 $\ddot{\mathbf{v}}$를 풀어낸 후 식(30)을 이용하여 계산할 수 있다.

5. SLA 현가 장치 부분 시스템의 1/4 차량 모델

앞 장에서 기술한 두 가지 공식의 효율성을 검증하기 위해 독립 좌표에 의한 부분 시스템 합성 방법을 Fig. 4 의 SLA(Short and Long Arm) 현가 장치로 구성된 1/4 차량 모델에 적용하였다.

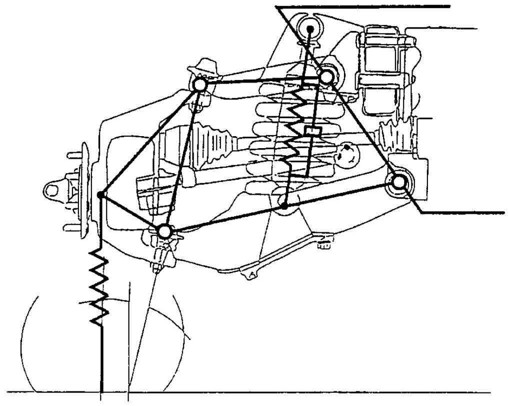

Fig. 4 SLA suspension subsystem

SLA 현가장치 부분 시스템은 LCA(Lower Control Arm), UCA(Upper Control Arm), 너클(knuckle), 그리고 타이 로드(tie rod)로 구성된다. LCA 와 UCA 는 회전 조인트를 통해 차체에 연결되어 있다. 회전 조인트는 LCA 와 Knuckle, 그리고 UCA 와 knuckle 사이를 연결하고, 타이 로드는 너클(knuckle)과 차체를 연결한다. 타이로드의 질량과 관성 모멘트가 다른 요소들에 비해 상대적으로 작으므로 무질량 링크로 모델링 하였다.

Table 1 은 두 가지 공식의 SLA 현가 장치 부분 시스템 해석에 대한 산술적 연산 횟수를 비교한 표이다. 여기서, M·D 는 곱셈, 나눗셈 연산 횟수를 나타내고, A·S 는 덧셈과 뺄셈 연산 횟수를 나타낸다. 곱셈에 걸리는 시간이 덧셈 연산에 걸리는 시간과 같다면, 두 공식의 효율성은 M·D 와 A·S 의 연산 횟수의 합을 통하여 비교할 수 있다. 조인트 좌표에서의 독립 좌표를 사용하는 것이 상대 직교 좌표에서 독립 좌표를 사용하는 공식보다 이론적으로 1.55 배 빠른 것을 알 수 있다.

6. 결론

독립 좌표에 의한 부분 시스템 합성법의 두 개의 서로 다른 공식이 비교 연구되었다. 각 공식의 효율성 검증을 위해, 두 공식이 각각 소요하는 산술 연산 횟수를 비교함으로써 1/4 차량 모델에 대한 해석 성능을 분석하였다. 두 공식의 해석 성능 분석 결과, 상대 조인트 좌표에 대한 독립 좌표 공식이 더 효율적인 것임을 알 수 있었다. 추후 수행과제로써 전 차량 모델에 대한 실제 코드를 생성하고 CPU 시간을 측정할 것이다.

Table 1 Theoretical comparison of two formulations

Computations	Formulations			
	Independent Generalized			
	with Relative Cartesian		with Relative Joint	
	M·D	A·S	M·D	A·S
Position	401	302	764	727
Velocity	414	302	290	220
RHS	245	196	127	194
Mass/Force	3,594	3,241	1,290	1,139
Effective mass/ force	25	24	177	160
Acceleration	49	42	311	292
Subtotal	4,728	4,107	2,959	2,732
Total	8,835		5,691	
Ratio	1.55		1	

참고문헌

(1) Sung-Soo Kim, 1999, “A Study on Subsystem Synthesis Method for Vehicle System Dynamics”, *KSME,* Vol. 23.No.3, pp. 250-534.

(2) Sung-Soo Kim, 2002, “A subsystem synthesis method for efficient vehicle multibody dynamics”, *Multibody System Dynamics*, 7(2), pp.189-207.

(3) Young-Seok Oh, Sung-Soo Kim, 2001,"A real-time multibody vehicle dynamics model using a subsystem synthesis method", *Proceedings of 2001 ASME. Design Engineering Technical Conference*, September 9-12.

(4) E.J. Haug, 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

(5) F.F. Tsai, and E.J. Haug, 1989, *Automated methods for high speed simulation of multibody dynamic systems, Technical Report R-47*, Center for Computer Aided Design, The University of Iowa.