모드좌표와 절대절점좌표를 혼용한 동역학 해석기법에 관한 연구

손정현[+] · 유완석[*]

Study on the Dynamic Analysis Method using the Modal Coordinates and the Absolute Nodal Coordinates

Jeong Hyun Sohn, Wan Suk Yoo

Key Words : Absolute nodal coordinates(절대절점좌표), Computer simulation(컴퓨터 시뮬레이션), Flexible Multibody Dynamics(탄성다물체동역학), Modal analysis(모드해석), Vehicle Dynamics(차량동역학)

Abstract

In this paper, the absolute nodal coordinate formulation was introduced to describe the large deformation problems. And also, the modal coordinates were employed to represent the small elastic deformation. A new hybrid formulation was developed to combine the modal coordinates and the absolute nodal coordinates. A spherical joint and the DOT1 constraint were developed to carry out the numerical simulation of mechanical systems with kinematic joints. A beam example was suggested to show the new formulation. The simulation results using the modal coordinates and the absolute nodal coordinates show a good agreement to the experiments.

1. 서 론

지금까지 탄성체 동역학의 주된 해석기법은 DADS(1)나 ADAMS(2)에서 주로 사용한 모드좌표를 이용한 해석 방법이었다. 모드좌표를 이용한 탄성체동역학 해석방법은 유한요소모드 해석법에 의해 계산된 진동 모드와 벡터를 이용하여 탄성체의 변형형상을 계산해 내기 때문에 복잡한 강성행렬과 질량행렬을 필요로 하지 않는다. 따라서 계산속도가 월등히 빠르다. 탄성체 해석에서 이러한 방법을 주로 사용할 수 밖에 없었던 가장 큰 이유는 수치해석을 위한 컴퓨터 성능의 한계성 때문이다. 다물체 모델에서 각 물체를 탄성체 유한요소 모델을 그대로 사용할 경우 운동방정식의 크기는 기하급수적으로 증가하며 엄청난 양의 계산을 필요로 하게 된다. 따라서 계산량이 적은 모드 해석법을 주로 이용하여 다물체 동역학 해석을 수행하였다. 그러나, 이 방법으로는 대변형 문제에 대한 정확한 해를 구하는데 어려움이 있다. 최근 컴퓨터 성능의 향상으로 많은 계산을 빠른 시간 내에 할 수 있게되었다. 한편, 절대절점좌표를 이용한 탄성체 해석방법은 A.A. Shabana 에 의해 처음 연구되었고 (3), 탄성체 빔과 평판에 이어 지금도 꾸준히 연구되고 있다(4-5). 이 방법의 장점은 유한요소법을 이용한 탄성체 모델의 운동방정식을 절대좌표로부터 구성하여 모든 요소에 대해 운동방정식이 구성되기 때문에 대변형 문제에 대해 매우 정확한 결과를 나타낸다. 절대절점좌표를 이용한 탄성체 해석은 좌표 변화에 따른 비선형적 특성을 해석할 수 있어서 탄성체의 대변형 해석이 가능하다.

본 논문에서는 기존에 많이 사용하던 방법인 모드좌표를 이용하여 미소변형을 표현하고, 절대절점좌표를 사용하여 대변형을 나타내고자 하였다. 모드좌표와 절대절점좌표를 적절히 사용함으로써 해석의 효율성과 신뢰성을 높이고자 하였다. 제 2 장에서는 모드좌표를 이용한 탄성체 해석법에 대하여 간단히 기술하였고, 제 3 장에서는 절대절점

+ 부경대학교 기계공학부
E-mail : jhsohn@pknu.ac.kr
TEL : (051)620-1539 FAX : (051)620-1405
* 부산대학교 기계공학부

좌표를 이용한 탄성체 해석에 대하여 서술하였으며, 제 4 장에서는 모드좌표와 절대절점좌표를 이용한 탄성체 해석법에 대하여 기술하였고 수치 예를 보였다. 결론 및 향후연구방향은 제 5 장에 나타내었다.

2. 절대절점좌표를 이용한 탄성체해석

2.1 탄성체 빔의 절대절점좌표

2 차원 오일러빔에 대한 유한요소모델을 Fig.1 와 같이 나타낼 수 있다. 빔요소의 두 노드점의 위치벡터 r 과 기울기벡터(slop vector) τ를 정의하고 이 빔에 대한 2 차원 형상함수를 이용하여 나타낸다.

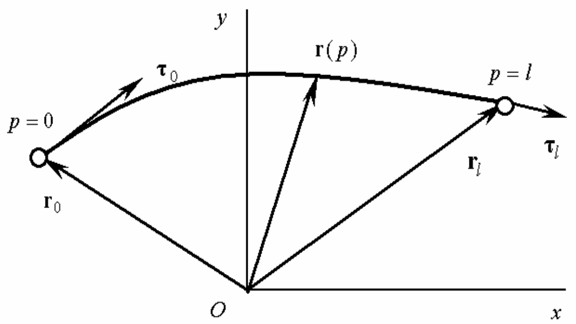


Fig. 1 Elastic beam element

각 노드는 2 개의 벡터를 가지고 있으므로 노드당 총 4 개의 변수를 가지며 한 개의 요소는 2 개의 노드를 가지고 있으므로 1 개의 빔요소는 8 개의 좌표를 가지게 된다. 노드당 좌표는 식(1)과 같이 표현되며, 임의의 위치벡터는 형상함수를 이용하여 식(2)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}=\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_0\\ \boldsymbol{\tau}_0\\ \mathbf{r}_l\\ \boldsymbol{\tau}_l\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{r}(p)=\begin{bmatrix}s_1 & 0 & s_2 & 0 & s_3 & 0 & s_4 & 0\\ 0 & s_1 & 0 & s_2 & 0 & s_3 & 0 & s_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r_{0x}\\ r_{0y}\end{Bmatrix}\\ \vdots\\ \begin{Bmatrix}\tau_{lx}\\ \tau_{ly}\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서, 형상함수는 아래와 같이 정의된다.

$$s_1=1-3\xi^2+2\xi^3,\quad s_2=l\,(\xi-2\xi^2+\xi^3),\quad s_3=3\xi^2-2\xi^3,\quad s_4=l\,(\xi^3-\xi^2),\qquad \xi=p/l.$$

빔요소의 운동방정식은 식(3)과 같이 라그랑지 운동방정식을 이용하여 표현한다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}}\right)^T-\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{e}}\right)^T+\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}}\right)^T=\left(\frac{\delta W}{\delta \mathbf{e}}\right)^T \tag{3}$$

운동에너지 T 와 가상일 δW 는 각각 식(4), 식(5)와 같다.

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^l \mu\,\dot{\mathbf{r}}^T\dot{\mathbf{r}}\,dp \tag{4}$$

$$\delta W=\int_0^l \delta\mathbf{r}^T\mu\,\mathbf{g}\,dp \tag{5}$$

운동방정식은 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}}+\mathbf{Q}^e=\mathbf{Q}^g \tag{6}$$

2.2 질량행렬, 강성행렬 및 탄성력

질량행렬은 형상함수의 적분식에 의해 식(7)과 같이 나타낼 수 있으며, 일반력은 식(8)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}=\frac{\mu l}{420}\begin{bmatrix}156\mathbf{I} & & & sym.\\ 22l\mathbf{I} & 4l^2\mathbf{I} & & \\ 54\mathbf{I} & 13l\mathbf{I} & 156\mathbf{I} & \\ -13l\mathbf{I} & -3l^2\mathbf{I} & -22l\mathbf{I} & 4l^2\mathbf{I}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{Q}^g=\begin{Bmatrix}\mu\mathbf{g}l/2\\ \mu\mathbf{g}l^2/12\\ \mu\mathbf{g}l/2\\ -\mu\mathbf{g}l^2/12\end{Bmatrix} \tag{8}$$

탄성변형에너지에 대한 계산은 식(9)에 의해 계산된다.

$$U=U^{\varepsilon}+U^{\kappa}=\frac{1}{2}\int_0^l EA\varepsilon^2dp+\frac{1}{2}\int_0^l EI\kappa^2dp \tag{9}$$

3. 모드좌표와 절대절점좌표를 사용한 탄성체해석

3.1 절대절점좌표계에서의 좌표변환행렬

Fig.2 은 3 차원 빔의 끝단 절점에서의 좌표계를 나타내고있다.

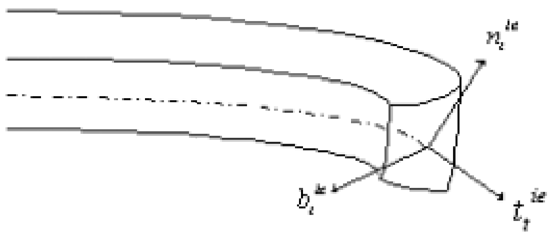


Fig. 2 Tangent frame

Fig.2 에서 $t_t^{ie} = \dfrac{r_x^{ie}}{\left| r_x^{ie} \right|}$, $r_x^{ie} = \dfrac{\partial r^{ie}}{\partial x^{ie}}$ 는 slope vector 를 의미하며, $\left| r_x^{ie} \right| = \sqrt{r_x^{ieT} r_x^{ie}}$ 는 Euclidian norm 을 의미한다. t_t^{ie} 는 beam centerline 의 접선벡터(tangent vector)이다. b_t^{ie} 와 n_t^{ie} 는 다음 식에 의해서 계산된다.

$$b_t^{ie} = t_t^{ie} \times \frac{r_y^{ie}}{\left| r_y^{ie} \right|} = t_t^{ie} \times \hat{r}_y^{ie}, \quad r_y^{ie} = \frac{\partial r^{ie}}{\partial y^{ie}},$$

$$n_t^{ie} = b_t^{ie} \times t_t^{ie}$$

따라서, 좌표변환행렬은 식(10)과 같이 표현된다[6].

$$A_t^{ie} = \left[t_t^{ie} \quad n_t^{ie} \quad b_t^{ie} \right] \tag{10}$$

3.2 모드좌표와 절대절점좌표 사이의 조인트

Fig.3 에 모드좌표와 절대절점좌표사이의 조인트를 정의하기 위해 임의의 조인트 축을 도시하였다.

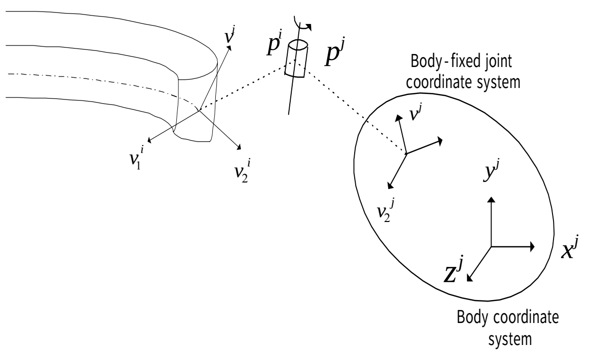


Fig. 3 Joint configuration

강체조인트(rigid joint)일 경우 구속식은 식(11)과 같이 정의할 수 있다.

$$\Phi(q^i, q^j) = \begin{bmatrix} r_p^{\,i} - r_p^{\,j} \\ v_1^{iT} v^j \\ v_2^{iT} v^j \\ v_1^{iT} v_2^{\,j} \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

구속식의 자코비안행렬(Jacobian matrix)은 식(12)과 같이 기술된다.

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} H_p^{\,i} & -H_p^{\,i} \\ v^{jT} H_1^{\,i} & v_1^{jT} H^j \\ v^{jT} H_2^{\,i} & v_2^{jT} H^j \\ v^{jT} H_1^{\,i} & v_1^{jT} H_2^{\,j} \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서, $H_p^{\,i} = \dfrac{\partial r_p^{\,i}}{\partial q^i}$, $H_p^{\,j} = \dfrac{\partial r_p^{\,j}}{\partial q^j}$, $H_1^{\,i} = \dfrac{\partial v_1^{\,i}}{\partial q^i}$, $H_2^{\,i} = \dfrac{\partial v_2^{\,i}}{\partial q^i}$, $H^j = \dfrac{\partial v^j}{\partial qj^i}$, $H_2^{\,j} = \dfrac{\partial v_2^{\,j}}{\partial q^j}$ 를 뜻한다.

3.2.1 구면조인트

구면조인트의 구속식은 식(13)과 같이 기술될 수 있다.

$$\Phi^r = \vec{r}_i + A_i S_i' - \vec{e} = \vec{r}_i + A_i(\vec{S}_0' + \phi^t a) - \vec{e} = 0 \tag{13}$$

가속도 관계식은 식(14)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} I_{3\times3} & 2E\overline{s}' & A_i\phi^t & -\hat{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{p} \\ \ddot{a} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = -\left[2\dot{E}\overline{s}'\dot{p} + 4E\overline{\phi^t \dot{a}} \right] \tag{14}$$

여기서,

$$E = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{s}' = \begin{bmatrix} 0 & -s'^T \\ s' & -\tilde{s}' \end{bmatrix},$$

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이다.

3.2.2 수직구속조건(DOT1)

모드좌표를 사용하는 탄성체의 임의의 절점에서의 벡터는 식(15)과 같이 기술될 수 있다.

$$v_i = A_i B_{ik} v_i' \tag{15}$$

여기서, v_i' 는 절점에서의 벡터이며, B_{ik} 탄성변형에 의한 좌표변환행렬을 나타낸 것으로 식(16)을 이용하여 계산된다.

$$B_{ik} = I_{3\times3} + \tilde{\varepsilon} \tag{16}$$

여기서, $\varepsilon = \phi^r a$ 을 의미하며, ϕ^r 는 모드행렬(modal matrix)중 회전성분을 투영한 모드행렬을 뜻하고, a 는 모드좌표를 말한다.

절대좌표계에서의 속도는 식(17) 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \omega_{ik} \times v_i = (\omega_i + A_i \phi^r{}_{ik} \dot{a}) \times v_i \\ &= -\tilde{v}_i \omega_i - \tilde{v}_i A_i \phi^r{}_{ik} \dot{a} \end{aligned} \tag{17}$$

여기서, ω_{ik} 는 절점 k 의 각속도이며, ω_i 와 $\ddot{\omega}_i$ 는 각각 탄성물체의 각속도와 각가속도이고 식(18)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \omega_i &= 2E\dot{p} \\ \ddot{\omega} &= 2E\ddot{p} \end{aligned} \quad (\dot{E}\dot{p} = 0) \tag{18}$$

가속도는 식(19)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{v}_i &= -\tilde{\dot{v}}_i 2E\dot{p} - \tilde{v}_i 2E\ddot{p} - \tilde{\dot{v}}_i A_i \phi^r \dot{a} \\ &- \tilde{v}_i 2E\overline{\phi^r \dot{a}} \dot{p} - \tilde{v}_i A_i \phi^r \ddot{a} \end{aligned} \tag{19}$$

따라서, 수직구속식은 식(20)과 같이 표현된다.

$$v_1^{iT} v^j = 0 \tag{20}$$

수직구속식의 가속도 관계식은 식(21)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1^{iT} v^j + 2\dot{v}_1^{iT} \dot{v}^j + v_1^{iT} \ddot{v}^j &= 0 \\ v^{jT} \ddot{v}_1^i + v_1^{iT} \ddot{v}^j &= -2\dot{v}_1^{iT} \dot{v}^j \end{aligned} \tag{21}$$

식(21)을 풀어서 쓰면, 식(22)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} v_1^{iT}\ddot{v}^j &= v_1^{iT}\ddot{A}v^j{}' = v_1^{iT}(v_x^j{}'\ddot{i} + v_y^j{}'\ddot{j} + v_z^j{}'\ddot{k}) \\ &= v_1^{iT}\left(\begin{aligned} & v_x^j{}'\left[\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\ddot{r}_x + \frac{\partial}{\partial r_x}\left(\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\dot{r}_x\right)\dot{r}_x\right] + v_z^j{}'\left[-\tilde{\hat{r}}_y\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\ddot{r}_x + \tilde{\hat{r}}_x\frac{\partial \hat{r}_y}{\partial r_y}\ddot{r}_y + K_d\right] \\ & + v_y^j{}'\left[\tilde{\hat{r}}_x\left(\tilde{\hat{r}}_y\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\right)\ddot{r}_x - \tilde{\hat{r}}_x\left(\tilde{\hat{r}}_x\frac{\partial \hat{r}_y}{\partial r_y}\right)\ddot{r}_y + \tilde{k}\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\ddot{r}_x + J_d\right] \end{aligned} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

자코비안을 이용한 가속도 관계식은 식(23)과 같이 표현된다.

$$\Phi_q \ddot{q} = \gamma \tag{23}$$

이 식을 풀어서 기술하면, 식(24)과 같다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -v^{jT}\tilde{v}_1^i 2E & -v^{jT}\tilde{v}_1^i A^i \phi^r & \Phi_{,r_x} & \Phi_{,r_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{p} \\ \ddot{a} \\ \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \end{bmatrix} = \\ &-2\dot{v}_1^{iT} v^j + v^{jT}(\tilde{\dot{v}}_1^i 2E\dot{p} + \tilde{\dot{v}}_1^i A^i \phi^r \dot{a} + 2\tilde{v}_1^i E\overline{\phi^r \dot{a}}\dot{p}) \\ &-v_1^{iT}\left(v_x^j{}'\frac{\partial}{\partial r_x}\left(\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\dot{r}_x\right)\dot{r}_x + v_z^j{}' K_d + v_y^j{}' J_d\right) \end{aligned} \tag{24}$$

여기서,

$$\Phi_{,r_x} = v_1^{iT}\left(v_x^j{}'\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x} - v_z^j{}'\tilde{\hat{r}}_y\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x} + v_y^j{}'\left(\tilde{\hat{r}}_x\left(\tilde{\hat{r}}_y\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\right) + \tilde{k}\frac{\partial \hat{r}_x}{\partial r_x}\right)\right)$$

$$\Phi_{,r_y} = v_1^{iT}\left(v_z^j{}'\tilde{\hat{r}}_x\frac{\partial \hat{r}_y}{\partial r_y} - v_y^j{}'\tilde{\hat{r}}_x\left(\tilde{\hat{r}}_x\frac{\partial \hat{r}_y}{\partial r_y}\right)\right)$$

이다.

4. 수치예제

4.1 빔의 모델링

모드좌표와 절대절점좌표를 혼용한 탄성체해석의 예로써 Fig.3 과 같은 빔을 모델링하였다.

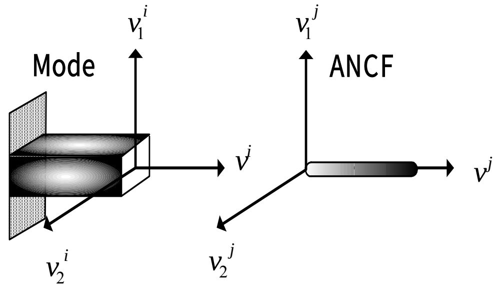


Fig. 4 Configuration of the beam

Fig.4 의 모델에서 사용한 구속식은 식(25)~식(28)과 같다.

$$\Phi^{r} = \vec{r}_i + A_i S_i' - \vec{e} = \vec{r}_i + A_i(\vec{S}_0' + \phi^{t} a) - \vec{e} = 0 \qquad (25)$$

$$\Phi^{4} = v_1^{iT} v^{j} = 0 \qquad (26)$$

$$\Phi^{5} = v_2^{iT} v^{j} = 0 \qquad (27)$$

$$\Phi^{6} = v_1^{iT} v_2^{j} = 0 \qquad (28)$$

모델링을 세가지로 하였으며, 각 경우를 Table1 에 나타내었다.

Table 1 Modelings of the beam

	Case1	Case2	Case3
Size	$\phi = 2mm$ $l = 40cm$	$\phi = 2mm$ $l = 40cm$ (Damping)	$\phi = 2mm, l = 20cm$ $\phi = 1mm, l = 40cm$ (Damping)
Model	20cm(mode) 20cm(node)	20cm(mode) 20cm(node)	20cm(mode) 40cm(node)

Fig.5 에 Case1 의 끝단 절점에서의 변위를 도시하였다. Fig.6 에는 Case1 의 주파수 응답특성을 보여주고 있다. 주파수가 거의 비슷한 것을 알 수 있다. Fig.7 에는 절대절점좌표에서 댐핑효과가 포함된 것을 비교해서 보여주고 있으며, Fig.8 에는 Case3 의 경우를 보여주고 있다.

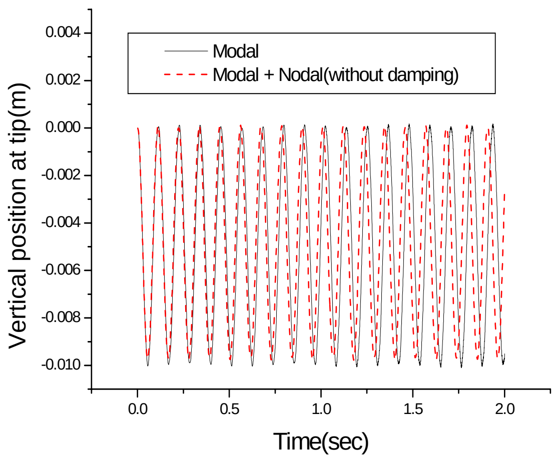
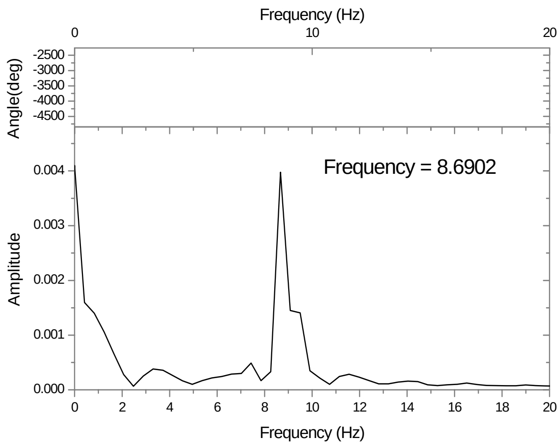
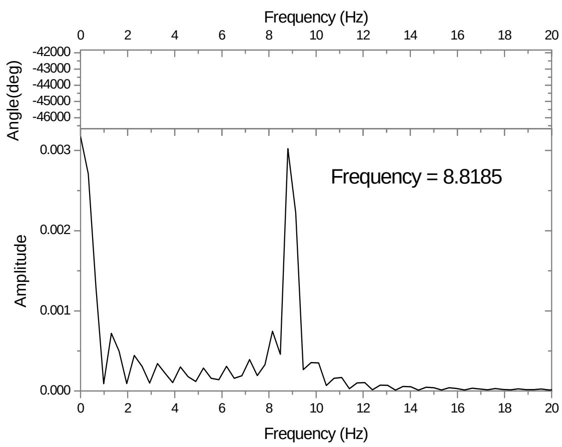


Fig. 5 Vertical deflections of end node(Case1)



(a) Mode



(b) Mode-Node

Fig. 6 Frequency responses(Case1)

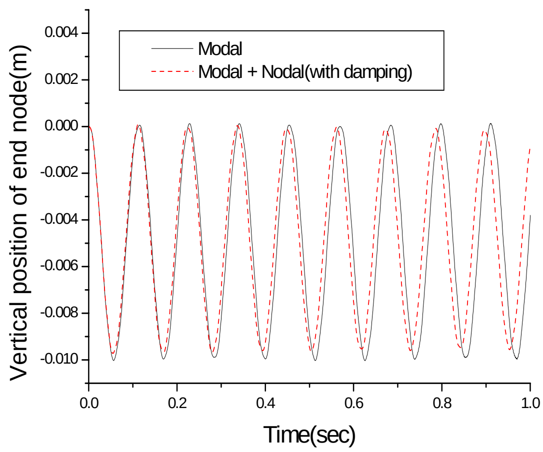


Fig. 7 Vertical deflections of end node(Case2)

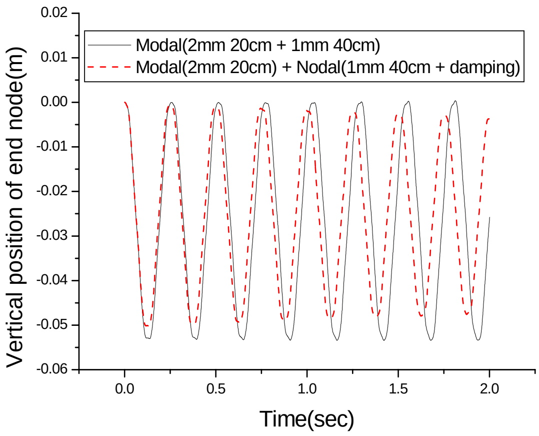


Fig. 8 Vertical deflections of end node(Case3)

5. 결 론

본 논문에서는 기존에 많이 사용하던 방법인 모드좌표를 이용하여 미소변형을 표현하고, 절대절점좌표를 사용하여 대변형을 나타내고자 하였다. 모드좌표와 절대절점좌표를 적절히 사용함으로써 해석의 효율성과 신뢰성을 높이고자 하였다. 모드좌표와 절대절점좌표로 모델링된 물체를 연결시키기 위하여 조인트가 개발되었으며, 모드좌표와 절대절점좌표를 혼용한 예로서 빔을 모델링하여 시뮬레이션 하였다. 모드좌표만 사용하였을 경우와 절대절점좌표를 혼용하였을 경우의 결과를 비교하여 신뢰도를 확인하였다. 본 연구결과는 향후 보다 다양한 예제를 시뮬레이션 해보는 데에 응용될 수 있으리라 사료된다.

후 기

본 연구는 국가지정연구실(NRL)의 지원(과제번호 (M1-0203-00-0017-02J0000-00910)으로 이루어졌으므로, 지원기관에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Computer Aided Design Software Inc, 1995, DADS (Dynamic Analysis and Design System) User's Manual, U.S.A.
(2) MDI, 1994, ADAMS/Finite Element Analysis Reference Manual version 8.0 Nov. 15.
(3) Ahmed. A. Shabana, 1998, "Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics," Nonlinear Dynamics Vol. 16, pp. 293~306.
(4) Dmitrochenko O. N., 2002, "Efficient Simulation of Rigid-Flexible Multibody Dynamics: Some Implementations and Results", in Proceedings of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1, W. Schielen and M. Valasek(Eds), Prague, pp. 51~56.
(5) Wan-Suk Yoo, Jeong-Han Lee, Jeong-Hyun Sohn, Su-Jin Park, Oleg Dmitrochenko and Dmitri Pogorelov, 2003, "Large Oscillations of a Thin Cantilever Beam: Physical Experiments and Simulation using Absolute Nodal Coordinate Formulation", accepted for publication in the Nonlinear Dynamics.
(6) Hiroyuki Sugiyama, JoseL. Escalona, Ahmed A. Shabana, 2003, "Formulation of Three-Dimensional Joint Constraints Using the Absolute Nodal Coordinates", Nonlinear Dynamics 31, pp.167~195, 2.