연성 시스템의 강건설계 방법

이권희† · 박경진* · 주원식**

Robust Design Methodology of a Coupled System

Kwon-Hee Lee, Gyung-Jin Park and Won-Sik Joo

Key Words : Robust Design(강건설계), Coupled Design(연성설계), 다중목적함수(Multi-Objective Function), 게임이론(Game Theory)

Abstract

Current trend of design technologies shows engineers to objectify or automate the given decision-making process. The numerical optimization is an example of such technologies. However, in numerical optimization, the uncertainties are uncontrollable to efficiently objectify or automate the process. To better manage these uncertainties, Taguchi method, reliability-based optimization and robust optimization are being used. Based on the independence axiom of axiomatic design theory that illustrates the relationship between desired specifications and design parameters, the designs can be classified into three types: uncoupled, decoupled and coupled. To best approach the target performance with the maximum robustness is one of the main functional requirements of a mechanical system. Most engineering designs are pertaining to either coupled or decoupled ones, but these designs cannot currently accomplish a real robustness thus a trade-off between performance and robustness has to be made. In this research, the game theory will be applied to optimize the trade-off.

1. 서 론

강건설계(robust design)는 1980 년대 이후 다구찌 박사 부자와 Phadke 등에 의해 미국 현장 기술자들에게 소개·전파되면서 널리 알려지기 시작하였다. 특히 다구찌의 강건설계 기법은 자동차, 전기·전자, 품질 공학분야 등의 현장에 널리 적용되었다. 뿐만 아니라, 다구찌의 강건설계의 개념은 수치적 최적설계(numerical optimization) 분야에서도 도입되어 강건최적설계(robust optimization)란 주제로 많은 연구가 진행되어 오고 있다.[1-3]

다구찌는 잡음인자에 의한 성능 변동을 최소화하기 위하여 성능특성치별로 손실함수 및 SN 비를 정의하였다. 그리고 잡음의 영향을 고려하기 위해 외측배열로써 직교배열표를 반복 사용하였다. 다구찌의 강건설계법이 현장에서 가시적인 결과들을 내놓고 있는 반면 몇몇의 통계학자들은 다구찌법에 대하여 여러 문제점을 제기하고 있다. 주로 이들은 다구찌 박사의 SN 비 및 직교배열표에 문제점을 제기하고 있다. 그러나 성능의 변동을 최소화하려는 다구찌 박사의 강건설계 개념은 품질공학 뿐만 아니라 일반적인 공학설계에 큰 기여가 되었다.

이와 같은 강건설계에 대한 연구는 크게 두 가지로 분류할 수 있다.[1] 첫 번째는 다구찌가 정의한 강건설계 기법을 실험계획법의 도구로써 적용하는 경우이다. 이는 주로 통계나 실험계획법을 전공으로 하는 연구자들에 의해 수행되고 있다. 두 번째는 다구찌의 강건설계 개념을 수치적 최적설계에 도입하여 알고리즘을 개발하는 경우이다. 이는 기계분야에서 최적설계를 전공하는 연구자들에 의해서 수행되고 있다. 이들은 강건성을 수학적으로 표시하기 위한 노력들이 대부분이다.

첫 번째 연구분야나 두 번째 연구분야에서 모두 부딪히는 문제는 연성되어 있는 기계시스템 설

† 동아대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : leekh@donga.ac.kr
TEL : (051)200-7638 FAX : (051)200-7656
* 한양대학교 공학대학 기계공학과
** 동아대학교 공과대학 기계공학과

계이다.[4] 기계시스템 설계에서 개념설계 단계나 상세설계 단계에서 모두 성능의 목표값을 가지고 있다. 이 성능의 목표값은 특정값이 될 수도 있으며 영 또는 무한대가 될 수도 있다. 그리고 강건성의 관점에서 이 성능의 분포가 최소가 되길 희망한다. 설계공리(axiomatic design)의 용어를 이용하면, 기계시스템의 기본적인 기능적 요구사항(FR: functional requirement)은 성능이 목표값을 갖게 하는 것과 그 성능의 분포를 최소화시키는 것이다. 이러한 기능적 요구사항과 설계파라미터 사이가 연성되어 있는 경우의 계를 연성된 계라 한다.[5] 대부분의 기계시스템은 연성설계라고 해도 과언은 아니다. 본 연구에서는 연성설계를 비연성설계나 연성화설계로 만드는 것이 목적이 아니라 연성설계인 경우 최적의 강건해를 찾는 것이 목적이다.

이러한 기계시스템의 설계에서 다구찌가 제안한 SN 비를 이용하면 원하는 강건 해를 구할 수가 없음을 수학적으로 보이고 있다. 본 연구에서는 공리설계에서 분류되는 연성설계에 대한 강건설계를 구현하기 위한 방법으로써 다목적최적화(multi-objective optimization) 기법을 추천하였다. 즉 두 가지의 기능적 요구사항을 각각 목적함수로 치환함으로써 두개의 목적함수를 갖는 다중목적함수를 생각할 수 있다.

다음으로 다목적최적설계를 풀기 위한 방법으로써 게임이론(game theory)을 도입하여 해결하고자 한다. 연성화된 문제의 예제로써 이부재(two-member) 트러스를 선정하였으며 이에 대하여 게임이론에 의한 다목적최적설계를 수행하였다.

2. 연성설계 및 SN 비

2.1 연성설계

기계시스템설계는 비연성설계(uncoupled design), 비연성화설계(decoupled design), 연성설계(coupled design)로 나눌 수 있다. 두개의 기능적 요구사항과 두개의 설계파라미터에 대하여 비연성설계, 비연성화설계, 연성설계는 각각 식 (1), (2), (3)의 설계방정식으로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} FR_1 \\ FR_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} FR_1 \\ FR_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} FR_1 \\ FR_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

여기서 FR_1, FR_2는 기능적요구사항, DP_1, DP_2는 설계파라미터를 표시한다. 강건설계 관점에서 첫 번째 기능적 요구사항 FR_1은 성능의 평균을 목표값으로 가도록 하는 것이며, 두 번째 기능적요구사항 FR_2는 성능의 분산을 최소화시키는 것이다. 설계행렬의 요소 A_{ij}는 $\partial FR_i/\partial DP_j$로 결정된다. 식 (1)의 비연성설계는 성능의 평균 및 분산에 영향을 주는 설계파라미터가 확연히 분리되므로 가장 이상적인 형태의 설계이다. 식 (2)의 비연성화설계 역시 FR_1을 만족시키도록 DP_1을 결정한 후, DP_1을 고정시키고 FR_2를 만족시키도록 DP_2를 결정하여 강건설계를 수행한다. 그러나 이렇게 결정되어진 설계파라미터들이 최적값이라는 것을 보장할 수 없다. 반면에 식 (3)으로 표시되는 연성설계는 강건설계가 어려운 유형이다. 이는 DP_1과 DP_2가 모두 성능의 목표치와 분산에 영향을 주므로 강건설계의 적용이 어렵고, 설계자의 직관에 의해 어느 하나를 희생해야 하는 경우이다.

설계공리의 이론에서 보면 식 (3)의 연성설계가 바람직하지 못하지만, 기계시스템이 복잡해질수록 비연성설계, 비연성화설계로 설계를 한다는 것은 매우 어려운 일이다. 그리고 불행히도 기존의 기계시스템을 분석해 보면 대부분 연성설계에 해당된다. 이는 강건설계의 적용이 어려운 유형의 문제에 해당한다. 이것을 설계행렬식으로 표현하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} Minimize\ (\mu - \mu_0)^2 \\ Minimize\quad \sigma^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

여기서 μ는 성능특성치, μ_0은 성능특성치의 목표값, σ^2은 성능특성치의 분산을 의미한다.

2.2 SN 비[6]

1949 년 다구찌는 일본의 전기통신연구소에서 생산성 향상에 관한 업무를 맡았었는데 그가 조사한 결과는 실험과 테스트에 드는 비용이 소요시간 및 지출의 대부분을 차지한다는 것이었다. 그는 이것을 위해 전통적인 실험계획법에서 사용되는 직교배열표와 통신공학에서 사용되는 SN 비를 도입하여 새로운 방법을 전개하였다. 다구찌법은 기능강건설계의 평가와 개선, 기능의 산포에 의한 손실, 경제적 평가와 허용차 설계, 공정관리방식의 설계 등을 그 주내용으로 하고 있다.

다구찌는 품질에 관한 기업의 활동을 제품의 기획, 제품의 설계, 생산공정의 설계 및 생산공정의 관리로 분류하였는데 이중 제품과 생산공정의 설계는 기존의 설계법에 도입할 수 있는 부분이다. 제품설계 및 공정설계는 크게 계설계(system design), 파라미터 설계와 공차설계(tolerance design)

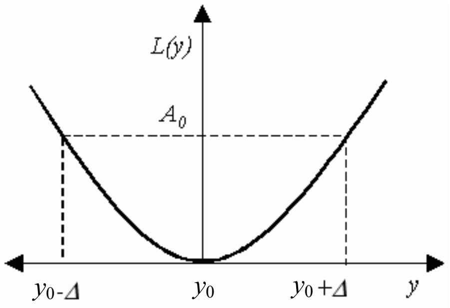

Fig. 1 Quality loss function

로 나누어 진다. 계설계는 원하는 목적기능을 가지는 제품의 원형을 개발 및 성능을 개선시키는 단계이며 파라미터 설계는 제어할 수 없는 잡음에 대하여 강건한 최적수준을 결정하는 단계이다. 공차설계는 파라미터 설계 후 최적조건이 성능특성치의 변동에 만족할 만한 상태가 아닌 경우에 적용하는 단계이다.

다구찌는 성능 특성치의 종류별로 손실함수(loss function)를 정의하였고 이에 대한 기대값을 구함으로써 SN 비를 정의하였다. 성능특성치에 목표값이 있는 망목(nominal-the-best)특성의 손실함수는 Fig. 1 과 같이 표현된다. 여기서 Δ은 성능특성치의 허용한계값이며 A_0 는 허용할 수 있는 손실금액이다. 손실함수 $L(y)$를 목표값 y_0 에서 테일러급수 전개를 하고, 3 차 이상의 항을 무시하면 손실함수 $L(y)$는 식 (5)와 같다.

$$L(y) = k(y - y_0)^2 \tag{5}$$

여기서 $k = A_0 / \Delta^2$ 이다. 이 식에 대하여 기대값을 취하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$E[L(y)] = k\left[\sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2\right] \tag{6}$$

식 (6)은 성능특성치의 분산과 목표값값의 편차의 제곱항이 서로 결합되어 있는 형태이다.

통신공학에서 사용되는 SN 비는 식 (6)의 기대값에 대수를 취하여 다음과 같이 정의한다.

$$\eta = 10 \log \frac{\mu^2}{\sigma^2} \tag{7}$$

식 (6)으로부터 알 수 있듯이 식 (7) 역시 성능특성치의 분산과 목표값의 편차의 제곱항이 결합되어 있다.

망소(smaller-the-better)특성인 경우의 손실함수는 다음과 같이 표현된다.

$$L(y) = ky^2 \tag{8}$$

망목특성과 같은 절차로 손실함수에 대한 기대값을 구하면 다음 식으로 표현된다.

$$E[L(y)] = k\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} \tag{9}$$

여기서 n 은 표본의 수이다. 식 (9) 역시 성능특성치의 분산과 평균의 제곱항이 결합되어 있다. 망소특성에서 SN 비는 식 (10)과 같다.

$$\eta = -10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \tag{10}$$

망대(lager-the-better)특성인 경우의 손실함수 및 SN 비는 다음 식과 같다.

$$L(y) = k\left(\frac{1}{y^2}\right) \tag{11}$$

$$\eta = -10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i^2}\right) \tag{12}$$

2.3 설계방정식 대 SN 비

망목특성인 경우 식 (7)의 SN 비는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.(7)

$$\eta = 10\log\mu^2 - 10\log\sigma^2 \tag{13}$$

식 (7) 또는 식 (13)은 평균과 분산에 영향을 주는 인자들이 각각 분리가 될 경우 유효한 지수이다. 그러나 평균과 분산에 영향을 주는 인자들이 분리가 안될 경우 SN 비는 평균과 분산의 효과가 교락이되어 있으므로 이를 기초로 구한 해는 강건해라 할 수 없다. 즉 설계방정식에서 식 (14)와 같이 표현되는 비연성문제와 식 (15)-(16)과 같이 표현되는 비연성화문제에 있어서는 식 (7) 또는 식 (13)의 SN 비를 강건해를 찾는데 사용할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} Minimize\ (\mu - \mu_0)^2 \\ Minimize\quad \sigma^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{Bmatrix} Minimize\ (\mu - \mu_0)^2 \\ Minimize\quad \sigma^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix} Minimize\ (\mu - \mu_0)^2 \\ Minimize\quad \sigma^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

한편 Phadke 등은 성능특성치가 가질 수 있는 자

격을 논함으로써 이에 대한 오류를 방지하려고 하였다. 그러나 그 제한은 매우 엄격하고 예측이 힘들어 대다수의 문제에는 적용이 어렵다.(2)

망소특성인 경우에는 식 (17)이 성립하므로 식 (10)의 SN 비를 식 (18)과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \mu^2 + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - n\mu^2\right] = \mu^2 + \sigma^2 \quad (17)$$

$$\eta = -10\log\left(\mu^2 + \sigma^2\right) \quad (18)$$

강건설계 시, 식 (10) 또는 식 (18)의 SN 비를 직접 이용하기 것은 위험하다. 즉, SN 비를 직접 이용하기 보다는 식 (14)-(16)과 같은 설계방정식이 구성되는 문제일 경우에는 평균 또는 분산만으로 구성되는 SN 비를 정의하여 사용하는 것이 바람직하고 망목특성인 경우와 같이 평균과 분산에 영향 있는 인자들을 분리해야 한다. 식 (14)-(16)에서 망소특성인 경우 μ_0 는 0 이다. 또한 망대특성에 대한 SN 비도 망목특성이나 망소특성과 같은 동일한 문제가 발생한다. 그러나 식 (4)로 표현되는 연성문제는 이와 같은 과정 자체가 무의미하다.

지금까지 설계방정식과 그에 대응하는 SN 비의 검토로부터 수치적최적설계에 다구찌의 강건설계 개념을 도입할 경우 SN 비의 도입은 주의를 기울여야 할 것이다. 따라서 연성되어 있는 문제의 강건설계는 SN 비를 이용하는 것이 아니라 손실함수의 기대값을 최소화시키는 방법이 더 효율적일 것이다. 이를 위해서는 성능특성치의 평균과 표준편차로 구성되는 다중목적함수를 생각할 수 있다.

3. 게임이론을 이용한 강건설계

성능특성치의 평균 및 표준편차로 구성되는 다중목적함수를 갖는 최적설계 정식화는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\textit{Minimize}\ [f_1(\mathbf{X})=|\mu(\mathbf{X})-\mu_0|, f_2(\mathbf{X})=s(\mathbf{X}), \ldots, f_k(\mathbf{X})] \quad (19)$$
$$\textit{Subject to}\ g_j(\mathbf{X}) \le 0,\ j=1,\ldots,m \quad (20)$$

여기서 $\mathbf{X}$ 는 설계변수벡터, $f_k(\mathbf{x})$ 는 k 번째 목적함수, s 는 표본표준편차, g_j 는 j 번째 부등제한조건, m 은 부등제한조건 수를 의미한다.

다중목적함수를 풀기 위한 방법으로는 가중치방법(weighting method), 제한방법(constraint method), 전역적기준방법(global criterion method), 골프로그래밍(goal programming), 게임이론을 이용한 방법 등이 있다.(8) 각 방법들은 파레토 최적해(Pareto optimum)를 구하는데 있어 장단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 게임이론이 가지는 특성을 이용하여 식 (19)-(20)으로 표현되는 연성시스템의 강건설계를 해결하고자 한다.

3.1 게임이론

게임이론은 합리적인 의사 결정자들 사이에서 일어나는 갈등(conflict)과 협력(cooperation)의 수학적 모델의 학문이다. 게임이론은 최소한 둘 이상 사이의 의사결정을 위해 적용가능하며 게임을 위해서는 참여자(player), 전략(strategy), 결과(outcome), 결과의 수치적 값어치인 소득(payoff)의 개념이 존재한다.

식 (19)-(20) 형태로 존재하는 다중목적함수 문제는 각 참여자가 각각의 목적함수에 책임을 진다고 가정한 게임과 동일시 할 수 있다. 이때 다중목적함수 문제는 참여자가 서로 협력 가능한 협력게임(cooperative game)에 속한다.

3.2 거래함수(bargaining function)

두 참여자를 A, B 라 할 때, 각 참여자는 가능한 전략 집합 S 로부터 전략, 벡터 $\mathbf{X}$ 를 선택할 수 있다. 그리고 소득함수(payoff function)를 U 라 할 때, 이때의 소득은 U($\mathbf{X}$)가 되어 참여자 A 의 소득은 u=$U_A(\mathbf{X})$, 참여자 B 의 소득은 v=$U_B(\mathbf{X})$라고 할 수 있다. 협력게임에서는 각 참여자의 소득이 최대가 되도록 협력하면서 거래를 할 것이다. 이때 협상하기 전 상태에서 가능한 전략점 $\mathbf{X'}$이 존재한다면 참여자 A, B 의 소득은 각각 u'=$U_A(\mathbf{X'})$, v'=$U_B(\mathbf{X'})$라 할 수 있다. 두 목적함수에 대하여 거래함수(bargaining function)는 다음과 같이 정의한다.(9-11)

$$B(\mathbf{X}) = (U_A(\mathbf{X}) - u')(U_B(\mathbf{X}) - v') \quad (21)$$

즉, 각 항이 양수가 되면서 거래함수가 최대가 되도록 전략 $\mathbf{X}$ 를 결정하는 것이다. 이것을 k 개의 목적함수에 대하여 전개하고 소득함수를 목적함수와 대응시키면 거래함수는 식 (22)와 같이 된다.

$$B(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{k}(f_{iw}(\mathbf{X}) - f_i(\mathbf{X})) \quad (22)$$

여기서 f_{iw} 는 i 번째 목적함수가 가질 있는 최악의 값이다. 또한 식 (22)에서 각각의 항에 가중지수를 이용하여 사용하기도 한다.

또한 다음과 같은 거래함수도 이용이 될 수 있다. k 개의 목적함수들에서 각각의 단일 목적함수를 통해 구한 최적해를 $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \ldots, \mathbf{X}_k^*$라고 하면 각 F_{iu} 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{iu} = \text{Max}\ [\,F_i(\mathbf{X}_j^*),\ j=1,2,\ldots,k\,] \quad (23)$$

여기서 $F_i=c_i f_i(\mathbf{X})$=constant 로 결정되는 함수이다. 이때 거래함수는 다음과 같이 정의된다.

$$B(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{k} (F_{iu}(\mathbf{X}) - F_i(\mathbf{X}_C^*)) \qquad (24)$$

여기서 $\mathbf{X}_c$*는 다중목적함수문제를 풀어서 산출된 파레토 최적해이다. 즉, 가중치법을 이용할 경우 다음 정식화의 최적해를 구해야 식 (24)를 구할 수 있다.

$$\textit{Find} \quad \mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ ... \ w_k], \mathbf{X} \qquad (25)$$

$$\textit{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\mathbf{X}) / f_i^*(\mathbf{X}) \qquad (26)$$

$$\textit{Subject to} \quad g_j(\mathbf{X}) \le 0, \quad j = 1,...,m \qquad (27)$$

여기서 f_i*($\mathbf{X}$)는 i 번째 목적함수만을 고려한 최적해에서의 함수값이다.

4. 2 부재 트러스

연성된 시스템의 예로써 Fig. 2 와 같은 2 부재 트러스 설계문제[(9)]를 살펴보자. Fig. 2 에서 설계변수는 절점의 x 방향 길이 l 과 단면적 A 로써 $\mathbf{X}$=[l A]이다. 이때 h=2.54m, P=44.45kN 이다. 물성치로써 탄성계수 E=206.71GPa, 밀도 ρ=7833.54kg/m^3 이다. 이때 중량 Q, 절점 3 의 변위 δ, 및 부재 1, 2 의 응력 σ_1, σ_2 는 다음식과 같이 산출된다.

$$Q = 2\rho h x_2 \sqrt{1 + x_1^{\ 2}} A_{ref} \qquad (28)$$

$$\delta = \frac{Ph(1 + x_1^{\ 2})^{1.5} \sqrt{1 + x_1^{\ 4}}}{2\sqrt{2} E x_1^{\ 2} x_2 A_{ref}} \qquad (29)$$

$$\sigma_1 = \frac{P(1 + x_1)\sqrt{1 + x_1^{\ 2}}}{2\sqrt{2} x_1 x_2 A_{ref}} \qquad (30)$$

$$\sigma_2 = \frac{P(-1 + x_1)\sqrt{1 + x_1^{\ 2}}}{2\sqrt{2} x_1 x_2 A_{ref}} \qquad (31)$$

여기서 x_1=l/h, x_2=A/A_{min}, A_{min}=1(×645.16×10^{-6} m^2), A_{ref}= 1 이다. 그리고 10 ≤ x_1≤200 (×0.0254m), 0.1 ≤ x_2≤2.5 (×645.16×10^{-6}m^2)이다.

절점 3 에 발생하는 변위가 강건해지도록 하는 설계변수를 구하는 문제를 생각해 보자. 강건설계 관점에서 설계행렬을 구성해 보면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} Minimize & \bar{\delta} \\ Minimize & s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad (32)$$

여기서 $\bar{\delta}$ 는 변위의 평균, s 는 변위의 표준편차이며 대각요소에 비해 비대각요소를 무시할 수 있으면 비연성설계, 비대각요소중 어느 한 요소가

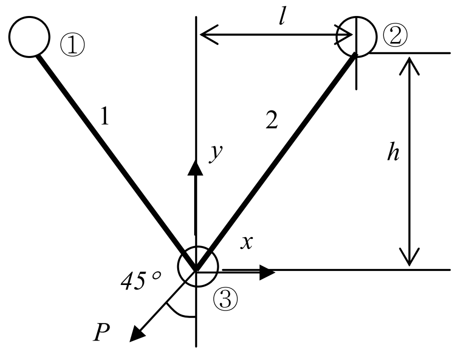

Fig. 2 Two-bar truss

Table 1 L9 orthogonal array

Exp.	x_1 (×0.0254m)	x_2	δ (×0.0254m)	s (×0.0254m)
1	10	0.1	11.936	3.988
2	10	1.3	0.920	0.024
3	10	2.5	0.479	0.007
4	105	0.1	0.485	1.700
5	105	1.3	0.037	0.010
6	105	2.5	0.019	0.003
7	200	0.1	1.358	9.054
8	200	1.3	0.104	0.054
9	200	2.5	0.054	0.014

대각요소에 비해 무시할 수 있으면 비연성설계, 비대각요소 중 어느 하나를 무시할 수 있으면 비연성화설계, 그리고 비대각의 어느 한 요소도 무시할 수 있으면 연성설계이다.

설계행렬의 각 요소크기를 결정하기 위하여 설계변수의 하한값, 상한값, 그리고 평균값을 갖는 3 수준 L9 직교배열표를 구성하여 제곱합을 이용하였다. 이 결과로부터 변위의 평균에 대한 x_1, x_2 의 제곱합은 각각 S_{x1}=33.96, S_{x2}=37.59 이며, 변위의 표준편차에 대한 x_1, x_2 의 제곱합은 각각 S_{x1}=9.56, S_{x2}=47.93 이다. 따라서 식 (4)의 비대각요소를 무시할 수 없는 유형의 문제이다. 따라서 이런 문제의 강건설계는 다중목적함수를 이용하여 해결하는 것이 바람직하다. 테일러 1 차 급수 전개에 의하여 변위의 평균 및 표준편차는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\bar{\delta} \approx \delta(l, A) \qquad (33)$$

$$s \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_{xi}^2} \qquad (34)$$

여기서 설계변수 x_i 분포의 표준편차를 s_{xi} 라고 하면 3s_{xi}=Δx_i 라고 가정하고 본 예제에서는 Δx_i 를 현 설계점 값의 10%로 가정하였다. 그리고 식 (34)의 민감도는 해석적으로 구하였다.

강건설계를 위한 다중목적함수로 구성되는 정식화는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\textit{Minimize}\ [f_1(\mathbf{X})=\delta, f_2(\mathbf{X})=s, f_3(\mathbf{X})=\text{weight}] \quad (35)$$

$$\textit{Subject to}\quad \sigma_i-\sigma_a \leq 0\ ,\ i=1,2 \quad (36)$$

여기서 σ_a 는 137GPa 이다. 식 (35)의 다중목적함수에 중량을 추가한 것은 구조설계 문제의 특성상 중량을 최소화하기 위해 추가로 설정한 것이다.

식 (35)-(36)으로 표시되는 다중목적함수를 1) 가중치방법, 2) 전역적기준방법 3) 게임이론과 전역적기준방법, 4) 게임이론과 가중치방법 5)게임이론 등의 5 가지를 이용하여 강건해를 산출하였다. 각 결과를 Table 2 에 표시하였다. 각 결과는 초기치를 x_1=200, x_2=2.5 로 하고 ADS 의 modified feasible direction 방법을 이용하여 산출되었다. 2)의 전역적기준방법에서는 다음의 식에서 p=2 로 하였다.

$$\textit{Minimize}\ \left[\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{f_i{}^*-f_i(X)}{f_i{}^*}\right|^p\right]^{1/p} \quad (37)$$

그리고 가중치 방법에서는 다음의 목적함수를 이용하였다.

$$\textit{Minimize}\ \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \frac{f_i(X)}{f_i{}^*} \quad (38)$$

3)의 방법과 4)의 방법에서는 식 (24)의 목적함수를 이용하였으며, 각각 p 와 **w** 를 설계변수에 포함시켰다. 그리고 5)의 방법은 식 (22)의 거래함수를 이용한 것이다.

각 결과를 살펴보면 방법 2)와 3)이 유사하고 방법 1)과 4)가 유사하지만 게임이론에서 정의한 거래함수값을 비교하면 게임이론을 이용한 3), 4)의 방법이 우수하다. 그러나 5)의 방법은 각 함수를 스케일링했음에도 불구하고 중량만을 줄이려는 경향이 있다.

5. 결 론

연성시스템의 강건설계에 대한 검토를 통하여 다음과 같은 설계과정을 제시하였다.

Table 2 Results of multi-objective optimization

	(x_1, x_2) (×0.0254m,)	δ (×0.0254m)	s (×0.0254m)	Weight (×0.4536kg)
1)	62.18, 2.38	0.02242	0.00196	158.6
2)	59.25,1.82	0.03071	0.00334	119.7
3)	59.53,1.83	0.03043	0.00331	120.4
4)	64.38,2.47	0.02096	0.00182	166.3
5)	71.57,0.65	0.07370	0.02698	45.38

(1) 먼저 강건설계를 수행하기 전에 기능적요구사항과 설계변수간의 함수관계를 파악하기 위해 설계변수의 제곱합을 이용하여 설계행렬을 구성한다.
(2) 비연성설계나 비연성화설계인 경우에는 평균과 분산에 영향을 주는 인자들을 분리하여 이들을 별개로 취급하여 최적해를 구한다.
(3) 연성설계인 경우에는 다중목적함수를 이용하여 최적해를 구한다. 여기에는 거래함수를 정의함으로써 게임이론이 효과적으로 적용될 수 있다.

그리고 본 논문에서는 다구찌의 SN 비가 가져올 수 있는 오류를 공리설계의 설계행렬과 연계시켜 설명하였다. 그리고 향후과제로써 분산을 보다 효과적으로 구하는 방법에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

(1) Hwang, K.H., 2002, " Robust Design Using Robustness Index and Decoupled Method," Ph. D. Thesis, Hanyang University, Seoul, *In Korean*.
(2) Phadke, M.S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
(3) Lee, K.H. and Park, G.J., 2002, "Robust Optimization in Discrete Design Space for Constrained Problems," *AIAA Journal*, Vol.40, No.4, pp. 774-780.
(4) Suh, N.P., 2001, *Axiomatic Design: Advances and Applications*, Oxford University Press, New York.
(5) Lee, K.W. and Park, G.J., 2000, "A Structural Optimization Methodology Using the Independence Axiom," *Transactions of KSME A*, Vol.24, No.10, pp. 2438-2450.
(6) Taguchi, G., 1987, *System of Experimental Design*, Kraus International Publications, New York.
(7) Montgomery, D. C., 1991, *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Inc., Singapore.
(8) Grandhi, R.V., 1993, “Multiobjective Optimization of Large-Scale Structures,” *AIAA J.*, Vol.31, No.7, pp.1329-1337.
(9) Rao, S.S., 1987, “Game Theory Approach for Multiobjective Structural Optimization,” *Computers & Structures*, Vol.25, No.1, pp. 119-127.
(10) Spallino, R., Rizzo, S., 2002, “Multi-Objective Discrete Optimization of Laminated Structures,” Mechanics Research Communications, Vol.29, pp.17-25.
(11) Dhinga, A.K., Lee, B.H., 1994, “A Genetic Algorithm Approach to Single and Multiobjective Structural Optimization with Discrete-Continuous Variables, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.37, pp.4059-4080.