X-FEM 을 이용한 최적설계 기법

허재성† · Tezuka Akira* · 곽병만**

Optimization technique using the eXtended FEM

Jae-Sung Huh, Tezuka Akira and Byung-Man Kwak

Key Words : Optimal design(최적설계), FEM(유한요소법), extended FEM(확장 유한요소법)

Abstract

Optimization has been used in many engineering problems and must be one of the essential components during design process now. It is the process of maximizing the performance called an objective function of a system while satisfying some constraints, so finite element method is generally required in order to obtain these values during optimization. However, there are some difficulties to obtain them by means of FEM, where the changes of design variables cause the distortion and the regeneration of mesh that may result in inaccuracy and inefficiency. In order to overcome this problem, this paper proposed an alternative that the eXtended FEM introduced and developed by Ted Belytschko was applied to the optimization process because the key points of the X-FEM lie in that the discontinuity can be represented independently on the mesh by a function called in an enrichment function.

1. 서 론

최적설계는 제조공정, 운송 스케줄링 (transportation scheduling), 네트웍(networks)과 기계 구조문제등과 같은 광범위한 문제에 적용이 되어 오고 있다.[(1)-(2)] 이러한 문제들은 더욱더 복잡해지고 있어 최적설계는 설계과정에서 아주 중요한 요소로 자리를 잡고 있다. 1960, 1970 년대에 최적설계 문제를 해결하는 몇 가지 중요한 알고리즘들이 개발되었으며, 현재 상용 프로그램들이 시판되고 있다. 그러나, 최적화는 제한조건들을 만족시키는 범위에서 목적함수인 시스템의 성능척도를 최대화하는 과정이므로 실험 혹은 시뮬레이션을 통하여 목적함수와 제한조건들의 값을 얻어야만 한다. 기계공학분야에서는 최대 등가응력, 변위, 고유진동수와 같은 제한조건하에 전체 질량을 최소화하는 문제가 일반적이며 이러한 값들은 유한요소법을 통해 일반적으로 계산된다.

† 한국과학기술원 기계공학과 박사과정
E-mail : jshuh@khp.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-5004 FAX : (042)869-8270
* AIST(일본), 선임 연구원
** 한국과학기술원 기계공학과 석좌교수

유한요소법이 1970 년대 컴퓨터의 비약적인 발전과 더불어 성장하여 최적설계 기법의 발전에 기여를 하였지만, 아직도 최적화 과정에 적용할 때 효율성과 정확성측면에서 몇 가지 해결해야 할 문제가 남아있으며 그것은 격자의 재생성과 격자의 찌그러짐 현상이다. 특히 최적화 과정에서 설계변수의 변화는 격자의 재생성을 필요로 하며 이때 격자의 찌그러짐 현상은 피할 수 없으며 큰 문제인 경우 격자의 재생성은 많은 시간을 필요로 하는 작업이 된다. 그래서 이 논문에서는 Ted Belytschko 가 제안하고 개발한 확장 유한요소법 (eXtended FEM)[(4)-(5)]을 최적화 과정에 도입하여 앞서 설명한 문제를 해결하려 한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2 장에서는 확장 유한요소법과 최적설계에 대해 기본적인 이론이 서술되어 있고 3 장에서는 확장 유한요소법과 유한요소법의 결과를 비교하고 제안된 최적설계 방법의 간단한 예제에 대한 적용 결과를 제시하였다. 마지막으로 간단한 토의를 4 장에 기술하였다.

2. 이론

2.1 최적설계

대부분의 공학문제는 최적설계를 포함하고 있으며 이는 주어진 제한조건 범위에서 목적함수를 최소 혹은 최대화시키는 과정이다. 그러므로 일반적인 제한 최적화 문제는 다음과 같은 형태의 수식[(1)]으로 표현된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ &\text{and} && h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

where $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ is a column vector of n real-valued design variables. f is the objective function, g' s are inequality constraints and h's are equality constraints.

이러한 문제를 해결하는 데는 Zoutendijk 의 가용탐색법(Zoutendijk's method of feasible directions), 순차 선형 계획법(Sequential linear programming), 순차 이차 계획법(Sequential quadratic programmming)과 같은 민감도를 기반하는 하는 방법과 반응표면법, 유전자 알고리즘과 같이 함수 값을 기반으로 하는 방법들이 있다. 이 논문에서는 이러한 알고리즘의 개발이 아니라 확장 유한요소법을 이용한 최적화 방법에 초점이 맞추어져 있으므로 이와 관련된 자세한 설명을 생략하도록 하겠다.

그림 1 에는 일반적인 최적화의 진행절차를 기술하고 있으며 이 과정 중에서 초기해석, 유한차분법을 이용한 민감도 해석, 1 차원 탐색과정에서 시스템의 해석을 필요로 하며 기계 구조물의 최적화인 경우 유한요소법이 주로 이용된다. 유한요소법은 최적설계의 매 과정마다 설계변수의 변화에 따른 국부적인 변화에도 전체 유한요소 모델을 재생성하므로 비효율적이고 격자의 찌그러짐 현상이 발생할 수 있다. 그러나 2.2 절에서 설명할 확장 유한요소법은 격자가 독립적인 존재이므로 최적화 과정에서 설계변수의 변화와 무관하게 고정되어 있고, 내부의 형상을 나타내는 함수의 파라미터들만이 최적설계 과정에서 바뀌어 고정된 격자와 결합하여 계산되므로 효율적이다. 실제 최적화 과정에서의 차이에 대한 구체적인 설명은 3.2 절에 기술되어 있다.

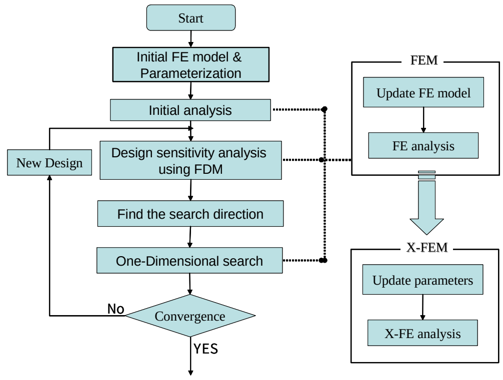


Fig. 1 FEM- and X-FEM-based procedure

2.2 X-FEM

유한요소법을 이용하여 균열(crack), 폴(pore), 개재물(inclusions)과 같은 기하학적인 불연속을 모델링은 아주 성가신 작업이며, 이러한 불연속면이 균열의 성장에 따라 움직인다면 격자의 찌그러짐 현상을 유발하게 되며 매 과정마다 유한요소 모델의 업데이트라는 단순한 반복작업을 요구하게 된다. 이러한 점을 극복하기 위해 Ted Belytschko 는 확장 유한요소법(extended FEM)을 제안하였다. 이 방법은 강화 함수(enrichment function)라는 함수를 도입하여 불연속면을 격자와 함수로 분리하여 표현하는 것이 특징이다. 이러한 특성을 이용하여 최적설계과정에도 적용이 가능하다. 즉, 격자가 독립된 존재이므로 최적화 과정에서 고정되어 있고 내부의 불연속면을 나타내는 함수의 파라미터만을 설계변수로 하여 변경하면 내부 불연속면의 형상을 격자의 재생성 없이 최적화가 가능하다.

그림 2 와 같이 유한요소 모델로 나누어진 영역 –$\Omega \subset R^2$–을 고려하자. $\mathbf{N}=\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m\}$은 격자 내에 m 개의 절점 집합을 나타낸다. 이것은 2 개의 부분으로 나누어진다: 경계와 관련된 영역, 즉 회색영역–Ω^g–과 그 이외의 영역이다. 이때 확장 유한요소법은 경계 영역에서의 변위 근사를 기존의 유한요소법과 다르게 근사를 한다. 아래의 식[(5)]에서 알 수 있듯이 기존의 변위를 근사에 사용된 첫 번째 항에 강화함수라 불리는 두 번째 항이 결합되어 있다. 이 강화함수 항이 경계영역을 표현하고 있는 것이다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \phi_J(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_J \quad \mathbf{u}_I, \mathbf{a}_J \in R^2$$

where the nodal set $\mathbf{N}^g$ and an enrichment function ψ are defined as

$$\mathbf{N}^g = \{n_J \,:\, n_J \in \mathbf{N},\ \omega_J \cap \Omega_J \neq \phi\},$$

$\psi(x) = \left|\sum_J \phi_J(x)\varphi_I\right|$ where φ_I represents the nodal value of the level set function.

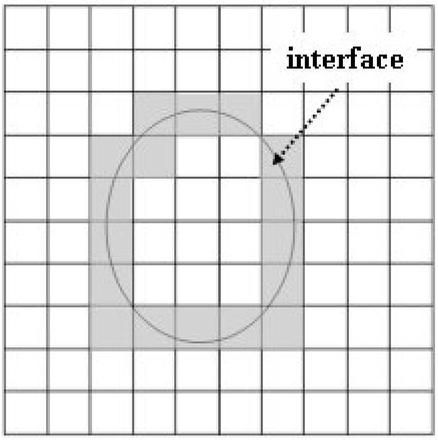
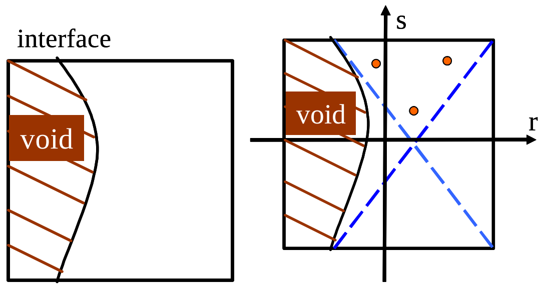


Fig. 2 Finite element mesh and partition

전체적인 시스템 행렬 방정식은 기존의 유한요소법과 동일한 절차로 구성이 되지만 불연속면과 관련된 요소에 대한 수치적분이 필요하게 되며 된다. 이때 강화함수에 대한 적분 항과 경계로 인한 적분영역을 새롭게 고려하여야 한다. 그림 3(a)와 같이 불연속면과 만나는 하나의 요소를 고려하자. 해치(hatch)로 표현된 부분은 빈 공간을 나타내며 그 이외는 물질로 채워져 있다. 후자를 적분하기 위해 그림 3(b)와 같은 영역을 삼각형으로 분리한 뒤 적분하게 되어 야고비안(Jacobian) 행렬이 아래의 수식과 같이 두 번의 변환을 거치는 형태가 된다. 그러므로 수치적분은 그림 4 와 같은 공간에서 이루어지며 3 개의 적분점을 이용하여 적분을 한다. 여기서 삼각형으로 다시 한번 나누는 것은 오직 수치적분을 하기 위해서이다.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial s}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial s}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial s}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix}$$



(a) One element (b) Regions for integration

Fig. 3 Numerical integration

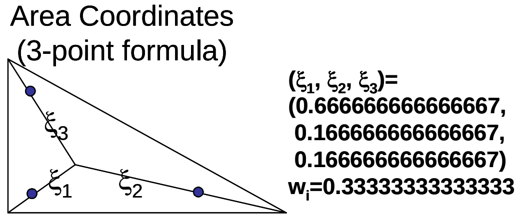
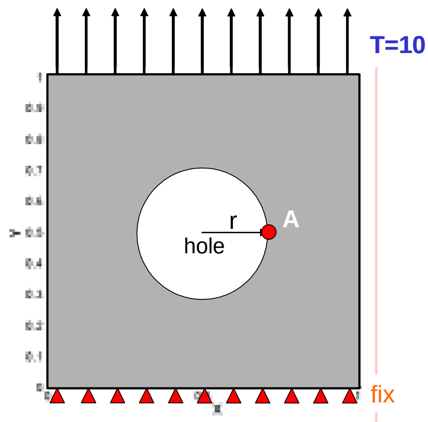


Fig. 4 Sampling points

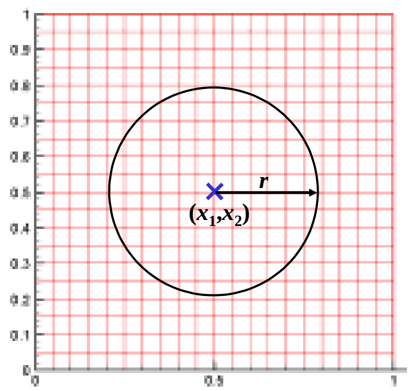
3. 적용 사례

3.1 타원형 구멍을 가진 평판 문제 해석

확장 유한요소법 코드의 수렴성 및 정확성을 점검하기 위해 2 차원 선형 탄성문제에 적용을 하였다. 그림 5(a)와 같이 구멍의 반지름이 0.2 이고 가로와 세로가 각각 1 인 평판을 고려하자. 이 평판의 윗부분은 T=10 이 가해지고 아랫부분은 고정되어 있다. 확장 유한요소법을 이용하여 해석하기 위해서 그림 5(b)와 같이 내부 구멍이 표현되지 않은 단순한 평판의 격자와 내부의 불연속면인 구멍을 표현하는 아래와 같은 레벨 셋(level set) 함수로 구성된다.



(a) Plate with a hole



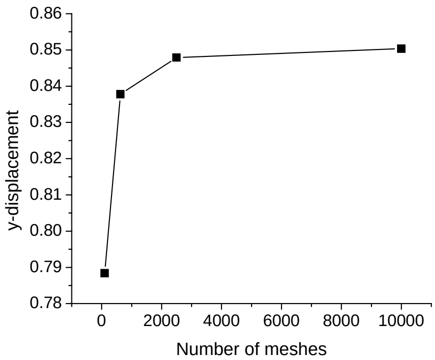
(b) fixed mesh and circle

Fig. 5 Problem description and mesh

$$\varphi_I = \left\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_c\right\| - r_c = \sqrt{(x_1 - x_{c1})^2 + (x_2 - x_{c2})^2} - r_c$$

where $\mathbf{x}_c$ and r_c are the center and radius of the circular hole.

해의 수렴성을 확인하기 위해 그림 5(b)와 같은 모양의 10×10, 20×20, 25×25, 50×50, 100×100 격자를 각각 사용하였다. 그림 6 에서 반지름인 0.20 인 경우에 대해 y 축 방향의 응력, σ_{22}, 와 y 축 방향의 최대 변위를 사용된 요소의 개수에 따라 수렴성을 확인하였으며, 그림 7 에서는 상용 유한요소법 프로그램인 ANSYS 와 X-FEM 에서 계산한 응력, σ_{22}, 을 비교하였다. 25×25 격자에서 변위와 응력 모두 충분히 수렴한 것을 확인할 수 있으며, 그림 7 에서는 ANSYS 의 결과와 X-FEM 의 결과가 잘 일치함을 확인할 수가 있다.



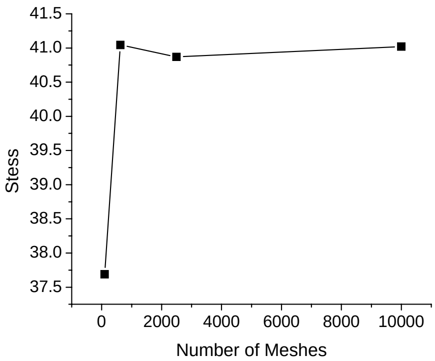
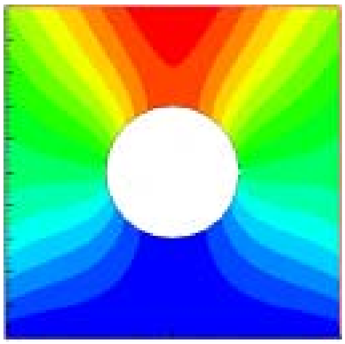


Fig. 6 Convergence of displacement, d_2 and stress component, σ_{22}



(a) X-FEM

(b) FEM

Fig. 7 Contour plot of the normal stress σ_{22}

마지막으로 3 개의 다른 반지름–0.15, 0.20, 0.25–을 가진 원에 대해서 y 축 방향의 변위와 응력을 ANSYS 와 비교를 하고 그 결과를 표 1 에 정리하였다. ANSYS 에서는 1600 개의 사각형 요소가 사용되었으며 확장 유한요소법은 2500 개의 요소로 구성된 고정된 격자를 사용하였다. 그러나, 구에 포함된 요소는 실질적으로 해석에 사용이 되지 않으므로 2100 개 정도만이 해석에 사용되었다. 표 1 에서 알 수 있듯이 아주 미묘한 에러만이 존재하며 이는 경계조건의 처리방법으로 기인하는 것으로 추정이 된다.

Table 1 Comparison between X-FEM and FEM

	$(d_2)_{max}$	error	$(\sigma_{22})_{max}$	error
R=0.15	0.6557×10^{-3}	0.2%	35.54	0.6%
R=0.20	0.8479×10^{-3}	0.2%	40.89	0.3%
R=0.26	1.1867×10^{-3}	0.2%	49.50	0.8%

3.2 타원형 구멍의 최적화

그림 8 과 같은 형상, 치수, 경계조건을 가진 기계 구조에 아래와 같은 최적설계 문제를 정의하자.

$$\text{minimize} \quad a$$
$$\text{subject to } \sigma_{22} \le \sigma_0 (= 35)$$
$$0.05 \le a \le 0.35$$
$$0.05 \le b \le 0.70$$

where a is the pure area of the plate corresponding to the total mass and σ_{22} is a component of the stress

설계 변수–$\mathbf{X}=(a,\ b)^T$–은 평판 내부의 타원형 구멍의 장축과 단축을 나타내며 초기 값은 $\mathbf{X}_0=(0.2, 0.2)^T$ 이다.

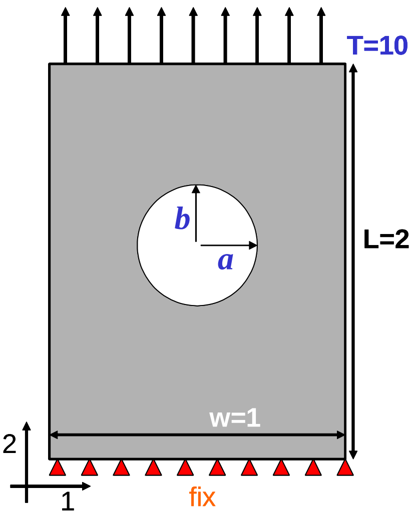


Fig. 8 Plate with an elliptical hole

성능척도는 앞서 언급한 확장 유한요소법에 의해 계산이 되며 민감도 해석은 유한차분법을 이용한다. 순차적 이차 계획법을 이용하여 최적설계를 구하면 표 2 와 그림 9 와 같은 결과를 얻게 된다. 이는 기존의 유한요소법을 기반으로 한 최적설계의 결과와 잘 일치를 하고 있다.

Table 2 Result of optimization

	Initial	Optimal
Objective function(a)	1.875	1.453
Constraint(=σ_{22})	37.43	35.00

응력제한 조건을 만족시키면서 면적을 최소화하기 위해 내부 구멍은 구에서 그림 9 와 같은 형태의 긴 타원형으로 바뀌어졌다. 설계 변수의 값은 $\mathbf{X}_0=(0.2, 0.2)^T$ 에서 $\mathbf{X}_f=(0.25, 0.70)^T$ 로 변경되었다.

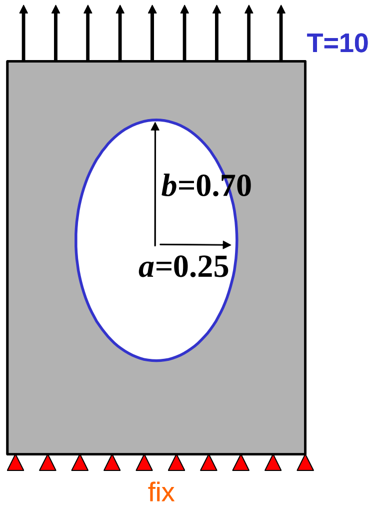


Fig. 9 Optimal design

최적화 과정에서 격자는 고정되어 있으며 타원형을 나타내는 레벨 셋(level set) 함수의 파라미터이며 설계 변수인 장축과 단축의 값만이 바뀌어지므로 설계변수의 변화에 따른 격자의 재생성과 격자의 찌그러짐을 고려할 필요가 없게 된다. 그러나 기존의 유한요소법을 사용한다면 그림 10 과 같이 맵트 메쉬(mapped mesh)를 이용하여 격자를 생성하여야 하며 설계 변수의 변화에 따라 매 과정마다 격자의 재생성이 필요하게 된다. 또한 이 과정에서 그림 10 과 같이 격자의 품질이 균일하게 되지 않게 된다.

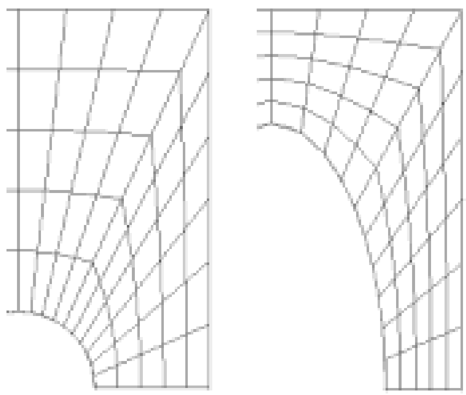


Fig. 10 Regeneration of mesh during optimization

4. 결 론

확장 유한요소법을 적용하여 간단한 문제에 대해 기존의 유한요소법과 수렴성 및 정확성을 비교 검토를 하여 만족할 만한 결과를 도출하였다. 그리고, 이 확장 유한요소법을 최적설계 과정에 도입하여 기존의 존재하는 어려움들인 격자의 재생

성에 따른 비효율성과 격자의 찌그러짐 현상을 해결할 수 있는 가능성을 보였다. 그러나, 이 방법은 구조물의 외부 형상에 대한 최적설계에는 적용할 수 없는 단점을 가지나, 내부 구멍과 같은 형상의 최적화에는 기존의 유한요소법을 대신할 수 있는 적합한 방법이라 할 수가 있다.

후 기

본 연구는 “동시공학설계개념에 의한 통합최적설계시스템 개발에 관한 연구 ” 의 일환으로 지원받았음을 밝힙니다.

참고문헌

(1) Ashok D. Belegundu, Tirupathi R. Chandrupatla, 1999, *Optimization concepts and application in engineering*, Prentice hall

(2) Edward J. Haug, Jasbir S. Arora, 1979, *Applied optimal design*, John wiley & sons

(3) Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, 1989, *Concepts and applications of finite element analysis*, John wiley & sons

(4) Nichlas Moes, John Dolbow, T. Belytschko, 1999, “A finite element method for crack growth without remeshing,” *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.46, pp.131-150

(5) N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moes, T. Belytschko, 2001, “Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.190, pp.6183-6200