

2축하중을 받는 직교이방성재료 내 균열의 임계응력

임원균[†] · 조형석^{*}

Critical Stress for a Crack in Orthotropic Material under Biaxial Loading

Won-Kyun Lim and Hyoung-Seok Cho

Key Words: Crack extension(균열진전); Orthotropic material(직방성재료); Biaxial loading(2축하중); Central crack(중앙균열); Critical stress(임계응력)

Abstract

The problem of an orthotropic material with a central crack is studied. The material is subjected to uniform biaxial loading along its boundary. The normal stress ratio theory is applied to predict fracture strength behavior in cracked orthotropic material. The dependence of the critical stress with respect to the biaxial loading and the crack orientation is discussed. Our analysis shows significant effects of biaxial loading on the critical stress. The additional term in the asymptotic expansion of the crack tip stress field appears to provide more accurate critical stress prediction.

1. 서론

복합재료와 같은 고등 공업용 재료가 항공기, 자동차 그리고 발전설비 시스템 등과 같은 여러 분야에서 사용되고 있다. 이들 시스템의 안전과 신뢰성은 시스템을 구성하고 있는 구성요소의 설계에 좌우된다. 설계의 과정에서 이들 구성요소들은 응력집중부위를 갖게 되며, 요소에 작용하는 하중에 의하여 이들 부위에 균열이 발생하게 된다. 따라서 이러한 균열을 가진 요소에 대한 파괴강도해석은 시스템의 안전을 위하여 매우 중요하다.

복합재료내 구성요소들은 자주 2축방향으로의

하중상태에 놓이게 된다. 그러므로 이와 같은 고등 복합재료를 최대한 안전하게 사용하기 위해서는 이와 같이 복잡한 하중을 받는 요소의 파괴강도에 대한 해석이 이루어져야 한다. 균열을 가진 복합재료의 강도거동에 대한 예측은 해석적으로 매우 복잡하므로 이에 대한 연구는 많지 않다. 소수의 이론적 수법 중에서 수직응력비이론은 직방성 복합재료내 균열진전거동을 비교적 정확히 나타내 주고 있다[1-3]. 본 연구에서는 이의 이론을 적용하여 이방성재료의 주축과 균열축이 평행한 직방성 복합재료가 2축방향으로 혼합모드의 하중을 받는 중앙경사균열의 문제를 다룬다. 가로축과 평행으로 작용하는 수평하중과 균열경사각이 균열진전각도와 임계응력에 미치는 영향을 정량적으로 제시하고자 한다.

[†] 명지대학교 기계공학과

E-mail : limwk@mju.ac.kr

TEL : (031)330-6422 FAX : (031)321-4959

^{*} 명지대학교 대학원

2. 2축하중을 받는 균열선단 주위의 응력

Fig. 1과 같은 2축하중을 받는 무한 이방성평판내 경사균열의 해석함수식은 Saivin[4]에 의한

경사하중을 받는 타원공 해석해를 중첩하여 구할 수 있다. 이와 같은 수법을 이용한 균열선단에서의 응력성분들은 최승룡[5]에 의하여 다음과 같이 구하여졌다.

직각좌표로 표시한 식(1)의 응력성분들 중에서 σ_{xx} 의 우측 마지막 항은 직교이방성체내 균열선단 부근의 응력함수에 대한 급수전개식에서 비특이항 응력성분을 나타낸 것으로서, 이의 성분은 외부작용응력 σ^∞ 와 수평하중비 k , 균열경사각 α 그리고 특성방정식의 근 s_1, s_2 의 항으로 되어 있다.

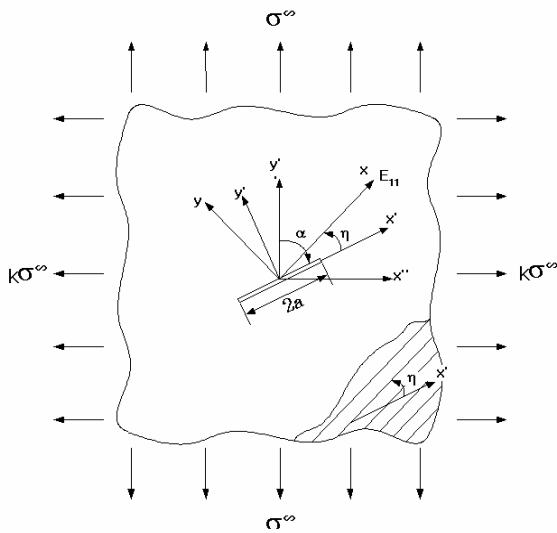


Fig. 1 Infinite center cracked plate under biaxial loading

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \sigma^\infty \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) \\ & + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 응력확대계수 K_I 과 K_{II} 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_I = & (\sigma^\infty \sin^2 \alpha + k \sigma^\infty \cos^2 \alpha) \sqrt{\pi a} \\ = & \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} [(1+k) - (1-k) \cos 2\alpha] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{II} = & -(k \sigma^\infty - \sigma^\infty) \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\pi a} \\ = & \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} (1-k) \sin 2\alpha \quad (5) \end{aligned}$$

3. 임계응력의 결정

직방성 복합재료 내 균열의 진전방향과 임계응력의 예측을 위하여 Buczek 와 Herakovich[1]에 의해 개발된 수직응력비기준을 적용하였다. 복합재료에 있어서 균열의 진전은 Fig. 2 에서와 같이 섬유 방향에 따라 다른 이방성강도함수 $T_{\theta\theta}$ 를 가정하고, 이를 원주인장응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 에 나누어줌으로써 얻은 값 즉, 수직응력비 R_0 가 최대인 방향으로 균열이 진행하며, 균열진전은 이의 값이 임계값, $R_0 \max$ 에 도달했을 때 일어난다고 가정한다. 이에 대한 필요충분조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} < 0 \quad (7)$$

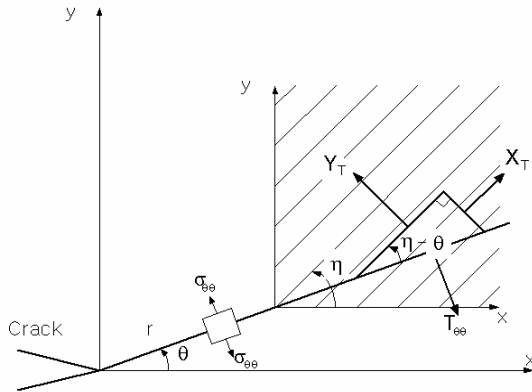


Fig. 2 Normal stress ratio parameters.

여기서 $T_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$T_{\theta\theta} = X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta) \quad (8)$$

위의 식에서 X_T 는 재료주축 방향의 인장강도이고, Y_T 는 재료주축과 수직방향의 인장강도이다.

한편 균열선단 주위의 원주응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (9)$$

식(1)~(3)을 식(9)에 대입하면 다음의 원주응력분포식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{K_{\perp}}{\sqrt{2\pi r}} (A \sin^2 \theta - 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \\ & + \frac{K_{\parallel}}{\sqrt{2\pi r}} (B \sin^2 \theta - 2F \sin \theta \cos \theta + D \cos^2 \theta) \\ & + \sigma^{\infty} L \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$A = \text{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{z_2} - \frac{s_1}{z_1} \right) \right]$$

$$B = \text{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2^2}{z_2} - \frac{s_1^2}{z_1} \right) \right]$$

$$C = \text{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{z_2} - \frac{s_2}{z_1} \right) \right]$$

$$D = \text{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) \right]$$

$$E = \text{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \right]$$

$$F = \text{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{z_1} - \frac{s_2}{z_2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} L = & \text{Re} \left[(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha) (\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) \right. \\ & \left. + k (\sin \alpha - s_1 \cos \alpha) (\sin \alpha - s_2 \cos \alpha) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

식(8)과 식(10)을 식(6)에 대입하고 정리하면 수직응력비 R_0 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} R_0 = & \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(K_{\perp} A + K_{\parallel} B) \sin^2 \theta + (K_{\perp} C + K_{\parallel} D) \cos^2 \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{2(K_{\perp} E + K_{\parallel} F) \sin \theta \cos \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)} + L_R \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$L_R = \frac{\sigma^{\infty} L \sin^2 \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)}$$

여기서 L_R 은 $\sigma_{\theta\theta}$ 의 원주응력성분에서 비특이항인 $\sigma^{\infty} L \sin^2 \theta$ 을 고려하였을 때 부가되는 새로운 항으로, 여기에는 특성방정식의 근, 수평하중비, 균열경사각, 재료강도 그리고 균열축과 재료주축이 이루는 각도들이 포함되어 있다.

수직응력비 이론의 가정으로부터 균열진전은 수직응력비의 최대값, $(R_0 \max)_{\theta=\theta_0}$ 에서 일어나므로 순수모드 I의 경우 $(R_0 \max)_{\alpha}$ 는 식(12)에 $k=0$, $\eta=0$, $\alpha=90^\circ$ 와, $\theta=\theta_0=0$ 을 대입하여 구할 수 있으며 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (R_0 \max)_{\alpha=90^\circ} = & \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{K_{\perp} C}{Y_T} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{\sigma_c^{\infty}{}_{\alpha=90^\circ} \sqrt{\pi a}}{Y_T} \\ = & \sigma_c^{\infty}{}_{\alpha=90^\circ} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{2r}} \frac{1}{Y_T} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $K_{\perp} = \sigma_c^{\infty}{}_{\alpha=90^\circ} \sqrt{\pi a}$ 이고, $C=1$ 이다.

한편 혼합모드인 경우 $R_0 \max)_\alpha$ 는 식(12)에 $\theta = \theta_0$ 을 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_0 \max)_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(K_I A + K_{II} B) \sin^2 \theta_0 + (K_I C + K_{II} D) \cos^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} - \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(2K_I E + 2K_{II} F) \sin \theta_0 \cos \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} + L_R(\theta_0) \quad (14)$$

여기서 $L_R = \frac{\sigma_c^\infty)_\alpha L \sin^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)}$ 이다.

식(14)에 식(4)와 (5)인 K_I 과 K_{II} 를 대입하여 정리하면 상기식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_0 \max)_\alpha = \sqrt{\frac{\pi a}{2r}} \cdot \frac{\sigma_c^\infty)_\alpha}{2} \cdot \left[\frac{(GA + HB) \sin^2 \theta_0 + (GC + HD) \cos^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} - \frac{(2GE + 2HF) \sin \theta_0 \cos \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} + \sqrt{\frac{2r}{\pi a}} \frac{2L \sin^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} \right] \quad (15)$$

여기서

$$G = [(1 + k) - (1 - k) \cos 2\alpha] \\ H = (1 - k) \sin 2\alpha \quad (16)$$

식(13)과 식(15)를 같다고 놓으면 혼합모드의 임계응력비, $\frac{\sigma_c^\infty)_\alpha}{\sigma_c^\infty)_\alpha=90^\circ}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\sigma_c^\infty)_\alpha}{\sigma_c^\infty)_\alpha=90^\circ} = \left[\frac{2}{Y_T} \cdot \{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)\} \right] / \left[\{(GA + HB) \sin^2 \theta_0 + (GC + HD) \cos^2 \theta_0\} - (2GE + 2HF) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{2r}{\pi a}} 2L \sin^2 \theta_0 \right] \quad (17)$$

4. 수치해석결과 및 고찰

수치해석을 위하여 Fig. 1과 같이 2축하중을 받

는 직방성복합재료 내 중앙경사균열에 대하여 해석을 수행하였다. 본 해석에서 사용된 재료의 특성치는 $E_{11}=2.0\text{GPa}$, $E_{22}=1.389\text{GPa}$, $\mu_{12}=0.769\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.3$, $X_T=2.0\text{GPa}$, $Y_T=1.0\text{GPa}$ 이다. 균열은 재료주축방향과 평행하며, 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01$ 로 놓았다.

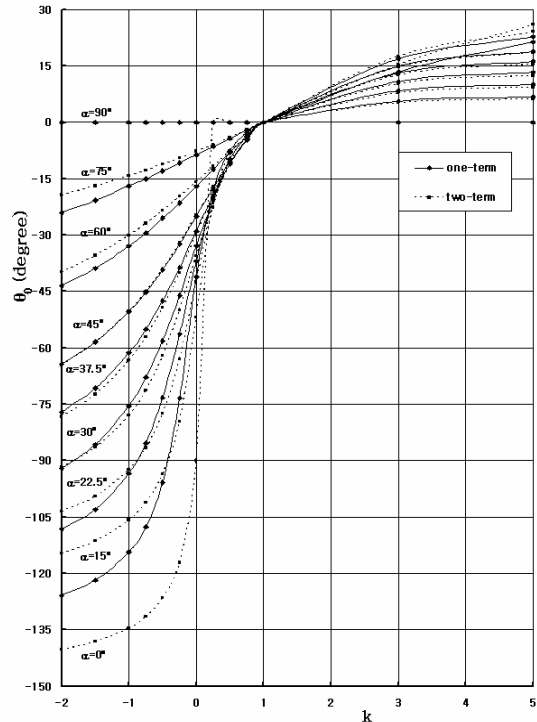


Fig. 3 Variation of θ_0 with k

Fig. 3은 수평하중비에 대한 초기균열진전각도를 보여준 것으로서 균열경사각의 변화에 따라서 달리 도시하였다. 그림에서 실선은 균열선단주위의 응력식에서 특이응력성분만을 고려하여 해석한 결과이고, 점선은 응력식에서 2차항인 비특이항까지를 고려한 결과이다.

균열의 진전은 균열경사각 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우를 제외하고 재료주축과 경사를 이루며 일어난다. 이는 재료주축과 평행으로 일어난다고 하는 일반적 규칙과는 다른 현상으로, 수평하중비가 양의 값보다도 음의 값을 가질 때에 심화되며, 균열경사각이 작을수록 재료주축과 더욱 벗어난다. 또한 균열진전각도에 미치는 비특이항의 영향은 k 가 1보다 작은 값을 가질 수록 크게 나타나며, 균열

경사각이 작을수록 더욱 크게 나타남을 알 수 있다.

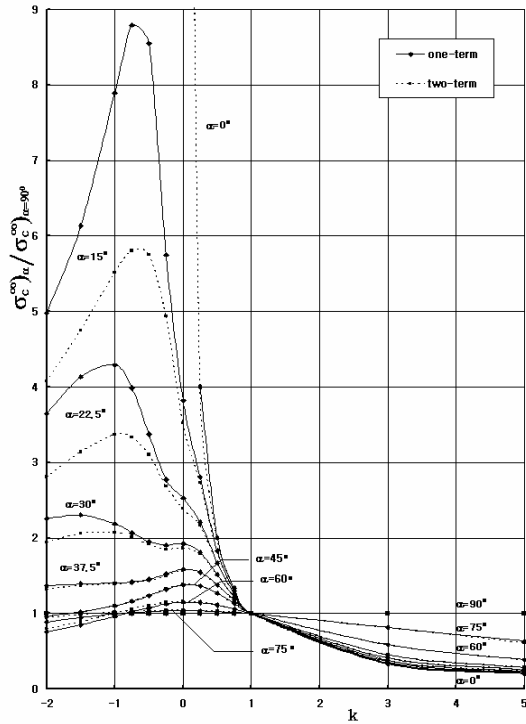


Fig. 4 Variation of $\sigma_c^\infty / \sigma_c^\infty|_{\alpha=90^\circ}$ with k

Fig. 4는 수평하중비에 대한 임계응력비를 보여준 것으로서 균열경사각의 변화와 함께 도시하였다. 그림에서 실선은 특이응력성분만을 고려하여 해석한 결과이고, 점선은 비특이항까지를 고려한 결과이다.

k 가 1보다 큰 경우 즉, 인장으로의 수평하중이 주어지면 임계응력은 작아지며, 반대로 k 가 1보다 작은 값을 가지면 임계응력은 커짐을 알 수 있다. 특히 k 가 -1과 1사이에서 임계응력은 급격한 증가를 보이며, 압축수평하중의 증가(k 의 값이 작아지는 경우)와 함께 임계응력은 다시 작아진다. 이와 같은 현상은 균열경사각이 작을수록 더욱 뚜렷하게 나타난다.

임계응력에 미치는 비특이항의 영향은 k 가 1보다 작은 값을 가지며, 균열경사각이 작을수록 더욱 크게 나타난다. 이와 같은 현상은 균열진전각도의 예측결과와 유사하다. 이러한 경우에 정확

한 임계하중의 예측을 위해서는 비특이항을 고려한 해석이 필요하다.

균열경사각에 따른 임계응력의 변화를 명확히 나타내기 위하여 이의 결과를 Fig. 5에 도시하였다. 균열경사각이 작을수록 임계응력에 미치는 수평하중의 영향을 커짐을 알 수 있다. 이는 압축수평하중을 받을 때에 더욱 커진다. 균열경사각 35도 이하의 수직에 가까운 균열이 압축하중을 받을 때에 임계응력은 $k=1$ 부근에서 최고값을 보이며, 이후 압축수평하중이 증가하면서 다시 작아진다.

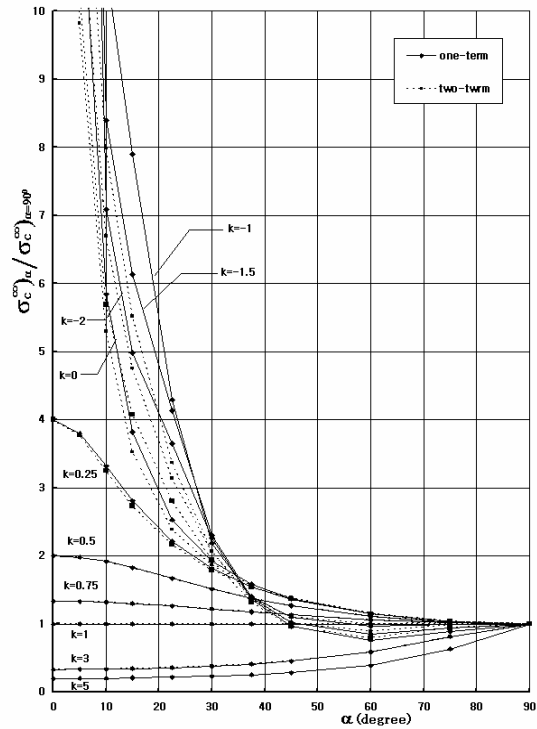


Fig. 5 Variation of $\sigma_c^\infty / \sigma_c^\infty|_{\alpha=90^\circ}$ with α

5. 결론

직방성 복합재료의 외부경계에서 2축하중을 받는 중앙균열에 대한 파괴강도해석을 수행하였다. 수직응력비기준을 적용한 임계응력의 예측에서 임계응력은 균열경사각과 수평하중비에 많은 영향을 받고 있음을 확인하였다. 균열경사각이 작을

수록 입계응력에 미치는 수평하중의 영향은 커짐을 알 수 있었으며, 이는, 압축수평하중을 받을 때에 더욱 커진다. 입계하중에 미치는 비특이항의 영향은 압축수평하중이 주어지고, 균열경사각이 작을수록 크게 나타남을 알 수 있었다. 이러한 경우에 정확한 입계응력의 예측을 위해서는 비특이항을 고려한 해석이 필수적임을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Beuth Jr, J.L. and Herakovich, C.T., 1985, "A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials", J. Compos. Mater, Vol. 19, pp.544-553.
- (2) Beuth Jr, J.L. and Herakovich, C.T., 1989, "Analysis of Crack Extension in Anisotropic Materials Based on Local Normal Stress", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 11, pp. 27-46.
- (3) 임원균, 최승용, 2002, "2축하중을 받는 직교 이방성체내 경사균열의 해석", 대한기계학회논문집 A, 제26권 제6호, pp. 993-1000.
- (4) Savin, G.N., 1961, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, Oxford.
- (5) Choi, S.Y, 1996, "Biaxial Load Effects on the Crack Extension in Orthotropic Materials, MS Thesis, MyongJi University.
- (6) Lekhnitskii, S.G., 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Holden-Day, San Francisco, USA