

지수형적 물성변화를 갖는 함수구배 재료에서 구배방향을 따라 전파하는 균열 해석

이 광 호 (상주대학교)*

Analysis of a Crack Propagating Along the Gradient in Functionally Gradient Materials with Exponential Property Gradation

Kwang Ho Lee

Key Words : Exponential Property Gradation (지수형적 물성변화), Functionally Gradient Materials (함수구배재료), Nonhomogeneous Fields (비 균질장), Propagating Crack (전파균열)

Abstract

Stress and displacement fields for a propagating crack in a functionally gradient material (FGM) which has exponentially varying elastic and physical properties along the direction of the crack propagation, are derived. The equations of motion in nonhomogeneous material are developed using displacement potentials. The solutions to the displacement fields and the stress fields for a crack propagating at constant speed along the gradient are obtained through an asymptotic analysis. The influences of nonhomogeneity on the higher order terms of the stress fields are explicitly brought out. Using these stress components, isochromatic fringes around the stationary crack are generated at crack for different nonhomogeneity and the effects of nonhomogeneity on these fringes are discussed.

1. 서 론

최근 새로운 범주의 공학재료인 함수구배재료가 개발되고 있다. 함수구배재료는 대개 높은 열을 받는 구조물에 사용되고 있으며, 재료의 구성물은 철과 세라믹이 주성분이다. 함수구배재료는 철의 강성과 세라믹의 열 및 부식성이 우수한 점을 이용하여 높은 열저항성과 부식성이 요구되는 부분에는 세라믹의 함유량이 높고 강성이 요구되는 부분에는 철의 함유량이 높다. 따라서 함수구배재료는 재료의 물성치가 공간적으로 변화하며, 대개 표면부에는 높은 열저항성을 갖고 내부에는 높은 강성을 갖는다.

본 연구의 관점은 FGM의 전파균열선단 부근에 대한 응력과 변위에 대한 거동을 연구하는 것이

다. Delale 등⁽¹⁾은 지수함수적인 탄성계수를 갖는 함수구배재료의 균열선단에서 응력장은 등방성 재료와 같이 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 갖고 있음을 확인하였으며, 이어서 Eischen⁽²⁾ 과 Jin 및 Noda⁽³⁾등에 의해서 이러한 결론이 재확인 되었다. 또한 그들은 FGM의 균열선단에서 응력장의 재배향은 균질 재료의 균열선단에서 응력장의 지배향과 같음을 확인하였다.

지금까지 FGM의 파괴역학적인 해석은 주로 정적상태의 균열에 대하여 수행하여 왔으며, 동적 문제에 대한 해석은 Paramswaran과 Shukla⁽⁴⁾등이 재료의 물성치가 X방향으로 선형적 또는 비선형적으로 변화하는 FGM에서 전파하는 균열의 응력장과 변위장을 얻기 위한 기초적인 연구를 수행한 바가 있으며, 균열선단에서 응력을 지배하는 주된 항은 $r^{-1/2}$ 특이성을 가짐을 확인하였다. 본 연구에서는 균열전파방향이 재료의 물성치변화의 방향과 일치하는 경우 FGM재료의 균열선단 응력장과 변위장을 유도하고 이들에 대한 특성을 연구하는 것이 본 연구의 목적이다.

* 상주대학교 기계공학부

E-mail : khlee@sangju.ac.kr

TEL : (054)530-5404 FAX : (054)530-5407

2. 전파균열의 응력장과 변위장

2.1 평형방정식의 공식화

본 연구에서 사용된 FGM의 전단계수와 밀도는 방정식 (1)과 같은 함수를 가진다고 가정한다.

$$\mu = \mu_o \exp(\zeta X), \quad \rho = \rho_o \exp(\zeta X) \quad (1)$$

방정식 (1)과 같은 조건하에서 응력과 변형률의 관계는 방정식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= e^{\zeta X} [a_{11} \epsilon_{XX} + a_{12} \epsilon_{YY}] \\ \sigma_{YY} &= e^{\zeta X} [a_{12} \epsilon_{XX} + a_{11} \epsilon_{YY}] \\ \sigma_{XY} &= e^{\zeta X} \mu_o \gamma_{XY} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ζ 는 FGM 상수, X, Y 는 기준 좌표축, a_{ij} 는 탄성계수로서 $a_{11} = \lambda_o + 2\mu_o$, $a_{12} = \lambda_o$ 이고 λ_o 와 μ_o 는 $X=0$ 에서 라미의 탄성상수와 전단탄성계수를 나타낸다. 변위와 팽창과 및 회전파와의 관계는 방정식 (3)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (3)$$

여기서 Φ 와 Ψ 는 팽창파와 회전파에 관계되는 함수이다. 한편 동적인 문제에서 평형방정식은 방정식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YY}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

방정식 (3)를 방정식 (2)에 대입하고 이것을 다시 방정식 (4)에 대입하면 방정식 (5)와 같은 동적상태의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ (k+2) \nabla^2 \Phi - \frac{\rho_o}{\mu_o} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nabla^2 \Psi - \frac{\rho_o}{\mu_o} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right\} \\ + \zeta \left\{ k \nabla^2 \Phi + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ (k+2) \nabla^2 \Phi - \frac{\rho_o}{\mu_o} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nabla^2 \Psi - \frac{\rho_o}{\mu_o} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right\} \\ + \zeta \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5-b)$$

균열이 기준좌표계(X, Y)의 X 방향을 따라 전파할 때 균열선단의 이동좌표계(x, y)와의 관계는 $x = X - ct$, $y = Y$ 이다. 이러한 관계를 방정식 (5)에 적용하여 정리하면 방정식 (6)과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\zeta}{k+2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (6-a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \zeta k \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (6-b)$$

여기서

$$\alpha_i = \sqrt{1 - \frac{\rho_o c^2}{\lambda_o + 2\mu_o}} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_i}\right)^2},$$

$$\alpha_s = \sqrt{1 - \frac{\rho_o c^2}{\mu_o}} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_s}\right)^2},$$

$$c_i = c_s \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}: \text{plane strain,}$$

$$c_i = c_s \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}: \text{plane stress}$$

방정식 (6)과 같은 편미분 방정식을 구하기 위하여 새로운 좌표계 $\eta_1 = x/\epsilon$, $\eta_2 = y/\epsilon$ 를 도입한다. 작은 ϵ 값을 선택하므로 균열선단 부근의 좌표점은 전체범위로 확장된다. 새로운 좌표계에 의해 방정식 (6)은 방정식 (7)와 같이 얻어진다.

$$\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_2^2} + \epsilon \zeta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} + \frac{1}{k+2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_2} \right] = 0 \quad (7-a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_2^2} + \epsilon \zeta \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1} + k \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} \right] = 0 \quad (7-b)$$

이 단계에서 Φ 와 Ψ 는 방정식 (8)과 같이 ϵ 의 멱급수열로 나타내자.

$$\Phi(x, y) = \Phi(\epsilon \eta_1, \epsilon \eta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2+1} \Phi_n(\eta_1, \eta_2) \quad (8)$$

$$\Psi(x, y) = \Psi(\epsilon \eta_1, \epsilon \eta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2+1} \Psi_n(\eta_1, \eta_2)$$

방정식 (8)을 방정식 (7)에 대입하여 각 ϵ 의 계수 미분방정식을 0으로 두면, 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_l^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_2^2} = -\zeta \left[\frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial \eta_1} + \frac{1}{k+2} \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial \eta_2} \right] \quad (9-a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_2^2} = -\zeta \left[\frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial \eta_1} + k \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial \eta_2} \right] \quad (9-b)$$

Φ_n 과 Ψ_n 는 $z_l(\eta_1, i\alpha_l \eta_2)$ 과 $z_s(\eta_1, i\alpha_s \eta_2)$ 의 함수를 가지며, $n < 0$ 인 경우에는 Φ_n 및 Ψ_n 는 0이 된다. 그리고 $\zeta=0$ 인 경우는 등방성재료에서 갖는 라플라스형태의 편미분 방정식으로 됨을 알 수 있다.

2.2 응력장과 변위장 for $n=1, 2$

방정식 (9)에서 $n=1, 2$ 에 대하여 다음과 같은 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_l^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_2^2} &= 0 \\ \alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$n=1, 2$ 에 대한 Φ_n, Ψ_n 의 일반적인 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_n = -\text{Re} \int \phi_n(z_l) dz_l, \quad \Psi_n = -\text{Im} \int \psi_n(z_s) dz_s \quad (11)$$

여기서 $z_l = \eta_1 + i\alpha_l \eta_2$, $z_s = \eta_1 + i\alpha_s \eta_2$ 이다.

방정식 (11)의 Φ_n 및 Ψ_n 을 방정식 (3)에 적용하면 변위장은 $\epsilon^{n/2} \{ \phi_n(\eta_1, \eta_2), \psi_n(\eta_1, \eta_2) \}$ 와 같이 표현된다. 그리하여 실제 좌표계에서 변위장은 방정식 (12)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= -\text{Re} \{ \phi_n(z_l) + \alpha_s \psi_n(z_s) \} \\ v &= \text{Im} \{ \alpha_l \phi_n(z_l) + \psi_n(z_s) \} \end{aligned} \quad (12)$$

방정식 (12)을 방정식 (2)에 대입하면 실제 평면에서 응력장은 방정식 (13)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\mu \text{Re} \{ (1 + 2\alpha_l^2 - \alpha_s^2) \phi'_n(z_l) + 2\alpha_s \psi'_n(z_s) \} \\ \sigma_{yy} &= \mu \text{Re} \{ (1 + \alpha_s^2) \phi'_n(z_l) + 2\alpha_s \psi'_n(z_s) \} \\ \tau_{xy} &= \mu \text{Im} \{ 2\alpha_l \phi'_n(z_l) + (1 + \alpha_s^2) \psi'_n(z_s) \} \end{aligned} \quad (13)$$

변위 포텐셜 $\phi_n(z_l)$ 와 $\psi_n(z_s)$ 를 다음과 같이 멱급수열로 나타내면

$$\phi_n(z_l) = \sum_{n=1}^2 A_n z_l^{n/2}, \quad \psi_n(z_s) = \sum_{n=1}^2 B_n z_s^{n/2} \quad (14)$$

여기서 $z_l = x + i\alpha_l y$, $z_s = x + i\alpha_s y$ 이고 A_n 및 B_n 는 복소상수이다. 방정식 (13)에서 균열면에서 표면력이 0인 조건을 적용하면, 전파하는 균열에 대한 응력장은 방정식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= e^{\zeta x} \sum_{n=1}^2 \sigma_{xn}^o, \quad \sigma_{yn} = e^{\zeta x} \sum_{n=1}^2 \sigma_{yn}^o \\ \tau_{xn} &= e^{\zeta x} \sum_{n=1}^2 \tau_{xn}^o \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} \sigma_{xn}^o &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_n(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ (1 + 2\alpha_l^2 - \alpha_s^2) r_l^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_l - 2\alpha_s h(n) r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_n(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ (1 + 2\alpha_l^2 - \alpha_s^2) r_l^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\alpha_s h(\bar{n}) r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ \sigma_{yn}^o &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_n(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -(1 + \alpha_s^2) r_l^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_l + 2\alpha_s h(n) r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_n(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -(1 + \alpha_s^2) r_l^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\alpha_s h(\bar{n}) r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xym}^o = & \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -2\alpha_l r_l^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ & \times \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_l + (1+\alpha_s^2)h(n)r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ 2\alpha_l r_l^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_l \right. \right. \\ & \left. \left. - (1+\alpha_s^2)h(\bar{n})r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned}$$

그리고 변위장은 방정식 (16)과 같다.

$$u_n = e^{-\zeta a} \sum_{n=1}^2 u_n^o, \quad v_n = e^{-\zeta a} \sum_{n=1}^2 v_n^o \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} u_n^o = & \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\mu_o} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ & \left\{ r_l^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_l - \alpha_s h(n)r_s^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\mu_o} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ & \left\{ r_l^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_l - \alpha_s h(\bar{n})r_s^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n^o = & \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\mu_o} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ & \left\{ -\alpha_l r_l^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_l + h(n)r_s^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\mu_o} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ & \left\{ \alpha_l r_l^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_l - h(\bar{n})r_s^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned}$$

여기서, $\bar{n} = n + 1$,

$$h(n) = \frac{2\alpha_l}{1+\alpha_s^2} (n = \text{odd}), \quad \frac{1+\alpha_s^2}{2\alpha_s} (n = \text{even}),$$

$$B_I(c) = \frac{1+\alpha_s^2}{4\alpha_s - (1+\alpha_s^2)^2}, \quad B_{II}(c) = \frac{2\alpha_s}{4\alpha_s - (1+\alpha_s^2)^2}$$

$n=1,2$ 인 경우에서 방정식 (10)은 등방성재료의 동적 평형방정식 형태를 가지나 응력장과 변위장은 FGM상수 ζ 에 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 이론적으로 응력확대계수의 지배영역은 $r \rightarrow 0$ 이다. 이 영역에서 이론적인 응력값은 무한대이

고 변위값은 0이다. 그러나 실제의 재료에서 $r \rightarrow 0$ 인 영역의 응력은 균열전단의 소성으로 응력값이 무한대가 되지 않는다. 응력장에서 응력확대계수가 지배하는 영역은 $r >$ (소성영역)이다. 따라서 응력장 (15)에서 $e^{\zeta x}$ 항은 무시할 수 없다.

2.3 응력장과 변위장 for $n=3$

방정식 (9)에서 $n \geq 3$ 인 경우에는 Φ_n 과 Ψ_n 는 비 균질적이며, 본 연구에서는 단지 $n=3$ 에 대하여 응력장 및 변위장을 유도한다. 먼저 방정식 (9)를 풀기 위하여는 Φ_1 과 Ψ_1 의 관계를 알아야 한다. 그 관계는 방정식 (10)을 고려할때 방정식 (5)에서 ζ 항이 0인 경우임을 알 수 있다. 따라서 그 관계는

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} \phi_1''(z_s) = -(k+2) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \phi_1''(z_l) \quad (17-a)$$

$$\frac{1}{k+2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \phi_1''(z_s) = \frac{\partial}{\partial \eta_2} \phi_1''(z_l) \quad (17-b)$$

방정식(17)을 방정식 (9)에 대입하면 방정식 (9)는 다음의 식으로 된다.

$$\alpha_l^2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \eta_2^2} = 0 \quad (18)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \eta_2^2} = -\zeta \left[(1-d_s) \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta_1} \right] \quad (19)$$

$$\text{여기서 } d_s = \frac{-k}{k+2} = \frac{1+\alpha_s^2-2\alpha_l^2}{1-\alpha_s^2}$$

미분방정식 방정식 (19)의 좌항을 $\Psi_1 = -Im \int \phi_1(z_s) dz_s$ 로 두고 미분 방정식 (18), (19)를 풀면 Φ_3 과 Ψ_3 의 해는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi_3(\eta_1, \eta_2) = Re \left\{ - \int \phi_3(z_l) dz_l \right\}$$

$$\Psi_3(\eta_1, \eta_2) = Im \left\{ - \int \phi_3(z_s) dz_s + \zeta \frac{1-d_s}{6\alpha_s^2} r_s^2 \phi_1(z_s) \right\}$$

(20)

방정식 (20)의 우측 첫 번째 항은 균질재료에 해당하며, 이어서 비균질파라미터 ζ 의 영향으로 비 균질재료에 해당되는 항이 부가되어 있음을 알 수 있다.

한편 방정식 (20)을 방정식 (3)에 대입하면 실제 평면에서 변위장은 방정식 (21), (22)와 같이 얻을 수 있다.

$$u_3 = \exp(-\zeta a) \left\{ u_3^o - \zeta \frac{K_I B_I(c)}{\mu_o \sqrt{2\pi}} \left[r_s^{3/2} \frac{1}{\alpha_s} h(1-d_l) \times \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3\theta_s}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_s}{2} \right) \right] - \zeta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\mu_o \sqrt{2\pi}} \left[r_s^{3/2} \frac{1}{\alpha_s} \bar{h} \times (1-d_l) \left(\frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_s}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta_s}{2} \right) \right] \right\} \quad (21)$$

$$v_3 = \exp(-\zeta a) \left\{ v_3^o - \zeta \frac{K_I B_I(c)}{\mu_o \sqrt{2\pi}} \left[r_s^{3/2} \frac{1}{\alpha_s} h(1-d_l) \times \left(\frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_s}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta_s}{2} \right) \right] + \zeta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\mu_o \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \times \left[r_s^{3/2} \frac{1}{\alpha_s} \bar{h}(1-d_l) \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3\theta_j}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_j}{2} \right) \right] \right\} \quad (22)$$

다음에 $n=3$ 에 대한 응력장은 방정식 (21), (22)를 방정식 (2)에 대입하므로 방정식 (23) ~ (25)과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_{x3} = \exp(\zeta x) \left\{ \sigma_{x3}^o + \zeta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \alpha_s \left[\frac{Bh}{2} \cos \frac{3\theta_s}{2} \right] + \zeta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \alpha_s \left[\frac{-B}{2} \bar{h} \sin \frac{3\theta_s}{2} \right] \right\} \quad (23)$$

$$\sigma_{y3} = \exp(\zeta x) \left\{ \sigma_{y3}^o + \zeta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \alpha_s \left[-\frac{B}{2} h \cos \frac{3\theta_s}{2} \right] + \zeta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \alpha_s \left[\frac{B}{2} \bar{h} \sin \frac{3\theta_s}{2} \right] \right\} \quad (24)$$

$$\tau_{xy3} = \exp(\zeta x) \left\{ \tau_{xy3}^o + \zeta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} Bh \times \left[-(1-\alpha_s^2) \sin \frac{\theta_s}{2} + \frac{1+\alpha_s^2}{4} \sin \frac{3\theta_s}{2} \right] + \zeta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} \times r_s^{1/2} B \bar{h} \left[(1-\alpha_s^2) \cos \frac{\theta_s}{2} + \frac{1+\alpha_s^2}{4} \cos \frac{3\theta_s}{2} \right] \right\} \quad (25)$$

여기서 $B = \frac{1-d_s}{\alpha_s^2}$ 이다.

비록 $n=3$ 의 응력장이 위의 식과 같이 표시되나 균열표면에서 트래션 프리($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$; $\theta \pm \pi$)

의 조건을 적용하면 h 및 \bar{h} 는 0이 되어야 한다. 따라서 FGM에서 전파하는 균열에 대한 응력장과 변위장은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \exp(\zeta x) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{ijn}^o, \quad u_j = \exp(-\zeta a) \sum_{n=1}^{\infty} u_{jn}^o \quad (26)$$

x 가 작은 값을 고려할때, 방정식 (26)의 응력장은 근사적으로 방정식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij} \approx \sigma_{ijn}^o + \sigma_{ijn}^o(\sigma_{ax}) + \zeta x \sigma_{ijn}^o + \zeta x \sigma_{ijn}^o + \dots, \quad (27)$$

방정식 (27)에서 알 수 있듯이 균열선단부근의 고차항 응력장에서 $r^{-1/2}$ 와 r^o 의 계수는 등방성 재료의 응력장과 일치하나 $r^{1/2}$ 이상의 고차항 계수항은 FGM상수 ζ 에 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 그러나 변위장은 모든 고차항의 전체가 ζx 가 아닌 ζa 의 영향을 받고 있다. 즉 균열길이의 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

3. FGM재료에서 전파하는 균열의 특성

FGM에서 전파하는 균열선단에서 균열의 전파 특성을 이해하기 위하여 사용된 FGM의 물성치는 Table 1과 같다.

Fig. 1은 방정식 (26)에서 $n=1$ 인 경우 정지균열에 대한 모드 I 하중상태의 광탄성 무늬형태에 대하여 응력-광 법칙을 이용하여 나타내고 있다. 이때 x 방향에서 작용하는 원거리 응력 σ_{ax} 는 0이며, 비 균질파라메타 $\zeta = \pm 1.19/m$, 시편의 두께 $h=9.5mm$, 균열의 길이 $a=5cm$ 이다.

Table 1 Mechanical properties for polyester FGM.

Nonhomogeneous Shear Modulus,	$\mu(X) = 1.316 e^{\zeta X}$ GPa)
FGM constant, ζ	$\zeta = 1.19$ (m^{-1})
Poisson's ratio, ν	$\nu = 0.33$
Density at $X=0$, ρ_o	$\rho_o = 1200$ (Kg/m^3)

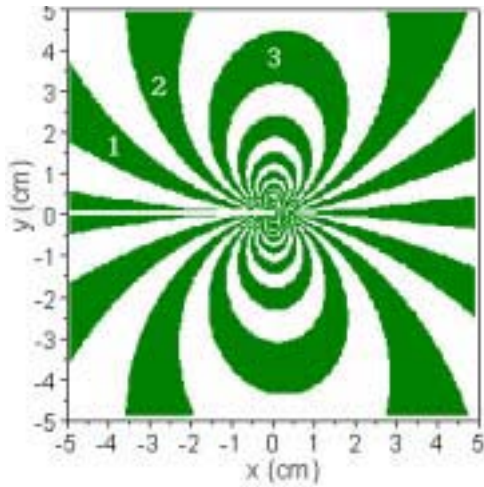
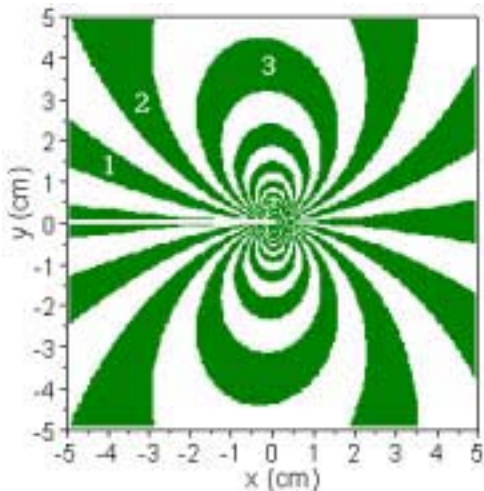
(a) $\zeta=1.19/m$, $M=0.02$ (b) $\zeta=-1.19/m$, $M=0.02$

Fig. 1 Isochromatic fringe patterns for a static crack tip in a X-Direction FGM under $K_I=1.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$, $h=9.5\text{mm}$ and $\sigma_{ox}=0$.

일반적으로 탄성계수가 등방성적인 경우 ($\zeta=0$), σ_{ox} 를 무시하면, 광탄성무늬는 직립현상을 나타낸다. 그러나 FGM의 경우 비균질 파라메타 $\zeta>0$ 경우에는 탄성계수가 x 방향으로 갈수록 증가한다. 따라서 광탄성 무늬차수도 균열선단의 앞쪽으로 기울며, $\zeta<0$ 인 경우는 균열선단의 뒷쪽으로 기울는 현상을 나타내고 있다. 이것은 $\zeta>0$ 인 경우에는 x 가 증가함에 따라 탄성계수가 증가하

며, 이에 비례하여 발생하는 최대 전단응력 (τ_{\max})이 등방성체의 경우에서 발생하는 최대 전단응력 보다 증가하기 때문에 이러한 현상이 발생한다고 여겨지며, $\zeta<0$ 인 경우에는 x 가 증가함에 따라 그와는 반대의 현상이 나타난다고 하겠다. 또한 r 가 0으로 근접하면 광탄성무늬의 기울는 현상은 거의 나타나지 않으며 등방성체의 광탄성 무늬 형태를 나타내고 있다.

4. 결론

(1) FGM에서 전파하는 균열선단부근의 응력장 및 변위장은 방정식 (26)식으로 나타낼 수 있다.

(2) 본 연구에서 유도된 FGM의 응력 및 변위장은 FGM상수 $\zeta=0$ 또는 $r \rightarrow 0$ 인 경우에는 등방성체의 응력 및 변위성분과 같다.

(3) 모드 I 하중상태하에서 균열선단부근의 광탄성 무늬형태는 FGM상수 ζ 의 영향을 받는 영역에서 $\zeta>0$ 인 경우에는 x 방향으로 갈수록 균열선단의 앞쪽으로 기울며, $\zeta<0$ 인 경우에는 그와는 반대의 현상을 나타내고 있다.

참고문헌

- (1) Delale, F., Erdogan, F., 1983, "The Crack Problem for A Nonhomogeneous Plane," *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol.50, pp.609 ~ 614.
- (2) Eischen, J. W., 1987, "Fracture of Nonhomogeneous Materials," *Int. J. of Fract.*, Vol.34, pp. 3 ~ 22.
- (3) Jin, Z-H., Noda, N., 1994, "Crack-tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials," *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol.61, pp.738 ~ 740.
- (4) Parameswaran V. and Shukla A., 1999, "Crack-Tip Stress Fields for Dynamic Fracture in Functionally Graded Materials," *Mechanics of Materials*, Vol.31, pp.579 ~ 596.
- (5) Rousseau, C .E. and Tippur H. V., 2001, "Dynamic Fracture of Compositionally Graded Materials Cracks along the Elastic Gradient Experiments and analysis," *Mechanics of Materials*, Vol. 33, pp. 403-421.