

# 축소모델에서 강체모드 분리와 급수전개를 통한 준해석적 민감도 계산 방법

김현기<sup>†</sup> · 조맹효<sup>\*</sup>

## A REFINED SEMI-ANALYTIC DESIGN SENSITIVITIES BASED ON MODE DECOMPOSITION AND NEUMANN SERIES IN REDUCED SYSTEM

Hyungi Kim, Maenghyo Cho

**Key Words :** Reduced System(축소모델), Rigid Body Mode(강체모드), Mode Decomposition(모드분리),  
Semi-Analytical Method(준해석적방법)

### Abstract

In sensitivity analysis, semi-analytical method(SAM) reveals severe inaccuracy problem when relatively large rigid body motions are identified for individual elements. Recently such errors of SAM resulted by the finite difference scheme have been improved by the separation of rigid body mode. But the eigenvalue should be obtained first before the sensitivity analysis is performed and it takes much time in the case that large system is considered. In the present study, by constructing a reduced one from the original system, iterative method combined with mode decomposition technique is proposed to compute reliable semi-analytical design sensitivities. The sensitivity analysis is performed by the eigenvector acquired from the reduced system. The error of SAM caused by difference scheme is alleviated by Von Neumann series approximation.

### 기호설명

$\mathbf{u}$ : 변위장  
 $\mathbf{v}$ : 고유벡터  
 $x$ : 설계변수  
 $\Delta\mathbf{v}$ : 고유벡터 변화량  
 $\Delta\lambda$ : 고유치 변화량  
 $d\lambda/dx$ : 고유치민감도

### 1. 서론

기존의 민감도 해석은 유한차분법과 해석적 방법에 의해서 강성행렬의 미분을 수행하였다. 유한차분법은 요소형태에 의존하지 않고, 계산이 간단하다는 장점이 있으나 민감도 결과값이 증분크기(perturbation size)에 크게 의존하며, 계산 측면에서

도 매우 비효율적이다. 해석적 방법은 결과값으로써 엄밀해를 얻을 수 있고, 증분율과 무관하다는 잇점이 있으나, 요소 형태에 크게 영향을 받기 때문에 복잡한 요소에 대해서는 계산 자체가 어렵다는 문제가 있다. 기존의 준해석적 방법은 유한차분법의 간편함과 해석적 방법이 가지는 해의 정확성을 모두 고려하는 방법으로 강성행렬의 미분항이 포함되는 가상 하중벡터의 계산에서는 주로 유한차분법을 사용한다. 그러나, 이 방법은 구조물의 크기와 관련된 변수에 대해서는 비교적 정확한 민감도 결과를 제시하지만, 특정 형상변수에 대해서는 어떤 증분율에서도 신뢰할 수 있는 결과를 제시하지 못한다는 것이 보고되었다. 최근 Van Keulen 등은 shell 요소내의 변위장을 순수변형부와 강체모드부로 분리하여 전체 민감도 중에서 강체모드부의 영향을 해석적 방법으로 도출하는 민감도 해석기법을 제안하였고<sup>(1)</sup>, Oral 은 Von Neumann 급수를 이용한 반복법에 의해 보와 평판문제의 민감도 해석에 적용하는 수학적 방법론을 제안하였다. 특히, 차분의 증분폭이 큰 경우에는 truncation

<sup>†</sup> 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : shotgun1@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1695 FAX : (02)883-1513

<sup>\*</sup> 서울대학교 기계항공공학부

오차가 전체 해석 결과에 큰 영향을 주게 되는데, Von Neumann 급수를 이용한 반복법으로 증분값이 큰 구간에서의 민감도 해석결과를 개선할 수 있음을 보였다<sup>(2)</sup>.

본 논문에서는 요소단위의 에너지 평가를 통해서 구조물의 축소시스템을 구성하는 방법을 제안하고, 축소시스템에서 얻어진 고유벡터를 이용하여 강제모드 분리와 급수전개를 통해 각각 증분폭이 큰 경우와 작은 경우에 민감도 해석의 결과를 개선한다는 점에 착안하여 두 방법을 조합한 준해석적 민감도 해석기법을 제안한다. 고유벡터로부터 분리된 강제모드부의 민감도는 해석적으로 계산하며 엄밀해로 계산되지 않는 부분에 대해서는 Von Neumann 급수에 의한 반복법을 사용하여 고차항을 추가함으로써 설계변수의 증분량이 큰 경우에도 수렴성이 유지될 수 있다<sup>(3)</sup>. 이 방법은 축소시스템에서 구해진 고유치와 고유벡터의 결과가 전체 시스템에서 구해진 결과와 큰 오차를 내지 않는다면 설계 변수의 증분율에 무관하게 신뢰도 높은 결과를 제공한다. 이 방법은 기존의 강제모드 분리법의 장점을 보유하면서 그와 더불어 많은 메모리와 계산 시간을 요구하는 대형 구조물의 고유치 민감도 해석에서 결과값의 신뢰성에 거의 영향을 주지 않으면서 계산 비용에 있어서는 상당한 절감 효과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

## 2. 요소단위에 기초한 주절점 선정과

### 축소시스템의 구성

#### 2.1 리츠 벡터(Ritz vector)

요소단위의 에너지를 평가하기 위해서는 Ritz 벡터를 구해야 한다. 초기 Ritz 벡터는 질량행렬의 대각항으로부터 근사화된다<sup>(4)</sup>.

$$[\mathbf{K}]\{x^{(0)}\} = \{\mathbf{M}_{ii}\} \quad (1)$$

식 (1)에서 구해진 정적벡터는 정규화 과정을 거친후 첫 번째 Ritz 벡터가 된다.

$$\{x^{(0)}\}^T [\mathbf{M}]\{x^{(0)}\} = 1 \quad (2)$$

첫번째로 구해진 Ritz 벡터는 두번째 정적벡터를 구하기 위해 사용된다. 구해진 정적벡터는 정규직교화 과정을 거친 후 두 번째 Ritz 벡터로 얻어진다. 그 과정은 식(3)과 같다.

$$\{x^{(i)}\} = \{x^{(0)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} [\{x^{(k)}\}^T [\mathbf{M}]\{z^{(k)}\}] \{z^{(i)}\} \quad (3)$$

$$\{z^{(i)}\} = \frac{\{x^{(i)}\}}{\sqrt{\{x^{(i)}\}^T [\mathbf{M}]\{x^{(i)}\}}} \quad (i: n \text{ 개 Ritz vector})$$

초기에 설정했던  $n$  번째 Ritz 벡터를 얻을때까지 위의 과정은 반복되어진다.

#### 2.2 요소단위의 Rayleigh quotient

위의 과정에서 구성된 Ritz 벡터를 사용하여 각 요소에서의 Rayleigh quotient 는 다음과 같이 계산되어진다.

$$\lambda_e^i = \sum_{k=1}^n \frac{\{z^{(k)}\}^T [\mathbf{K}_e^i] \{z^{(k)}\}}{\{z^{(k)}\}^T [\mathbf{M}_e^i] \{z^{(k)}\}} \quad (4)$$

$[\mathbf{K}_e^i], [\mathbf{M}_e^i]$  는  $i$  (요소수) 번째 요소의 강성 및 질량 행렬,  $\{z^{(k)}\}$  는  $k$  번째 Ritz 벡터를 의미한다.  $m$  개의 요소가 선정되도록 하였으며,  $i$  번째의 요소의 Rayleigh quotient 는  $1^{st}$  부터  $n^{th}$  까지의 Ritz 벡터에 의해 계산된 각 Rayleigh quotient 의 합에 의해 해석 구해진다. 모든 영역에서 구해진 Rayleigh quotient 중에서 가장 작은 값을 순서로  $m$  개의 요소가 선정된다.

#### 2.3 가중치의 고려

본 연구에서는 각 요소에서의 에너지 평가를 위해 Rayleigh quotient 를 사용한다. 이 때 가중치를 고려하지 않으면 저차모드를 지나치게 강조하는 주자유도 선정결과를 얻게 된다. 따라서, 저차와 고차모드에서 신뢰성있는 고유치 결과를 얻기 위해서는 가중치를 고려하여 고차모드의 동적거동을 잘 나타낼 수 있는 주절점의 선정이 필요하다. 가중치는 구하고자 하는  $1^{st}$  부터  $n^{th}$  까지의 고유치 결과에 신뢰성을 제공하기 위해 매우 효과적이다. 가중치는 대각항의 비에 의해 구해진다. 강성행렬과 질량행렬이  $p \times p$  의 함수라면, 행렬  $\mathbf{K}_{ii}/\mathbf{M}_{ii}$  의 벡터 크기는  $p \times 1$  이 된다. 각 요소와 관련된 자유도가 대각벡터로부터 추출되고, 내적값은 요소 수만큼 얻어지게 된다. 가중치는  $\Psi_{\max}$  에 의해 나누어진 값의 제곱으로 계산되어지며, 식(5)와 같다.

$$w_e^i = \left( \frac{\Psi_i}{\Psi_{\max}} \right)^2, \quad \Psi_i = \left[ \frac{\mathbf{K}_{ii}^e}{\mathbf{M}_{ii}^e} \right]^T \left[ \frac{\mathbf{K}_{ii}^e}{\mathbf{M}_{ii}^e} \right] \quad (5)$$

여기서,  $\mathbf{K}_{ii}^e/\mathbf{M}_{ii}^e$  는  $h \times t$  의 크기를 갖는 지역행렬이다.  $h$  는 각 노드가 갖는 자유도이고,  $t$  는 각 요소의 노드수를 의미한다. 가중치를 고려한 변형된 Rayleigh quotient 는 식(6)으로 표현된다.

$$\Pi_e^i = \sum_{i=1}^k \lambda_e^i w_i \quad (6)$$

#### 2.4 축소시스템의 구성

요소단위의 에너지 평가에 의해 선정된 주절점을 이용하여 축소시스템을 구성하게 된다. 일반적인 비감쇠 자유진동문제에서 고유치 문제를 주자유도와 부자유도로 분리하여 식을 구성하면 (7)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{sp} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $\phi_p$  는 주자유도,  $\phi_s$  는 부자유도를 의미한다. 부자유도는 주자유도와 변환행렬을 통해 식(8)로 표현되고, 그와 관련된 변환행렬은 식(9)에 주어진다.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I \\ T_{IRS} \end{Bmatrix} \{\phi_p\} = [T] \{\phi_p\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [T_{IRS}] &= [T_s] + [\mathbf{K}_{ss}]^{-1} ([\mathbf{M}_{sp}] + [\mathbf{M}_{ss}][T_s])[ \mathbf{M}_G ]^{-1} [\mathbf{K}_G] \\ [T_s] &= -[\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sp}] \\ [\mathbf{K}_G] &= [\mathbf{K}_{pp}] - [\mathbf{K}_{ps}][\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sp}] \\ [\mathbf{M}_G] &= [\mathbf{M}_{pp}] + [\mathbf{M}_{ps}][T_o] + [T_o]^T [\mathbf{M}_{sp}] + [T_o]^T [\mathbf{M}_{ss}][T_o] \\ [T_o] &= -[\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sp}] \end{aligned} \quad (9)$$

축소시스템에서의 Rayleigh quotient 는 식 (8)의 변환행렬에 의해 식 (10)으로 표현된다.

$$\lambda_R = \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} = \frac{\{\phi_p\}^T [T]^T [K] [T] \{\phi_p\}}{\{\phi_p\}^T [T]^T [M] [T] \{\phi_p\}} \quad (10)$$

식 (10)에서 축소시스템의 강성 및 질량행렬을 구할 수 있고, 여기에 변환행렬  $[T]$  을 대입하면 식 (11)로 표현되는 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다<sup>(5)</sup>.

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_R] \{\phi_p\} &= \lambda_R [\mathbf{M}_R] \{\phi_p\} \\ [\mathbf{K}_R] &= [\mathbf{K}_{pp}] + [T_{IRS}]^T [\mathbf{K}_{sp}] + [\mathbf{K}_{ps}][T_{IRS}] + [T_{IRS}]^T [\mathbf{K}_{ss}][T_{IRS}] \\ [\mathbf{M}_R] &= [\mathbf{M}_{pp}] + [T_{IRS}]^T [\mathbf{M}_{sp}] + [\mathbf{M}_{ps}][T_{IRS}] + [T_{IRS}]^T [\mathbf{M}_{ss}][T_{IRS}] \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 고유치 해석을 통해 구해진 주자유도 고유벡터는 식 (8)의 변환행렬  $[T_{IRS}]$  과의 연산을 통해 부자유도 고유벡터  $\{\phi_s\}$  을 구하기 위해 사용된다.

### 3. 준해석적(SAM) 방법의 개선

본 연구에서 준해석적 방법에 의한 민감도 결과는 축소시스템으로부터 구해진 주자유도 고유벡터와 변환행렬에 의해 구해진 부자유도 고유벡터를 이용하여 계산된다. 이 방법에 의해 구하여진 해가 전체 도메인을 해석한 경우와 일치하는 결과를 산출한다면 민감도 해석시 초기 고유치 및 고유벡터를 산출하기 위해 요구되는 컴퓨터 자원 및 시간비용의 절감효과를 기대할 수 있다.

기존의 준해석적 방법은 유한 차분법에 비해 메모리와 연산 시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 증분율의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내고 있다. 특히,  $10^{-1} \sim 10^{-7}$  에서는 truncation 오차가 주로 발생하게 되고,  $10^{-8}$  이하에

서는 round-off 오차가 발생하게 된다. 본 논문에서는 두 경우의 오차를 모두 제거하기 위해 고유벡터를 순수변형부와 순수 강체모드부로 분리하여 계산함으로써 round-off 오차감소의 효과를 얻을 수 있고, 미분 수행시 증분량이 클 때 발생할 수 있는 truncation 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가으로써 개선시킨다.

#### 3.1 고유벡터에서의 강체모드 분리

비감쇠 진동일 때, 고유치 문제는 식 (12)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{v}(x) - \lambda(x)\mathbf{M}(x)\mathbf{v}(x) = 0 \quad (12)$$

여기서,  $\mathbf{K}$  는 강성행렬,  $\mathbf{M}$  은 질량행렬,  $\mathbf{v}$  은 고유벡터이다. 진동 문제에서,  $\lambda$  는 주파수의 제곱이고,  $\mathbf{K}$  와  $\mathbf{M}$  은 대칭행렬이다.

이 문제는 설계변수에 대해서 미분을 수행한 후 정리하면, 식 (13)과 같은 고유치 민감도에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{K}' \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{M}' \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \quad (13)$$

식 (13)에서 첫번째 항은 강체모드를 고려하여 고유벡터를 순수변형부와 강체모드부로 분리시킬 수 있다. 그리고, 강체모드부에 대해서 정적문제와 동일하게 엄밀해로써 계산이 가능하다.  $\mathbf{v}^T \mathbf{K}' \mathbf{v}$  에서 고유벡터  $\mathbf{v}$  를 순수변형부와 강체모드부로 분리하면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_e^{eT} + \alpha^k \mathbf{r}_k^T) \mathbf{K}' (\mathbf{v}_e^e + \alpha^k \mathbf{r}_k) \\ = \mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{v}_e^e + \alpha^k \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{v}_e^e - \alpha^k \mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{r}_k - (\alpha^k)^2 \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{r}_k \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,  $\alpha^k$  는 고유벡터를 강체모드벡터와의 내적을 통해서 강체모드 부분을 분리한 것을 의미하며, 식 (15)로 표현된다.

$$\alpha^k = \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k} \quad (15)$$

식 (14)에서 네 번째 항은 강체모드 성질인  $\mathbf{K}\mathbf{r} = 0$  에 의해 소거되고, 두 번째 항은  $\mathbf{K}\mathbf{r}_k' + \mathbf{K}'\mathbf{r}_k = 0$  에 의해서  $-\alpha^k \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{v}_e^e$  로 바꾸면, 두 번째와 세 번째는 동일한 식이므로, 위의 식은 최종적으로 식 (16)과 같이 정리할 수 있다

$$(\mathbf{v}_e^{eT} + \alpha^k \mathbf{r}_k^T) \mathbf{K}' (\mathbf{v}_e^e + \alpha^k \mathbf{r}_k) = \mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{v}_e^e - 2\alpha^k \mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{r}_k \quad (16)$$

따라서, 설계변수 변화에 대한 고유치 민감도는 식 (17)로 표현된다.

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{v}_e^e - 2\alpha^k \mathbf{v}_e^{eT} \mathbf{K}' \mathbf{r}_k - \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{M}' \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \quad (17)$$

식 (17)에 의해 구해지는 고유치 민감도는 증분율이  $10^{-4}$  이하로 작아질 때는 안정적인 수렴성을 보이지만,  $10^{-3}$  이상으로 커지게 되면, truncation

오차에 의해 수렴성이 떨어지게 된다. 따라서, 증분율이 큰 경우에도 일정한 수렴성을 보장하기 위해서는 truncation 오차를 감소시키는 것이 필요하다. 본 논문에서는 문제 해결을 위해 고유치문제에서 반복법을 적용하는 기법을 제시한다.

3.2 고유치문제에서의 반복법의 적용

반복법을 적용하기 위해서는 변화량을 이용하여 식을 표현할 필요가 있다. 설계변수 변화에 따른 구조물의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K']\{v'\} = \lambda[M']\{v'\} \quad (18)$$

설계변수의 변화에 따른 구조의 변화가 작은 경우 변화된 행렬과 변화된 고유치, 고유벡터는 변화량  $\Delta$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [K'] &= [K] + [\Delta K] \\ [M'] &= [M] + [\Delta M] \\ \lambda' &= \lambda + \Delta\lambda \\ \{v'\} &= \{v\} + [\Delta v] \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)의 표현식을 식 (18)에 대입하면 식 (20)과 같다.

$$(K + \Delta K)(v + \Delta v) = (\lambda + \Delta\lambda)(M + \Delta M)(v + \Delta v) \quad (20)$$

고유벡터 변화량  $\Delta v$  을 좌항에 나타내면, 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned} \{(K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M)\} \Delta v \\ = \Delta\lambda(M + \Delta M)v - \{(K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M)\} v \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 고유치 변화량  $\Delta\lambda$  만을 좌항으로 이항한 후, 양변에 고유벡터  $v^T$  을 곱하고 정리하면, 증분율에 의한 고유치 민감도를 식 (22)와 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta\lambda = \frac{v^T (\Delta K - \lambda \Delta M) v + v^T (\Delta K - \lambda \Delta M) \Delta v}{v^T (M + \Delta M) (v + \Delta v)} \quad (22)$$

식 (17)에서 계산된 고유치 민감도  $\lambda_1$  는 첫번째 단계의 값이며, 고유벡터 변화량  $\Delta v$  을 얻기 위해 식 (21)의  $\Delta\lambda$  로 대입된다. 여기서 얻어진 고유벡터는 다시 식 (22)로 입력되어 두 번째 단계의 고유치 민감도  $\lambda_2$  을 얻게 된다. 이런 과정은 고유치 민감도가 수렴할 때까지 계속되며, 대략 1~2 회의 반복과정에 의해 수렴값을 얻을 수가 있다. 이 과정을 통해 고유치 민감도 수렴값과 고유벡터 민감도값을 동시에 얻을 수 있다.

4. 수치예제

수치예제를 통하여 본 연구에서 제안한 축소시스템을 통한 민감도 해석 기법의 효율성과 신뢰성

을 확인하고자 한다. 해석은 실린더 튜브, 내부에 원공을 갖는 평판 그리고 반구 모델에 대해 수행하였다. 각 예제별로 임의의  $n$  개 모드를 선정하여 모드별로 고유치 민감도를 유한차분(GFD), 준해석적(SAM), 강체모드분리(RSAM), 반복법(RSAM+ITER)을 적용한 결과를 제시하였다. 각 예제 별로 축소모델을 구성하기 위해 선정된 요소가 표시되었으며, 요소선정을 위해 소요된 리츠(Ritz)벡터 계산시간이 제공된다. 그리고, 축소모델의 고유치 해석을 통해 구해진 고유치 값들의 상대오차가 각 모드별로 주어진다. 상대오차는 식 (23)으로 주어진다.

$$e = \left| \frac{\lambda_{Reduce} - \lambda_{Full}}{\lambda_{Full}} \right| \quad (23)$$

민감도 결과에서  $x$  축은 증분율을 나타내고,  $y$  축은 전체시스템 해석 결과와의 전체시스템과의 상대오차 결과를 나타낸다.

4.1 실린더 튜브(Cylinder Tube)

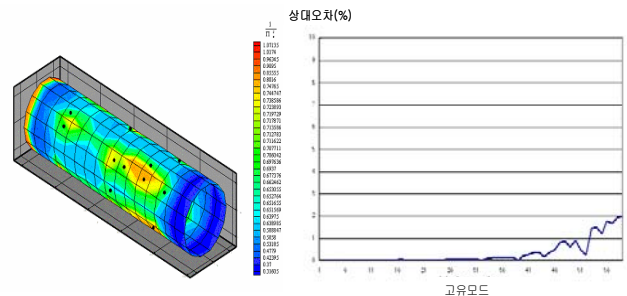


그림 1 실린더튜브의 주절점선정과 고유치 상대오차

그림 1 은 끝단에서 고정경계를 갖는 실린더 튜브이다. 256 개의 요소 중에서 40 개의 요소가 선정되었으며, Ritz 벡터는 50 개가 사용되었다. 선정된 요소에 의한 고유치 상대오차는 그림 1 에 주어져 있다. 50<sup>th</sup> 모드까지는 1% 이내의 오차를 보이고 있으며, 60<sup>th</sup> 모드 이상에서도 2% 이내의 오차만을 갖고 있음을 알 수 있다. 이 결과로부터 주절점의 선정은 적절하다고 사료된다.

표 1 은 축소시스템을 구성하고, 그것의 고유치 해석을 위해 요구되었던 시간과 전체 시스템을 해석한 경우의 시간을 비교한 결과이다. 축소시스템을 구성할 경우 전체시스템 해석시간을 1/4 정도로 감소시킬 수 있음을 알 수 있다.

표 1 실린더튜브의 축소·전체시스템의 연산 시간비교

축소시스템	리츠벡터 연산시간	요소선정 시간	축소시스템 연산시간	총연산시간
	86 s	10 s	31 s	127 s
전체시스템	0 s	0 s	0 s	406 s

그림 2 는 각 방법에 따른 민감도 해석 결과이다. 축방향 길이를 설계변수로 선정하였다. GFD 와 SAM 은 증분율  $10^{-4}$  이상의 범위에서는 RSAM 와 RSAM+ITER 에 비해 수렴성이 떨어지고,  $10^{-8}$  이하의 범위에서 발산경향이 심하게 나타나고 있음을 알 수 있다. RSAM+ITER 은 증분율에 관계없이 안정적인 수렴경향을 보이고 있다. 이것은 증분율이 큰 범위에서 반복법에 의해 고차항을 추가함으로써 truncation 오차를 방지한 결과이며, 증분율이 작은 경우 발생하는 round-off 오차는 강제모드의 미분을 엄밀하게 계산함으로써 방지되고 있다. 그에 비해 RSAM 은 증분율이 큰 범위에서 수렴성이 RSAM+ITER 에 비해 떨어지는 경향을 보이고 있음을 확인할 수 있다.

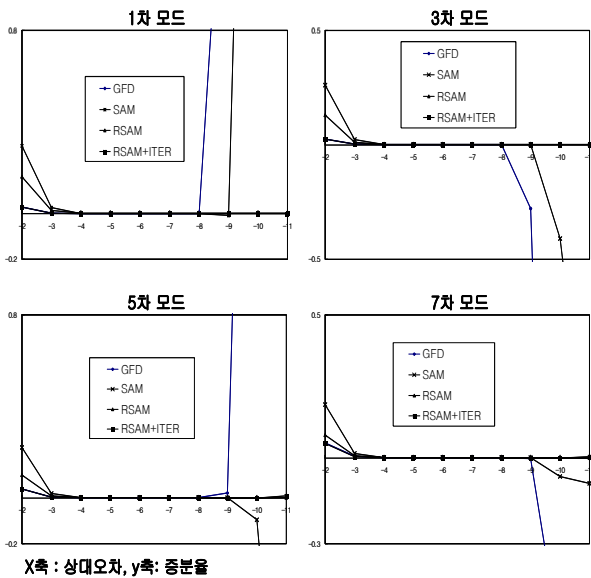


그림 2 실린더튜브의 모드별 민감도 해석 결과

4.2 반구(Hemisphere)

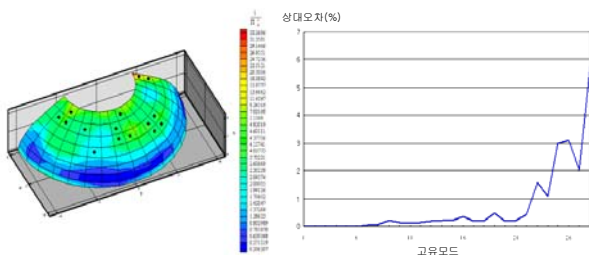


그림 3 반구의 주절점선정과 고유치 상대오차

그림 3 은 상부 24°를 절단한 반구이다. 설계변수는 위도 방향으로 변하는 각도이며, 민감도값은 적도를 따라 0°와 90°에서 계산되었다. 대칭 경계가 부여되었으며, 15 개의 요소가 선정되었다.

약 22<sup>th</sup> 모드까지 엄밀해와 일치하는 결과를 보이고 있으며, 그 이상의 모드에서는 상대오차가 급격히 증가하고 있음을 알 수 있다. 그러나, 30

개의 Ritz 벡터만을 사용하여 요소를 선정한 결과이므로, Ritz 벡터의 수를 증가시킨다면 고차모드에서의 상대오차는 감소할 것으로 사료된다.

표 2 의 결과에서 축소시스템 구성을 통해 시간 비용을 1/3 정도로 감소시킬 수 있음을 알 수 있으며, 축소시스템에서 얻어진 고유벡터를 통한 민감도 해석 결과는 그림 4 에 주어져 있다.

표 2 반구의 축소·전체시스템의 연산 시간비교

축소시스템	리츠벡터 연산시간	요소선정 시간	축소시스템 연산시간	총연산시간
	27 s	6 s	4 s	37 s
전체시스템	0 s	0 s	0 s	100 s

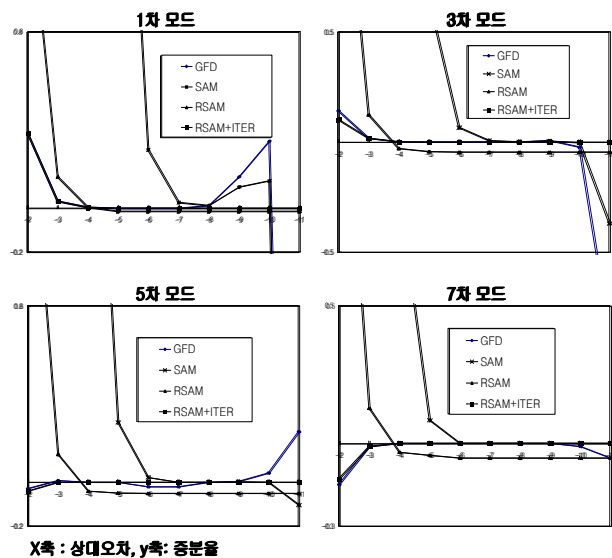


그림 4 반구의 모드별 민감도 해석 결과

그림 4 의 결과로부터 GFD 는 초기 수렴속도는 빠르나 증분율이  $10^{-8}$  이하로 작아지게 되면 발산 경향이 심하게 나타나고 있다. SAM 은  $10^{-7} \sim 10^{-9}$  범위에서만 수렴값을 갖고 그 외의 증분율에서는 불안정한 결과를 보이고 있다. RSAM 은 초기 수렴 속도가 늦으며,  $10^{-5}$  에서 수렴값을 보이고 있으나, 상대오차 해석을 통해 오차를 갖고 있는 상태에서 수렴을 하고 있다. RSAM+ITER 은 초기 수렴이 늦게 나타나고 있으나, 증분율에 무관하게 안정적인 수렴결과를 보이고 있다.

4.3 원공이 있는 평판(Plate with a Hole)

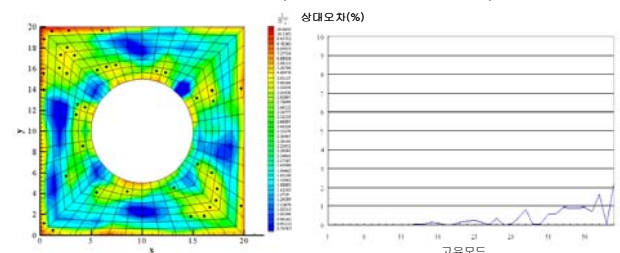


그림 5 원공평판의 주절점선정과 고유치 상대오차

경계조건은 단순지지이며, 384 개의 요소가 사용되었다. 설계변수는 원공의 반경이다. 축소모델을 구성하기 위해 40 개의 요소가 선정되었으며 50 개의 Ritz 벡터가 계산되었다. 결과로부터 20<sup>th</sup> 고유치까지는 상대오차가 0.1% 이하의 값을 갖음을 알 수 있으며, 38<sup>th</sup> 에서 1%정도의 상대오차를 갖게 된다. 이것은 전체요소의 10%만이 선정된 축소모델에서의 결과이다. 표 3 의 시간비교 결과에서 축소시스템을 통해 75% 정도 이상의 시간 절감효과가 있음을 확인 할 수 있다.

표 3 원공평판의 축소: 전체시스템의 연산 시간비교

축소시스템	리츠벡터 연산시간	요소선정 시간	축소시스템 연산시간	총연산시간
	210 s	17 s	91 s	318 s
전체시스템	0 s	0 s	0 s	1406 s

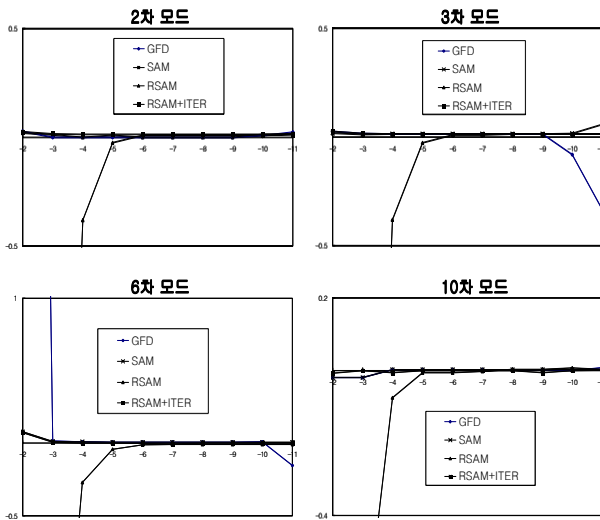


그림 6 원공평판의 모드별 민감도 해석 결과

그림 6 에 주어진 민감도 해석 결과에서는 3 차 모드와 6 차모드에서 GFD 가 발산경향을 보이기는 하지만, SAM,RSAM+ITER 은 증분율 값에 무관하게 대체적으로 안정적인 수렴성을 보이고 있다. 그러나, RSAM 은 수렴속도가 상당히 늦어 증분율 10<sup>-6</sup> 에서 수렴값을 갖게 된다.

### 5. 결론

본 연구에서는 에너지 방법에 기초한 요소단위의 주절점 선정을 통해 축소시스템을 구성한 후, 그것의 고유치 해석을 통해 얻어진 주자유도 및 부자유도 고유벡터를 이용하여 민감도 해석을 수행하는 방법을 제안하였다. 축소시스템을 구성하기 위해 사용된 요소단위의 에너지 방법은 각 요

소의 Rayleigh quotient 를 계산한 후 가중치를 적용하여 주절점을 선정하는 방법이다. 축소시스템을 구성하기 위해서는 식 (11)의 연산을 거쳐야 하며, 그 과정에서 부자유도의 역행렬 연산을 수행해야만 한다. 따라서, 최종적인 축소시스템이 작게 구성된다는 것은 중간 연산과정에서 그 만큼 많은 메모리와 시간비용이 요구됨을 의미한다. 따라서 본 연구에서는 절점 단위로 주자유도를 선정함으로써 최종적인 축소시스템의 크기와 중간 연산 과정에서의 효율성을 모두 고려하고자 하였다.

본 연구에서 민감도 해석을 위해 제안하고 있는 반복법은 축소모델에서 얻어진 고유벡터를 강제모드와 순수변형부로 분리하고 초기 고유치 민감도값을 산출한 후, 고유벡터 변화량식과 고유치 변화량식을 구성하는 방법이다. 2~3 회의 반복과정을 통해 수렴값을 얻을 수가 있으며, 직교화된 강제모드의 사용과 반복법에 의해 기존의 민감도 해석 방법들과의 수렴값의 결과를 비교하였다.

동적문제는 정적문제에 비해 많은 메모리와 시간을 요구하기 때문에 기존의 민감도 계산방법의 개선이 필요하다. 본 연구에서 제시된 방법은 축소시스템을 통해 얻어진 고유벡터를 민감도 계산에 사용함으로써 시간 비용면에서 상당한 절감효과를 얻을 수 있고, 계산 결과에서도 전체시스템 해석과 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

### 후 기

이 연구는 기계분야 BK21 의 지원을 받아서 수행되었고 이에 감사 드립니다.

### 참고문헌

- (1) F. Van Keulen and H. De Boer, 1998, "Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motions," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.42, pp. 71-91
- (2) Suha Oral, 1996, "An Improved Semi-Analytical Method for Sensitivity Analysis.," *Structural Optimization*, Vol.78, pp. 467-472
- (3) H. Kim and M. Cho, 2001, "A Study on the Improvement of Shape Desing Sensivity in Eigenvalue Problems Using Semi-Analytical Method," *Proc.COSEIK Symposium-Fall*, pp. 159-165
- (4) K. O. Kim and M. K. Choi, 2001, "Convergence acceleration of iterative modal reduction methods," *AIAA journal*, Vol.39, No.1, pp. 134-140
- (5) O'Callahan, J., 1989, "A procedure for an improved reduced system(IRS) model," *Proceedings of the 7<sup>th</sup> international modal analysis conference(Las Vegas,NV),Union college, Schenectady. NY*, pp. 17-21