무차원 동영향 함수를 이용한 자유단 경계를 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석

강상욱† · 김일순* · 이장무*

Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges using Non-dimensional Dynamic Influence Functions

S. W. Kang, I. S. Kim and J. M. Lee

Key Words : Free vibration analysis(자유 진동 해석), Free boundary condition(자유단 경계조건), Arbitrarily shaped plate(임의 형상 평판).

Abstract

The so-called boundary node method (or NDIF method) that was developed by the authors has been extended for free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with free edges. Since the proposed method is based on the collocation method, no integration procedure is needed on boundary edges of the plates and only a small amount of numerical calculation is required. A special coordinate transformation has been devised to consider the complicated free boundary conditions at boundary nodes. By the use of the special coordinate transformation, the radius of curvature involved in the free boundary conditions can be successfully dealt with. Finally, verification examples show that natural frequencies obtained by the present method agree well with those given by exact method and other analytical methods.

1. 서 론

본 논문의 저자에 의해 제안된 경계노드법(Boundary Node Method, BNM)은, 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM)과는 달리 어떠한 보간함수도 사용하지 않는 특징 덕분에, 간결한 이론 체계와 빠른 수렴성이라는 장점을 가지고 있다. 임의 형상 멤브레인의 자유진동해석을 위해 경계노드법(무차원동영향함수법, NDIF 방법)이 처음으로 제안되어졌으며[1], 이 방법은 나중에 2 차원 음향공동의 고유진동수와 고유모드를 구하기 위해 확장되어졌다[2]. 더 나아가, 경계에 아주 오목한 부분 또는 내부에 구멍을 가진 임의 형상 멤브레인의 고유모드해석에도 경계노드법이 적용되어졌다[3].

† 한성대학교 기계시스템공학과, 책임(주)저자
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
TEL : (02)760-4228 FAX : (02)760-4329
* 서울대학교 기계항공공학부

멤브레인 또는 음향 공동과는 달리, 다양한 경계조건들을 가지고 있는 평판의 자유진동문제를 해결하기 위하여, 경계노드법의 확장 가능성이 모색되어졌다. 먼저, 고정단 경계를 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석이 경계노드법에 의해 가능하게 되어졌으며[4], 최근에는 고정단 및 단순지지 경계로 이루어진 복합 경계조건을 가진 임의 형상 평판에 대한 자유진동해석 방법이 정립되어졌다[5].

본 논문에서는 지금까지 꾸준히 연구되어진 경계노드법을 자유단 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석에 적용하고자 한다. 본 논문에서는 경계 노드들에서의 자유단 경계조건을 고려하기 위해서, 각각의 노드를 위해 개별적인 극좌표계(local polar coordinate system)가 사용되어진다. 어떤 노드에서의 곡률반경과 법선 방향이 알려져 있을 경우, 곡률반경의 중심이 이 극좌표계의 원점이 되게 된다. 마지막으로, 본 논문에서 제안된 방법의 검증을 위해, 원형 평판과 타원 평판의 자유진동 해석이 수행되어진다. 원형 평판의 경우,

해석 결과가 엄밀해(exact solution)와 비교되어진다. 엄밀해가 존재하지 않는 타원 평판의 경우는 다른 해석적 방법에 의해 구해진 결과와 비교되어진다.

이차원 임의 형상 평판을 본격적으로 다루기에 앞서, 본 논문의 2 장에서는 일차원 문제인 현(string)과 빔(beam)의 자유진동해석에 본 방법이 적용되어진다.여기서 잉여 고유치 (spurious eigenvalue)의 존재가 설명되어지며, 잉여 고유치를 제거할 방안도 제시되어진다.

2. 일차원 문제

2.1 이론

NDIF 방법을 이차원 평판의 고유치 문제에 적용하기에 앞서, 먼저 일차원 현(string)과 빔(beam)의 고유치를 문제에 적용해보자.

2.1.1 고정단 현

Fig. 1 과 같이 길이 L, 단위 길이당 질량 ρ 를 갖는 균일한 현을 고려하자. $w(x,t)$ 를 현의 횡방향 변형량(transverse delfection)이라 하면, 지배방정식과 경계조건은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1}$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0\,, \tag{2}$$

여기서 $c = \sqrt{T/\rho}$ 는 음속이다 (T 는 장력).

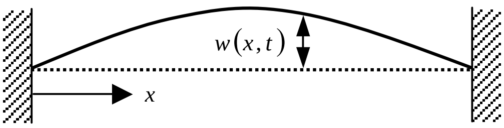

Fig. 1. String of which both ends are fixed.

현의 변형을 각진동수(angular frequency) ω 의 조화 운동으로 가정하면, 횡방향 변형량은 $w(x,t) = W(x)e^{j\omega t}$ 로 쓸 수 있다. 이것을 식 (1)과 식(2)에 대입하면 다음과 같이 시간 변수 t 에 무관한 지배방정식과 경계조건이 구해진다.

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \Lambda^2 W = 0\,, \tag{3}$$

$$W(0) = 0\,,\ \ W(L) = 0\,, \tag{4, 5}$$

여기서 $\Lambda = \omega/c$ 는 주파수 파라미터(frequency parameter)이다.

식(3)과 식(4)의 지배방정식과 경계조건을 만족하는 현의 자유진동문제에 NDIF 방법을 적용하기 위해서는 먼저 무차원동영향 함수(non-dimensional dynamic influence function, 이하 NDIF)가 정의되어져야 한다. Fig. 2 에서와 같이 무한 길이의 현 위에 길이 L 의 유한 현(점선 부분)이 놓여 있을 경우, 임의 위치 $x = x_k$ 에서의 NDIF 는 $\cos(\Lambda|x - x_k|)$ 로 구해진다. 이 함수는 지배방정식 (3)을 만족하며, 물리적으로는 위치 x_k 에 단위 조화 변위가 가진 되어졌을 때 위치 x 에서 발생하는 조화응답의 진폭을 뜻한다.

멤브레인에 NDIF 방법을 적용한 과거의 연구[1]에서와 같이, 현의 진폭 $W(x)$ 를 현의 경계 x_1 과 x_2 에서 정의되는 NDIF 들의 선형결합, 식(6)와 같이 가정한다.

$$W(x) = \sum_{k=1}^{2} A_k \cos(\Lambda|x - x_k|), \tag{6}$$

여기서 A_k 는 가진 진폭의 크기와 관련된 미지 계수(unknown coefficient)이다.

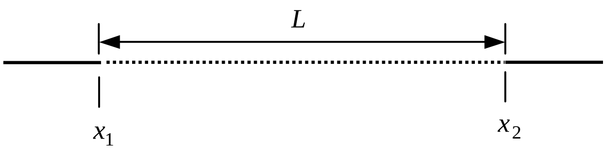

Fig. 2. Finite string (or beam) of length L located on an infinite string (or beam).

NDIF 는 기본적으로 지배방정식을 만족하기 때문에, NDIF 들의 선형 결합으로 표시된 식(6) 또한 지배방정식을 만족한다. 그래서 식(6)에 경계조건 (4, 5)를 적용하는 방법에 의해 길이 L 인 유한 현의 자유진동 해가 구해진다. 식(6)에 경계조건 식(4, 5)를 적용하면 다음과 같은 행렬식이 얻어진다.

$$\mathbf{SM}_{\text{string}}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}\,, \tag{7}$$

여기서

$$\mathbf{SM}_{string} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\Lambda L \\ \cos\Lambda L & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}. \tag{8, 9}$$

위식에서 $\mathbf{SM}_{\text{string}}$ 와 $\mathbf{A}$ 은 각각 시스템 행렬과 시스템 벡터로 정의되어 진다. 시스템 행렬식 (7)이 의미있는 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 시스템 행렬의 판별식이 영(zero)이 되어야 한다. 즉,

$$\det\left[\mathbf{SM}_{string}\right] = 0 \,. \tag{10}$$

식(10)에 식(8)을 적용하면 다음과 같은 주파수 식(frequency equation)이 구해진다.

$$\det\left[\mathbf{SM}_{string}\right] = \sin \Lambda L = 0 \,. \tag{11}$$

최종적으로 식(11)의 근(root)으로부터 현의 고유진동수가 구해진다.

이상과 같이 NDIF 방법을 이용하여 유한 현의 고유치(eigenvalue)를 구하는 방법이 설명되어졌다. 다음 절에서는 자유단 경계를 가진 빔의 고유 진동 문제에 NDIF 법을 적용한 예가 보여진다.

2.1.2 자유단 빔

길이 L, 단위 길이당 질량 m을 갖는 자유단의 균일 빔을 고려해 보자. 빔 위의 임의의 지점 x에서의 횡방향 변위를 $w(x,t)$라고 하면 지배방정식과 경계조건들은 다음과 같다.

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \,, \tag{12}$$

$$EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \,, \quad EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = 0 \,, \tag{13, 14}$$

여기서 E는 Young's modulus, I는 area moment of inertia 이다. 빔의 운동 양상을 조화운동으로 가정하면, 횡방향 변형량은 $w(x,t) = W(x)e^{j\omega t}$로 쓸 수 있고, 식(12-14)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \Lambda^4 W(x) = 0 \,, \tag{15}$$

$$EI\frac{d^2W(x)}{dx^2} = 0 \,, \quad EI\frac{d^3W(x)}{dx^3} = 0 \,, \tag{16, 17}$$

여기서 $\Lambda = \left(\omega^2 m / EI\right)^{1/4}$는 주파수 파라미터를 나타낸다.

이제 NDIF 법을 길이 L의 자유단 빔에 적용하기 위해서는, 무한 빔 위의 임의의 점 $x = x_k$에서 정의된 NDIF 를 필요로 한다. 식(12)의 일반해(general solution)에 변위 가진 조건 $W(x = x_k) = 1$을 적용하면 NDIF 는 다음과 같이 구해진다.

$$C_k \cos\left(\Lambda\left|x - x_k\right|\right) + D_k \cosh\left(\Lambda\left|x - x_k\right|\right), \tag{18}$$

여기서 C_k와 D_k는 미지 계수이다.

Fig. 2 의 점선 부분인 길이 L의 유한 빔의 자유진동 해는 현과 마찬가지로 x_1과 x_2에서 정의된 NDIF 들의 선형 결합으로 가정되어진다. 즉,

$$W(x) = \sum_{k=1}^{2} \{ A_k \cos\left(\Lambda\left|x - x_k\right|\right) + B_k \cosh\left(\Lambda\left|x - x_k\right|\right) \} \,, \tag{19}$$

여기서 새로운 미지계수 A_k와 B_k는 각각 $\alpha_k C_k$와 $\alpha_k D_k$을 의미하며, α_k 또한 미지 계수이다.

이제 식(19)에 유한한 빔의 경계조건 식 (13, 14)를 적용하면 다음과 같은 행렬식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{\text{beam}}\,\mathbf{C} = \mathbf{0} \,, \tag{20}$$

여기서 시스템 행렬과 시스템 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_{\text{beam}} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_{\text{M}}^{\text{c}} & \mathbf{SM}_{\text{M}}^{\text{h}} \\ \mathbf{SM}_{\text{V}}^{\text{c}} & \mathbf{SM}_{\text{V}}^{\text{h}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix}, \tag{21, 22}$$

여기서

$$\mathbf{SM}_{\text{M}}^{\text{c}}(i,k) = \frac{d^2}{dx_i^2}\cos\left(\Lambda\left|x_i - x_k\right|\right), \tag{23a}$$

$$\mathbf{SM}_{\text{M}}^{\text{h}}(i,k) = \frac{d^2}{dx_i^2}\cosh\left(\Lambda\left|x_i - x_k\right|\right), \tag{23b}$$

$$\mathbf{SM}_{\text{V}}^{\text{c}}(i,k) = \frac{d^3}{dx_i^3}\cos\left(\Lambda\left|x_i - x_k\right|\right), \tag{23c}$$

$$\mathbf{SM}_{\text{V}}^{\text{h}}(i,k) = \frac{d^3}{dx_i^3}\cosh\left(\Lambda\left|x_i - x_k\right|\right), \tag{23d}$$

$$i, k = 1 \text{ or } 2 \,.$$

식(20) 이 의미있는 해를 갖기 위해서는 $\mathbf{SM}_{\text{beam}}$의 판별식이 영(zero)이 되어야 하는 조건,

$$\det\left[\mathbf{SM}_{\text{beam}}\right] = 0 \,, \tag{24}$$

으로부터 고유치가 구해질 수 있다. 식(23a-d)를 식(24)에 적용하면, 판별식은 다음과 같이 된다.

$$\det\left[\mathbf{SM}_{\text{beam}}\right] = \left(\cos \Lambda L \cdot \cosh \Lambda L - 1\right)\sin \Lambda L = 0 \,. \tag{25}$$

식(25)는 NDIF 방법에 의해 구해진 길이 L인 빔의 주파수 식(frequency equation)을 뜻한다. 식(25)에서

$$\left(\cos \Lambda L \cdot \cosh \Lambda L - 1\right) = 0 \tag{26}$$

의 근은 빔의 고유치에 해당하며,

$$\sin \Lambda L = 0 \tag{27}$$

의 근은 잉여 고유치(spurious eigenvalue)에 해당하며, 이는 현의 고유치에 해당함을 알 수 있다(식(11) 참조). 이와 같이 NDIF 법을 이용하여 빔의 고유치를 구하면, 현의 고유치에 해당하는 잉여 고유치도 함께 구해짐을 확인하였다. 더 나아가 빔의 고유치만을 제공하는 주파수 식은 식(28)과 같이 구해질 수 있음을 예측할 수 있다.

$$\frac{\det\left[\mathbf{SM}_{\text{beam}}\right]}{\det\left[\mathbf{SM}_{\text{string}}\right]} = 0 \,. \tag{28}$$

3. 자유단 경계를 갖는 평판

3.1 이론

2 장에서는 NDIF 법을 1 차원 현과 자유단 빔 (free beam)의 자유진동해석에 적용하여, 시스템 행렬식을 구하는 방법과 잉여 고유치의 의미와 그 제거 방법에 대하여 고찰하였다. 본 장에서는 2 장의 고찰 내용을 2 차원 멤브레인과 자유단 평판 (free plate)의 자유진동 해석에 확장한다. 2 장에서 NDIF 법에 의해 구한 자유단 빔의 주파수 식에 현의 주파수 식이 포함되어 있음을 확인하였듯이, NDIF 법에 의해 구해진 자유단 평판의 주파수 식에도 멤브레인의 주파수 식이 포함되어 있으리라 예측할 수 있을 것이다. 그래서, 잉여 고유치를 배제한 자유단 평판의 고유치를 구하기 위하여, 2 장에서의 과정과 동일한 방법(식(28) 참조)이 사용될 것이다.

3.1.1 고정단 멤브레인(Fixed membrane)

면밀도가 ρ 인 멤브레인이 장력 T 를 받고 있을 때 횡방향의 변형(transverse deflection)에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad (29)$$

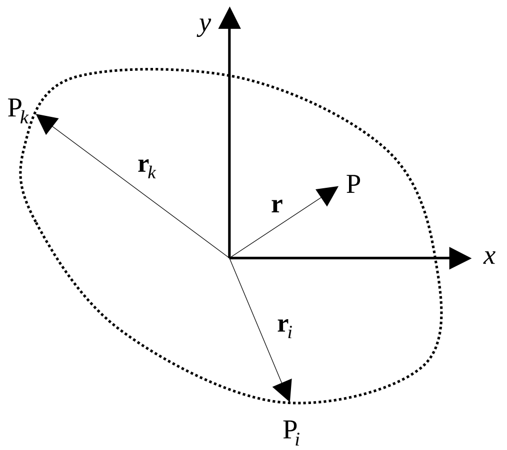

Fig. 3. Finite membrane (or plate) located on an infinite membrane (or plate).

여기서 $w = w(\mathbf{r}, t)$ 는 횡방향 변위, $c = \sqrt{T/\rho}$ 는 음속이다. 만약 멤브레인의 운동을 조화운동을 가정한다면, 지배방정식 식(31)은 다음과 같은 헤름홀츠(Helmholtz) 방정식이 된다.

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) + \Lambda^2 W(\mathbf{r}) = 0, \qquad (30)$$

여기서 $\Lambda = \omega/c$ 는 주파수 파라미터이다. Fig. 3 에서와 같이 무한 멤브레인(infinite membrane) 위에 놓인 점선으로 나타낸 유한 멤브레인(finite membrane)을 고려하자. 무한 멤브레인 위의 한 점 P_k 에서 단위 변위가 조화가진되어졌을 때, 다른 점 P 에서의 변위 응답을 뜻하는 NDIF 는 제 1 종 0 차 베셀함수 $J_0(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)$로 구해진다 [1]. 만약 Fig. 3 에서 유한 멤브레인의 경계(점선) 위에 N 개의 노드 P_1, P_2, …, P_k, …, P_N 이 설정되고, 각각의 점에서 NDIF 가 정의된다면, 유한 멤브레인의 자유진동 해는 다음과 같이 NDIF 들의 선형 결합으로 가정되어질 수 있다.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N} A_k J_0(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|). \qquad (31)$$

식(31)에 고정단 경계조건(fixed boundary condition)을 적용하는 방법에 의해 시스템 행렬식이 구해진다. 일반적으로 멤브레인의 고정단 경계조건은 경계를 따라 연속적으로 주어지는 연속 경계조건이다. 반면에 NDIF 법에서는 경계 위에 설정된 노드들에서만 주어진 경계조건을 고려하는 이산 경계조건식이 고려되어진다. 현재와 같은 고정단 경계인 경우의 이산 경계조건은 식(32)와 같이 주어진다 [1].

$$W(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (32)$$

식(32)를 식(31)에 적용한다면, 다음과 같은 N 개의 선형방정식이 구해진다.

$$W(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^{N} A_k J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = 0, \qquad (33)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

식(33)을 행렬식으로 간단히 표현하면, 다음과 같은 시스템 행렬식이 구해진다.

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{mem}}\ \mathbf{A} = \mathbf{0}, \qquad (34)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{\mathrm{mem}}$ 의 성분은

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{mem}}(i,k) = J_0(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \qquad (35)$$

에 의해 주어지며, $\mathbf{A}$ 는 시스템 벡터를 뜻한다.

식(34)가 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 이외의 해를 갖기 위해서는 시스템 행렬의 판별식이 영(zero)이 되어야 한다. 즉,

$$\det[\mathbf{SM}_{\mathrm{mem}}(\Lambda)] = 0. \qquad (36)$$

본 논문에서는 식(36)을 고정단 멤브레인의 주파수 식(frequency equation)으로 정의한다.

3.1.2 자유단 평판 (Free plate)

자유단 경계를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 주어진다 [6].

$$D_E \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (37)$$

$$M_n = 0\,, \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0\,, \qquad (38, 39)$$

여기서 $w = w(\mathbf{r}, t)$ 는 횡방향 변위, ρ 는 면밀도, $D_E = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E 는 Young's modulus, ν 는 Poisson ratio, h 는 평판의 두께이다. 또한 n 과 s 는 평판의 경계에서의 법선 및 접선 방향 좌표를 뜻한다. 조화운동 $w(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ 로 가정하면 식(37)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0\,, \quad \Lambda = \left(\rho\omega^2 / D_E\right)^{1/4}, \qquad (40, 41)$$

여기서 Λ 는 고유치 파라미터를 나타낸다.

Fig. 3 의 무한 평판 위의 한 점 P 에서 단위 변위가 조화 가진되어 졌을 때, 다른 점 P_k 에서의 변위 응답을 뜻하는 NDIF 는 선행 연구[4]에 의해 식(43)과 같이 구해졌다.

$$C_k J_0\left(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|\right) + D_k I_0\left(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|\right), \qquad (42)$$

여기서 J_0 와 I_0 는 각각 제 1 종 및 제 2 종 0 차 베셀함수를 나타낸다.

이제 Fig. 3 에서 점선으로 표시된 자유단 평판의 경계에 N 개의 노드가 설정되어졌다고 가정하자. 그리고, 각각의 노드에서 NDIF 를 정의한 다음, 평판의 자유진동 해를 이들 NDIF 들의 선형결합으로 가정하자. 즉,

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N} \left\{A_k J_0\left(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|\right) + B_k I_0\left(\Lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|\right)\right\}. \qquad (43)$$

식(43)에 자유단 경계 조건을 적용하기 위하여, 식(38, 39)를 다음과 같이 이산화된다.

$$M_n(\mathbf{r}_i) = 0\,, \ V_n(\mathbf{r}_i) = 0\,, \ i = 1, 2, \ldots, N\,. \quad (44, 45)$$

그리고, 차후의 수식 전개 과정을 간단히 하기위해, 식(44, 45)를 미분 연산자 L_{M} 과 L_{V} 을 사용하여 새로이 표현하자. 즉,

$$M_n(\mathbf{r}_i) \equiv L_{\mathrm{M}}[W(\mathbf{r}_i)] = 0\,, \qquad (46)$$

$$V_n(\mathbf{r}_i) \equiv L_{\mathrm{V}}[W(\mathbf{r}_i)] = 0\,, \qquad (47)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

이제, 이산 자유단 경계조건 식(46, 47)을 식(43)에 적용하면 다음의 식들이 각각 얻어진다.

$$L_{\mathrm{M}}(W(\mathbf{r}_i)) = \sum_{k=1}^{N} A_k L_{\mathrm{M}}[J_0\left(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|\right)] + \sum_{k=1}^{N} B_k L_{\mathrm{M}}[I_0\left(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|\right)] = 0\,, \qquad (48)$$

$$L_{\mathrm{V}}(W(\mathbf{r}_i)) = \sum_{k=1}^{N} A_k L_{\mathrm{V}}[J_0\left(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|\right)] + \sum_{k=1}^{N} B_k L_{\mathrm{V}}[I_0\left(\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|\right)] = 0\,, \qquad (49)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

식(48, 49)는 하나의 행렬식으로 간단히 표현 가능하다. 즉,

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{plate}}\, \mathbf{C} = \mathbf{0}\,, \qquad (50)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_{\mathrm{plate}}$ 와 시스템 벡터 $\mathbf{C}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_M^J & \mathbf{SM}_M^I \\ \mathbf{SM}_V^J & \mathbf{SM}_V^I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix}. \qquad (51, 52)$$

마지막으로, 자유단 평판의 고유치는

$$\det\left[\mathbf{SM}_{\mathrm{plate}}\right] = 0 \qquad (53)$$

의 근(root)으로부터 구해질 수 있으며, 멤브레인의 고유치에 해당하는 잉여 고유치 또한 이들 근 속에 포함되어 있을 것이다. 이러한 잉여 고유치를 제거하기 위하여, 식(28)과 같은 방법이 이용된다. 즉,

$$\frac{\det\left[\mathbf{SM}_{\mathrm{plate}}\right]}{\det\left[\mathbf{SM}_{\mathrm{mmem}}\right]} = 0\,. \qquad (54)$$

그리고 자유단 평판의 고유치 만을 제공하는 주파수 식을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\det\left[\mathbf{SM}_{\mathrm{plate}}\right]}{\det\left[\mathbf{SM}_{\mathrm{mmem}}\right]} \equiv \det[\mathbf{SM}_{\mathrm{net}}] = 0\,. \qquad (55)$$

4. 비교 예제

4.1 자유단 원형 평판(Free circular plate)

NDIF 법을 원형 평판에 적용하기 위해, 단위 반지름을 갖는 균일한 원형 평판 경계 위에 등간격으로 16 개의 노드를 설정하여 해를 구하였다. Table 1 에서 첫번째 열은 잉여고유치를 제거하기 전인 식(53)의 근을 의미한다. 두번째 열은 잉여고유치를 제거한 후인 식(55)의 근을 의미한다. 두번째 열의 고유치들을 엄밀해(세번째 열)와 비교해보면, NDIF 법에 의해 구해진 고유치가 엄밀해와 정확히 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

4.2 자유단 타원 평판(Free elliptic plate)

단축의 길이가 1m 이고, 단축에 대한 장축 비가 1.4 인 타원 평판에 대한 고유치 추출 결과가 Table 2 에 요약되어 있다. Table 2 에서 두번째 열은 식(55)에 의해 잉여고유치가 제거된 결과를

보여준다. 이들 고유치들은 FEM(ANSYS; 4335 노드)의해 구한 결과(세번째 열)와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

Table 1. Eigenvalues of the circular plate obtained by the proposed method and the other method.

NDIF 법 (Before sorting)	NDIF 법 (After sorting)	Exact solution	
		Plate	Membrane
2.29	2.29	2.29	
2.40			2.40
3.01	3.01	3.01	
3.50	3.50	3.50	
3.83			3.83
4.53	4.53	4.53	
4.64	4.64	4.64	
5.14			5.14
5.52			5.52
5.75	5.75	5.75	
5.94	5.94	5.94	
6.21	6.21	6.21	
6.38			6.38
6.84	6.84	6.84	
7.02			7.02
7.27	7.27	7.27	
7.59			7.59
7.74	7.74	7.74	

5. 결 론

본 논문에서는 NDIF 법을 이용하여 자유단 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석 기법을 제안하였다. 이 방법은 적은 개수의 경계 노드들을 사용함에도 아주 정확한 해를 제공하는 것이 관련 예제를 통해 검증되어 졌다.

후 기

이 논문은 2002 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2002-041-D00029).

참고문헌

(1) Kang, S. W., Lee, J. M., and Kang, Y. J., 1999, " Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membranes using Non-dimensional Dynamic Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

(2) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, " Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the method of Point-matching," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.

(3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, " Application of Free Vibration Analysis of Membranes using the Non-dimensional Dynamic Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, " Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges using Wave-type Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(5) Kang, S. W., 2002, " Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition using Non-Dimensional Dynamic Influence Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(6) Meirovitch, L., 1967, " Analytical Methods in Vibrations," New York: Macmillan Publishing, pp. 179~182.

Table 2. Eigenvalues of the elliptic plate obtained by the proposed method and the other method.

NDIF 법 (Before sorting)	NDIF 법 (After sorting)	Platre solution (FEM)	Membrane solution (Exact)
1.81	1.81	1.81	
1.96	1.96	1.95	
2.08			2.08
2.73	2.73	2.74	
2.83	2.83	2.83	
2.91	2.91	2.91	
3.04			3.04
3.58			3.58
3.70	3.70	3.70	
3.80	3.80	3.80	
3.84	3.84	3.84	
4.04			4.04
4.31	4.31	4.31	
4.44			4.44
4.70	4.70	4.69	