

회전 외팔보의 단면 형상 최적화

조정은† · 유흥희*

Shape Optimization of the Cross-section of a Rotating Cantilever Beam

Jung Eun Cho and Hong Hee Yoo

Key Words : Shape Optimization (형상 최적화), Cantilever Beam (외팔 보), Rotating Angular Speed (회전 각속도), Natural Frequency Variation (고유진동수 변화)

Abstract

When a cantilever beam rotates about the axis perpendicular to its longitudinal axis, its natural frequencies vary. This phenomenon which is caused by centrifugal inertia forces is often referred to as the stiffening effects. Since the variation of natural frequencies often creates critical problems for the rotating structures, it is necessary to control the variation of natural frequencies. As the cross section of a rotating cantilever beam varies, natural frequencies can be changed. The thickness and the width of the cantilever beam are assumed to be cubic spline functions in the present work. An optimization method is employed to find the optimal thickness and width of the rotating beam. This result can be used for the design of rotating structures such as turbine and helicopter blades.

1. 서 론

터빈 및 헬리콥터 블레이드, 그리고 인공위성 안테나 등에서 그 예를 발견할 수 있는 외팔 보 형태의 구조물들을 설계할 때에는 그 구조물들의 고유진동수를 파악하고 고려 해야 한다는 것은 주지의 사실이다. 정적인 구조물의 고유진동수는 구조물의 기하학적 연결상태, 재료의 강성, 질량 분포 등에 의해 결정되므로 설계 시에 이를 적용하는 것은 그리 어렵지 않다. 그러나 구조물의 대부분은 운동을 수반하는 경우가 많고, 때때로 이러한 운동이 구조물의 진동특성을 현격히 변화시키게 된다. 따라서 운동 없이 고정된 상태에서 구조물의 고유진동수를 구하여 이를 설계에 고려

하였다면 그렇게 설계된 구조물은 운동을 하는 경우 뜻하지 않은 공진현상 등의 문제를 야기할 수 있는 것이다. 특별히 외팔보 형태의 구조물은 종종 회전 속도에 의존하는 고유진동수 변화를 겪게 되는데, 이는 회전에 의해 생긴 원심력으로 인해 구조 강성이 증가한 결과이다. 최근 들어 구조물의 중량 감소와 에너지 절약의 필요성으로 인해 구조물의 유연성이 크게 증대되었으며 그 결과 회전에 의한 강성변화 현상은 더욱 현격히 발생하게 되었다. 따라서 설계 시에 이러한 고유진동수 변화를 고려해야 함은 당연하다 하겠다.

회전 외팔보의 진동특성에 관한 연구는 1920년에 Southwell 과 Gough⁽¹⁾의 연구를 시작으로 1950년대와 1970년대를 지나면서 이론적, 수치 해석적으로 발전을 이룩하였으며⁽²⁻⁵⁾, 근래에는 새로운 모델링 방법이 제시됨으로써 더욱 효율적이고 정확한 해석이 가능하게 되었다⁽⁶⁻⁸⁾. 그러나 이러한 연구들에서는 정해진 형상을 갖는 회전 외팔보의 진동해석을 위한 방법이 제시되었을 뿐 거꾸로 어떤 진동특성을 갖게 하기 위한 형상을 구하기 위한 방법은 제시되지 못하였다.

본 논문은 근래의 연구⁽⁹⁾에서 제시된 모델링을

† 한양대학교 대학원 기계설계학과

* 정회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-0570

이용하여, 회전하는 외팔보의 고유진동수 변화가 설계자가 원하는 방향으로 일어나게 하기 위하여 보의 단면형상 최적화를 달성하는데 그 목적을 두었다. 이러한 연구는 선행연구⁽¹⁰⁾를 통해 일부 이루어졌는데 여기서는 단지 두께변화만을 형상 최적화 하였다. 본 연구에서는 기존 연구를 더욱 일반화 하기 위하여 두께와 폭을 동시에 고려한 회전 외팔보의 면외방향 굽힘진동에 대한 형상 최적화를 목표로 하였다.

본 논문에서는 운동방정식을 유도하기 위하여 Kane⁽¹¹⁾의 방법을 이용하였으며, 근사화를 위해 가상 모드법을 사용하였으며, 최적화를 수행하기 위한 방법으로 MFD (Method of Feasible Direction) 방법을^(12, 13) 사용하였다.

2. 운동 및 진동방정식의 유도

2.1 운동방정식의 유도

본 장에서는 복합 변형 변수를 이용한 선형 동적 모델링에 근거하여 회전하는 외팔 보의 운동 방정식 유도에 대하여 소개하겠다. 보다 자세한 내용은 참고문헌⁽⁷⁾을 참조 할 수 있다. Fig. 1 은 해석대상이 되는 회전 외팔보의 형상을 나타낸다. 그림에서 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ 는 기준틀 A 에 부착된 단위 벡터들이며, \bar{u} 는 외팔보 임의의 점 P^* 의 탄성 변위 벡터를, u_1, u_2, u_3 는 그 성분을 나타낸다. 기준틀 A 의 각속도와 O 점의 속도는 다음 같이 표시된다.

$$\bar{\omega}^A = \Omega \bar{a}_3, \quad \bar{v}^O = v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 + v_3 \bar{a}_3 \quad (1)$$

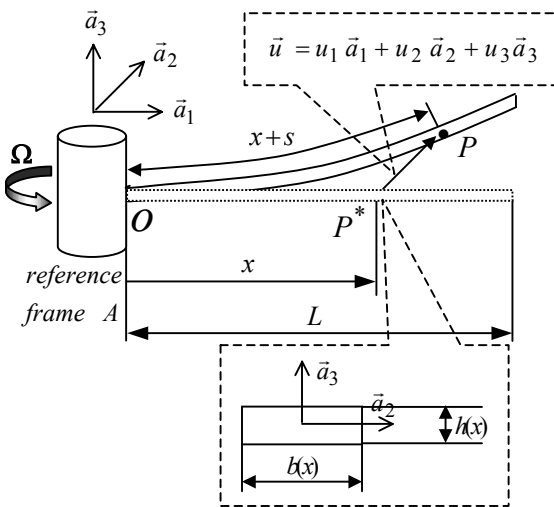


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

본 연구에서는 회전 외팔 보의 단면 형상 변화로 인한 진동 특성의 변화에 초점을 맞추기 위하여 다음의 몇 가지 가정을 하였다. 첫째, 외팔 보의 재질은 일정하고 등방성이다. 둘째, 전단 및 단면관성 효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않았다. 이 때 식(1)과 변위벡터 \bar{u} 를 이용하면 P 점의 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \Omega u_2] \bar{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)] \bar{a}_2 + [v_3 + \dot{u}_3] \bar{a}_3 \quad (2)$$

여기서 인장변수 s 와 u_2, u_3 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \\ u_2(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \\ u_3(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}$ 및 q_{1j}, q_{2j}, q_{3j} 는 각각 s, u_2, u_3 를 근사화 하기 위한 가상모드와 일반 좌표들이며 μ_1, μ_2, μ_3 는 각 모드함수의 개수이다. u_1 대신 s 를 근사화 하므로 식 (2)의 u_1 및 \dot{u}_1 를 s, u_2, u_3 로 표시하여야 하므로 다음의 기하학적 관계식을 이용한다.

$$x + s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \sigma}\right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \quad (4)$$

이 때 운동방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\int_0^L \rho b h \left(\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\bar{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

여기서 ρ 와 L 은 보의 밀도와 길이를 나타내고, q_i 는 q_{1j}, q_{2j}, q_{3j} 로 이루어지고, μ 는 일반 좌표의 총 개수로 μ_1, μ_2, μ_3 의 합이다. 보의 단면은 사각형이며 그 두께 h 와 폭 b 는 다음 같이 3 차 다항식의 형태로 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} h(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ b(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 \end{aligned} \quad (6)$$

보의 탄성에너지 U 는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{yy} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (7)$$

여기서 E, A, I_{zz}, I_{yy} 는 영률, 단면적, 2 차 면적 관성모멘트를 나타낸다.

2.2 진동방정식

본 연구는 회전 외팔 보의 단면형상 변화에 의한 면외방향 굽힘 진동 특성 변화에 초점을 맞추고 있다. Fig. 1 에서 0 점이 회전 중심이라 하면 식(5)에 의해 구해지는 운동방정식으로부터 다음 같은 면외방향 굽힘진동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{3i} \phi_{3j} dx \right) \ddot{q}_{3j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \left(\int_0^L E \frac{bh^3}{12} \phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} dx \right) q_{3j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h x \int_0^x \phi_{3i,\sigma} \phi_{3j,\sigma} d\sigma dx \right) q_{3j} \\ & = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_3) \end{aligned} \quad (8)$$

위의 식에 두께 h 와 폭 b 를 나타내는 3 차 다항식인 식(6)을 대입하고 부분 적분법을 이용하면 진동방정식은 다음과 같은 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$[M^{33}] \{\ddot{q}_3\} + [K^B + \Omega^2 K^{GB}] \{q_3\} = 0 \quad (9)$$

여기서 $[M^{33}], [K^B], [K^{GB}]$ 의 요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{33} \equiv \rho \int_0^L \left\{ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3) \right\} \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (10)$$

$$K_{ij}^B \equiv \frac{E}{12} \int_0^L \left\{ (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3) (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^3 \right\} \phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} dx \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{GB} \equiv & \rho \int_0^L \left\{ \frac{a_0 d_0}{2} (L^2 - x^2) + \frac{a_0 d_1 + a_1 d_0}{3} (L^3 - x^3) \right. \\ & + \frac{a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0}{4} (L^4 - x^4) \\ & + \frac{a_0 d_3 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_3 d_0}{5} (L^5 - x^5) \\ & + \frac{a_1 d_3 + a_2 d_2 + a_3 d_1}{6} (L^6 - x^6) \\ & + \frac{a_2 d_3 + a_3 d_2}{7} (L^7 - x^7) + \left. \frac{a_3 d_3}{8} (L^8 - x^8) \right\} \\ & \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \end{aligned} \quad (12)$$

3. 최적화 문제설정

3.1 문제설정

앞에서 구한 진동방정식을 살펴보면 시스템의 고유진동수들은 회전각속도 및 두께와 폭의 다항식의 계수로 결정된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_k(\Omega, a_0, a_1, a_2, a_3, d_0, d_1, d_2, d_3) \\ &= \omega_k(\Omega, X) \end{aligned} \quad (13)$$

(k - th natural frequency)

그러므로 $a_0, a_1, a_2, a_3, d_0, d_1, d_2, d_3$ 계수들을 설계변수(X)로 정하고, 회전 각속도에 의한 k 번째 고유진동수를 목적함수로 정의 내릴 수 있으며, 구속조건 역시 부여 할 수 있다. 최적화 과정에서 설계변수들의 상한치와 하한치는 $[-100, 100]$ 으로 설정하였다. 재료는 알루미늄으로 선정하였으며 그 물성치는 Table 1 에 나타나 있다.

3.2 첫 번째 고유진동수의 영역 결정

정상상태에서의 회전체 구조물의 고유진동수는 단면 형상을 이루는 계수만으로 구성되어진 함수가 된다. 그러므로 형상의 변화로써 고유진동수의 변화를 얻을 수 있으며, 이를 위해 설정된 목적함수와 구속조건은 다음의 식과 같다.

Table 1 Data for numerical simulation

Young's modulus(E)	69.0×10 ⁹ Pa
Density(ρ)	2.71×10 ³ Kg/m ³
Length(L)	0.4 m

$$\text{Min / Max } F(X) = \omega_1(\Omega_s, X)$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } & \int_0^L h(X, x)b(X, x)dx \leq Lh_0b_0 \\ & h(X, x) \geq h_{\min} \quad (0 \leq x \leq L) \\ & b(X, x) \geq b_{\min} \quad (0 \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 Ω_s 는 정상상태 회전 각속도 크기
 $h_0 = 0.002$ 는 균일한 보의 초기 두께
 $b_0 = 0.035$ 는 균일한 보의 초기 폭
 $h_{\min} = 0.001$ 는 최소 보의 두께
 $b_{\min} = 0.0175$ 는 최소 보의 폭

Fig. 2 에서는 보의 정상상태 회전 각속도(Ω_s)를 0 에서 300 rad/s 까지 차례대로 변화시켜 가면서 최적화를 수행한 후 얻어진 첫번째 고유진동수의 최소값과 최대값을 보여준다. 따라서 이 그림은 보의 형상 변경을 통해 바꿀 수 있는 첫번째 고유진동수의 영역을 나타낸다.

Fig. 3 과 Fig. 4 에서는 회전 각속도 변화에 따른 보의 두께와 폭의 형상 변화를 나타내는 그림으로 Fig. 2 에서 0 와 300 rad/s 각속도에 해당하는 고유진동수를 갖는 형상을 나타내었다. 보의 형상 변경을 통하여 얻을 수 있는 첫 번째 고유진동수의 범위는 각속도가 0rad/s 일 때 13.2rad/s 에서 336.rad/s 의 범위이며, 각속도가 300rad/s 일 때 306.rad/s 에서 516.rad/s 의 범위이다. 그리고 첫 번째 고유진동수를 최소로 하는 형상은 두께 h 와 폭 b 모두 회전각속도에 따라 변하지만, 첫 번째 고유진동수를 최대로 하는 형상은 두께 h 에서는 변화를 보이고 폭 b 에서는 각속도 변화와 관계없이 최소값에서 결정됨을 확인할 수 있다. 이는 폭을 줄여 두께를 증가시키는 것이 고유진동수의 증대를 달성할 수 있는 가장 효과적인 방법이기 때문으로 판단된다.

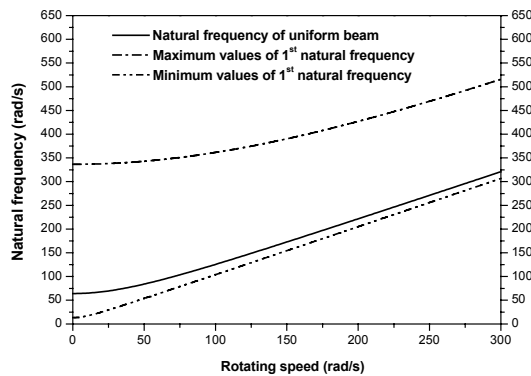


Fig. 2 Band of 1st natural frequency vs. rotating speed

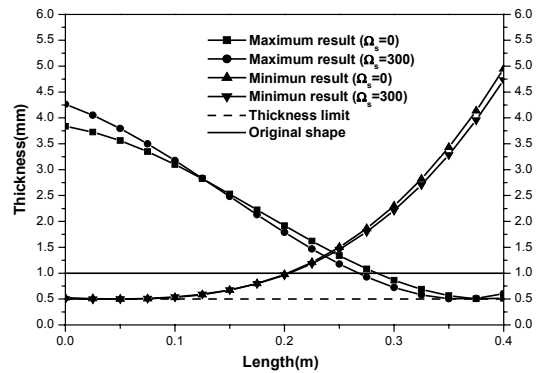


Fig. 3 Thickness shapes which maximize or minimize 1st natural frequency

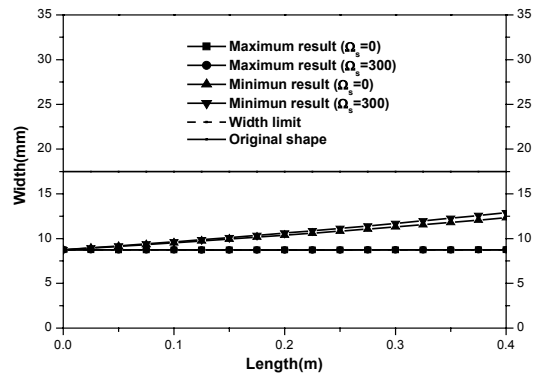


Fig. 4 Width shapes which maximize or minimize 1st natural frequency

3.3 무회전 시 고유진동수 구속조건의 부가

이번에는 위와 동일한 해석을 수행하되 단면을 변화시키더라도 회전이 없을 때의 고유진동수는 처음 값과 동일하게 유지시키기 위한 구속조건을 추가하는 경우의 결과들을 살펴보도록 한다. 이때 목적함수와 구속조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Min / Max } F(X) = \omega_1(100, X)$$

$$\text{Subject to } \omega_1(0, X) - \omega_1(0, X_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L h(X, x)b(X, x)dx \leq Lh_0b_0 \\ & h(X, x) \geq h_{\min} \quad (0 \leq x \leq L) \\ & b(X, x) \geq b_{\min} \quad (0 \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $X_0 = [0.002, 0, 0, 0, 0.035, 0, 0, 0]$ 로 이는 균일한 보가 갖는 설계변수들을 나타낸다.

Fig. 5, Fig. 6, 그리고 Fig. 7은 위 문제의 최적화 수행으로 얻어진 결과들로서 고유진동수 변화와 단면형상의 변화를 나타내는 그림들이다.

Fig. 5는 회전 각속도 증가에 따른 첫번째 고유진동수의 가능영역을 보여준다. 단면 형상변화에 따라, 무회전 시 고유진동수는 유지하면서, 고유진동수의 증가율이 달라질 수 있음을 이 결과는 보여준다. 또한 회전 외팔보의 면외 굽힘진동의 경우, 고유진동수와 회전 주파수가 일치하는 임계각속도가 고유진동수를 최소화하는 보 형상에서도 존재하지 않음을 보여준다.

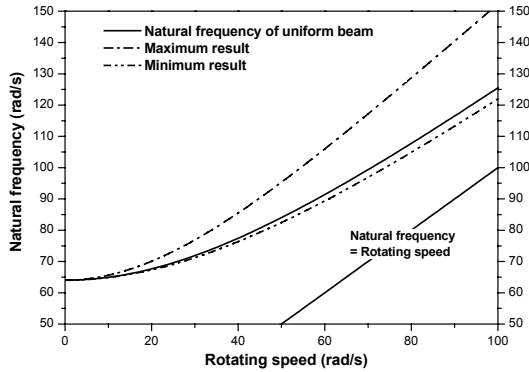


Fig. 5 Band of 1st natural frequency vs. rotating speed

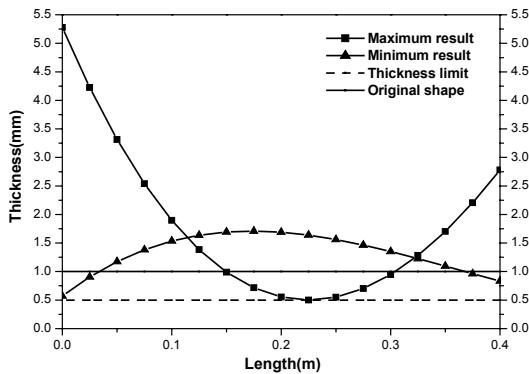


Fig. 6 Thickness shapes which maximize or minimize 1st natural frequency

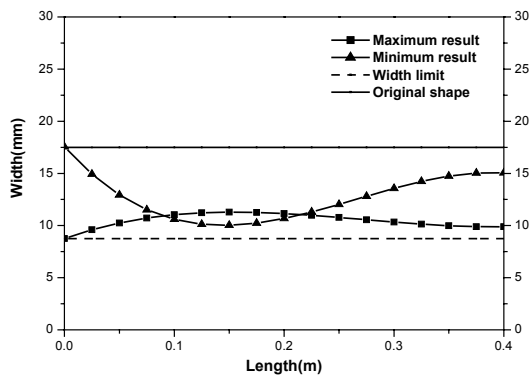


Fig. 7 Width shapes which maximize or minimize 1st natural frequency

Fig. 6과 Fig. 7은 보의 길이에 따른 단면형상의 변화를 보여주는 그림이다. 고유진동수를 최대로 하는 형상은 폭 b 를 $0.4L$ 부근의 지점에서 크게 하고, 고유진동수를 최소로 하는 형상은 폭 b 를 $0.4L$ 부근의 지점에서 줄이는 것이 효과적임을 보이고 있다. 참고문헌(14)에서는 부가되는 집중 질량 위치에 따라 고유진동수의 증가가 달라짐을 보여주었는데 본 연구 결과는 이와 유사한 경향을 보여주고 있다.

3.4 회전 시 고유진동수 구속조건의 부가

이번에는 임의로 지정되는 고유진동수를 갖는 보의 형상을 설계하기 위하여 식 (15)에 하나의 구속조건을 더 추가한다. 즉 각속도 100rad/s 일 때 고유진동수는 140rad/s 라는 구속조건을 추가하여 결과값들을 살펴보도록 한다. 목적 함수와 구속조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Min / Max } F(X) = \omega_1(100, X)$$

$$\text{Subject to } \omega_1(0, X) = 140$$

$$\omega_1(0, X) - \omega_1(0, X_0) = 0$$

$$\int_0^L h(X, x)b(X, x)dx \leq Lh_0b_0 \quad (16)$$

$$h(X, x) \geq h_{\min} \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$b(X, x) \geq b_{\min} \quad (0 \leq x \leq L)$$

Fig. 8, Fig. 9, 그리고 Fig. 10은 위 문제의 최적화 수행으로 얻어진 결과들이며 고유진동수 변화와 단면형상의 변화를 나타내는 그림들이다. 각속도 100rad/s 에서 고유진동수가 140rad/s 가 되게 만족시키는 보의 형상은 Fig. 9와 Fig. 10에 주어진 결과의 형상을 가지며 이는 Fig. 6과 Fig. 7의 최대 고유진동수를 가지는 보의 형상과 매우 유사함을 확인 할 수 있다.

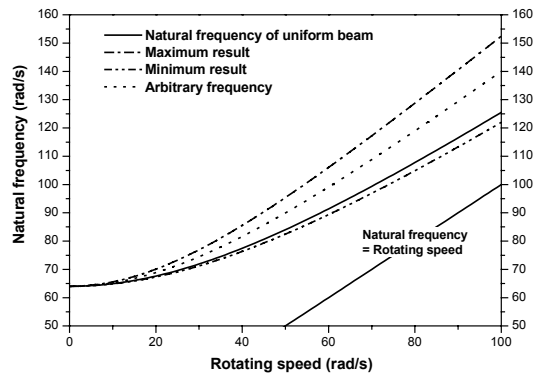


Fig. 8 Band of 1st natural frequency vs. rotating speed

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No.766.
- (2) Scilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp.28~30.
- (3) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *J. Mechanical Engineering Sci.*, Vol. 1, pp. 235~240.
- (4) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," NACA 3459.
- (5) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56,pp.175~185.
- (6) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, 1987, pp.139~151.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), 1995, pp.261~278.
- (8) Yoo, H. and Shin, S., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*. 212(5), 1998, pp.807~828.
- (9) Yoo, H., 1995, "Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 19, No. 2, pp. 348~353.
- (10) Yoon, Y and Yoo, H., 2001, "Shape Optimization of Rotating Cantilever Beams Considering Modal and Stress Characteristics," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 25, No. 4, pp. 645~653.
- (11) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- (12) Arora, J., 1989, *Introduction To Optimum Design*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- (13) Vanderplaates Research and Development, Inc., 1995, DOT user manual.
- (14) Yoo, H., Seo, S., and Huh, K., "The effect of a concentrated mass on the modal characteristics of a rotating cantilever beam," *J. of Mechanical Engineering Science*, Vol. 216, Part C, pp. 151~163.

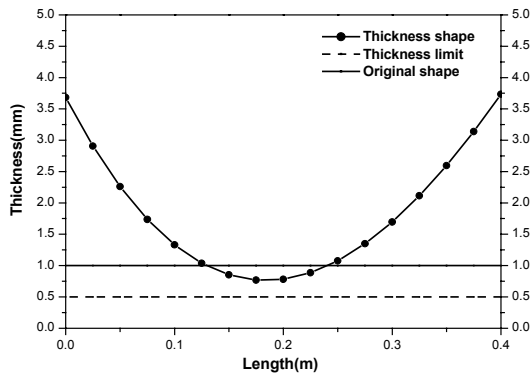


Fig. 9 Thickness shape of beam for a prescribed natural frequency

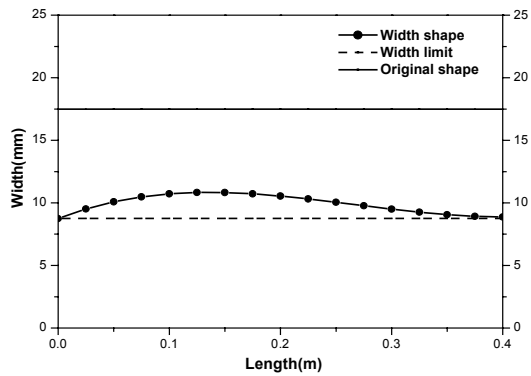


Fig. 10 Width shape of beam for a prescribed natural frequency

4. 결 론

본 연구에서는 회전각속도의 변화에 따른 외팔보의 면외 굽힘방향 고유진동수의 변화를 최대화 혹은 최소화 할 수 있는 보 단면 형상을 설계하기 위한 방법 및 결과를 제시하였다. 외팔보 단면의 형상은 사각을 대상으로 하였으며 두께 h 와 폭 b 를 3 차 다항식 형태로 가정하여 그 계수들을 설계변수로 하는 최적화 문제들로 정식화 하였다. 회전 외팔보의 첫 번째 고유진동수를 최소로 하는 형상은 두께 h 와 폭 b 가 모두 변화하나 최대로 하는 형상은 두께 h 에서는 변화를 보이지만 폭 b 에 대해서는 그 하한치에서 결정되는 것을 알 수 있었다. 또한 고유진동수를 설계자가 변할 수 있는 범위 내에서 원하는 값으로 결정하기 위한 구속조건들이 주어지는 경우에는 앞의 경우와는 달리 보 단면의 두께 및 폭이 모두 변화하는 것을 확인할 수 있었다.