

복합재 회전 외팔보의 면외방향 굽힘진동 해석

이승현[†], 신상하[†], 유흥희^{*}

Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Composite Cantilever Beams

Seung Hyun Lee, Sang Ha Shin, and Hong Hee Yoo

Key Words : Flapwise Bending Vibration (면외방향 굽힘진동), Composite (복합재), Fiber Angle (섬유 배치각), Rotating Cantilever Beam (회전 외팔보), Natural Frequency Variation (고유진동수 변화), Mode Shape Variation (모드형상 변화)

ABSTRACT

A modeling method for the modal analysis of a rotating composite beam is presented in this paper. Linear differential equations of motion are derived by using the assumed mode method. For the modeling, hybrid deformation variables are employed and approximated to derive the equations of motion. Symmetrical laminated layers are considered for the composite beam. The effects of the dimensionless angular velocity, the hub radius and the fiber orientation angle parameter on the variations of modal characteristics are investigated.

1. 서 론

복합재를 이용한 회전 외팔보 구조물은 헬리콥터 회전익과 같은 공학적 예제에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물을 새로 설계하거나 혹은 기존의 성능을 평가하거나 개선하려면 그의 진동 특성을 정확히 파악하는 것이 필수적이라 할 수 있다. 회전운동을 하는 외팔보의 진동 특성은 고정된 외팔보의 그것과 다르다. 회전운동은 원심방향 관성력을 발생시키고 이는 시스템의 굽힘 강성을 증가시키는 효과를 초래하며 따라서 회전속도의 변화에 따라 보의 진동 특성도 변화하게 된다. 이러한 구조물의 소재로는 일반적으로 고강도와 경량 특성을 동시에 만족시키는 복합재가 널리 이용되는데, 복합재는 섬유 배치각과 적층 수를 변화시키거나 적절한 구성 재료의 선택을 통해 그 구조 강성을 적절히 변화시킬 수 있는 특징도 가지고 있다. 결과적으로, 복합재 회전 외팔보의

진동특성은 회전에 의해서 발생하는 강성변화와 복합재 자체의 강성변화 특성을 동시에 적절히 고려하여 예측되어야 한다.

등방성 재료의 회전 외팔보 진동 특성에 대한 연구로는 에너지 방법을 이용한 최초의 해석적 연구가 Southwell 과 Gough^[1]에 의해 수행되었으며 Schilhansl^[2]은 회전 외팔보의 운동방정식을 최초로 직접 유도하고 더 정확한 해석식을 구하였다. Putter 와 Manor^[3]는 기본적으로 참고문헌 [2]에 제시된 모델링에 전산 수치해석 방법을 적용한 초기 연구내용을 발표하였으며 이러한 모델링에 기초한 연구들이 최근까지 많이 이루어져 왔다. 최근에는 또한 해석의 효율성 및 적용범위를 넓힌 새로운 모델링 방법에 의한 연구결과들이^[4, 5] 제시되고 있다. 고정된 복합재 구조물의 진동 특성에 대한 연구는^[6-10] 많은 참고문헌을 참조할 수 있으나 회전운동을 하는 복합재 구조물에 대한 연구는 별로 알려져 있지 않다.

본 연구의 목적은 복합재 회전 외팔보의 섬유 배치각과 회전각속도 및 축반경의 변화에 따른 고유진동수와 모드 형상의 변화를 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하고, 그 모델링에 근거하여 해석결과를 도출하여 그 진동 특성을 분석하고 규명하는데 두고있다.

[†] 한양대학교 대학원 기계설계학과

^{*} 정회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2290-0446

2. 진동방정식 유도

2.1 복합재 외팔보의 탄성에너지

본 연구에서는 외팔보의 두께 방향 전단 변형을 무시하기로 가정한다. 이 경우 복합재 외팔보의 탄성에너지^[11]는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [A_{11} \varepsilon_{x_0}^2 + 2B_{11} \varepsilon_{x_0} k_y + D_{11} k_y^2] dx \quad (1)$$

여기서 A_{11} , B_{11} , D_{11} 은 복합재 평판이 그림 2 와 같이 여러 층으로 구성되어 있을 때, 그 각 층의 특성치를 다음과 같이 적분하여 구한다

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N Q_{11}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{11}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{11}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $Q_{ij}^{(k)}$ 는 복합재를 구성하는 k 번째 층의 off-axis 강성치를^[11], z_k 와 z_{k-1} 은 k 번째 층의 윗 면과 아래 면까지의 두께 방향 거리, N 은 적층수를 나타낸다. (1)식에서 또한 인장 및 굽힘 변위들로는 그림 1 에 나타난 변형변수 s 와 u_3 를 사용 다음과 같이 나타낸다.

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \quad (3)$$

위식을 (1)식에 대입하여 표시하면

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (4)$$

근사화된 상미분 운동방정식을 구하기 위해 Rayleigh-Ritz Assumed Mode Method 를 사용하여 변형변수들을 다음과 같이 근사화하여 나타낸다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \\ u_3(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

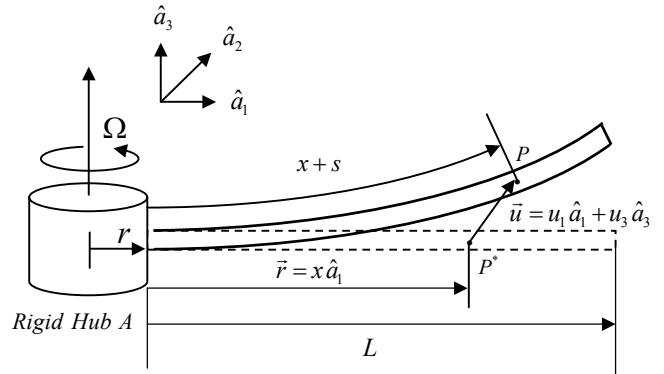


Fig.1. Configuration of a rotating cantilever beam

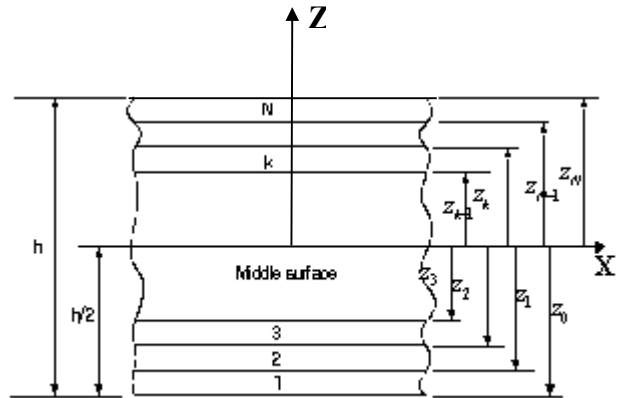


Fig.2 Laminated composite beam geometry and layer numbering

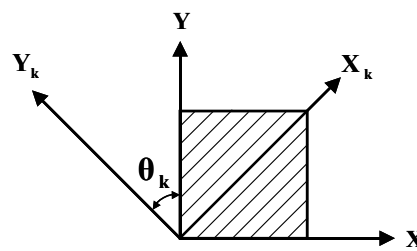


Fig.3 Fiber angle of the k-th layer of the laminated composite beam

여기서 ϕ_{1j}, ϕ_{3j} 는 s 와 u_3 를 위한 가상모드들이고, q_{1j}, q_{3j} 는 일반좌표, μ_1, μ_3 는 사용된 일반좌표의 개수이다.

2.2 진동방정식

Kane 의 방법을^[12] 이용하면 탄성체 운동방정식

은 다음의 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d\bar{v}^p}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (6)$$

여기서 $\mu = \mu_1 + \mu_3$ 이다. 식(6)에서 \bar{v}^p 는 질점 P 의 속도를 의미하고 U 는 탄성에너지, ρ 와 L 은 Beam 의 단위 길이당 질량과 길이를 각각 의미한다. Fig 1 의 Beam 이 붙어있는 강체 A 의 각속도를 $\bar{\omega}^A$ 라 하고 Component 를 사용하여 표시 하면

$$\bar{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad (7)$$

따라서

$$\bar{v}^p = u_1 \hat{a}_1 + \Omega(r+x+u_1) \hat{a}_2 + u_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

그러므로

$$\frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \dot{q}_i} = \left[\phi_{1i} - \sum_{j=1}^{\mu} \left(\int_0^x \phi_{3i,\eta} \phi_{3j,\eta} d\eta \right) q_j \right] \hat{a}_1 + \phi_{3i} \hat{a}_3 \quad (9)$$

Eq.(4), Eq.(6), Eq.(8), Eq.(9)을 이용하고 복합재 Layer 들의 symmetric 적층을 가정하면 인장방향 운동과 면외굽힘 방향 운동과의 연성이 사라져서 면외굽힘 방향 운동은 독립적으로 다음 방정식의 지배를 받게 된다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \left(\int \rho \phi_{3i} \phi_{3j} dx \right) \ddot{q}_{3j} + \sum_j \left(D_{11} \phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} dx \right) q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} \Omega^2 \left[r \left(\int \rho (l-x) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right) q_{3j} + \left(\int \frac{1}{2} \rho (l^2 - x^2) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right) q_{3j} \right] = 0 \quad (i=1, \dots, \mu_3) \quad (10)$$

2.3 무차원 진동방정식

Eq.(10)의 운동 방정식을 무차원 방정식 형태로 바꾸기 위해서 다음과 같이 무차원 변수들을 정의 한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \theta_i \equiv \frac{q_i}{L}, \quad \psi_i(\xi) \equiv \phi_i(x), \quad \gamma \equiv T\Omega \quad (11)$$

여기서 $T \equiv \sqrt{\frac{\rho L^4}{D}}$ 로 D 는 모든 적층의 섬유 배치

각을 0 도로 하였을 경우의 D_{11} 의 값이다.

Eq.(11)을 이용하여 Eq.(10)의 방정식을 무차원화 하면

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \left(\int \psi_{3i} \psi_{3j} d\xi \right) \ddot{\theta}_{3j} + \sum_j \left(\delta \psi_{3i,\xi\xi} \psi_{3j,\xi\xi} dx \right) \theta_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} \gamma^2 \left[\sigma \left(\int (1-\xi) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi \right) \theta_{3j} + \left(\int \frac{1}{2} (1-\xi^2) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi \right) \theta_{3j} \right] = 0 \quad (i=1, \dots, \mu_3) \quad (12)$$

여기서

$$\delta = \frac{D_{11}}{D}, \quad \sigma = \frac{r}{L} \quad (13)$$

Eq.(12)를 행렬식으로 표시하면

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \left[M_{ij}^{33} \ddot{\theta}_{3j} + \left\{ K_{ij}^{Ba} + \gamma^2 K_{ij}^{G3} \right\} \theta_{3j} \right] = 0 \quad (14)$$

여기서

$$M_{ij}^{33} = \int_0^1 \psi_{3i} \psi_{3j} d\xi$$

$$K_{ij}^{B3} = \delta \int_0^1 \psi_{3i,\xi\xi} \psi_{3j,\xi\xi} d\xi$$

$$K_{ij}^{G3} = \int_0^1 \sigma (1-\xi) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi \quad (15)$$

Eq.(14)에서 θ_{3j} 를 조화함수(harmonic function)라고 가정하면 그 요소들로 이루어진 열 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta = e^{j\omega\tau} \Theta \quad (16)$$

Eq.(16)에서 j 는 허수를 나타내며, ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원변수이며 Θ 는 각 모드형을 대표하는 열 행렬이다. Eq.(16)을 이용하여 Eq.(14)를 정리하면

$$\omega^2 M \Theta = K \Theta \quad (17)$$

여기서 M 과 K 는 크기를 $(\mu_3 \times \mu_3)$ 갖는 정방행렬들로 그 요소들은 다음과 같이 표시된다.

$$M_{ij} = M_{ij}^{33}$$

$$K_{ij} = K_{ij}^{Ba} + \gamma^2 K_{ij}^{G3} \quad (18)$$

3. 수치해석 결과

3.1 적층각의 변화에 따른 고유진동수의 변화

본 논문에서는 해석 예제로서 8 층으로 구성된 복합재를 대상으로 하였으며 1, 4, 5, 8 번째 층은 Material 1 을 사용하였으며 2, 3, 6, 7 번째 층은 Material 2 를 사용하였다. 섬유 배치각은 중심선에 대해 대칭 형태로 하였다. 즉 k 번째 Layer 의 섬유 배치각을 θ_k 라고 하면 $\theta_1 = \theta_8$, $\theta_2 = \theta_7$, $\theta_3 = \theta_6$, 그리고 $\theta_4 = \theta_5$ 이다. Material 1 과 2 의 재료특성은 Table 1 에 나타나 있다.

그림 5 는 $\theta_3 = 45^\circ$ 그리고 $\theta_4 = 90^\circ$ 로 고정된 상태에서 θ_2 를 30, 60, 90 도의 3 가지 경우에 대해 θ_1 을 0 도에서 90 도까지 변화시키며 δ 의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 보듯이 δ 값은 대략 $0 < \delta \leq 1$ 범위에서 변화하는 것을 알 수 있다.

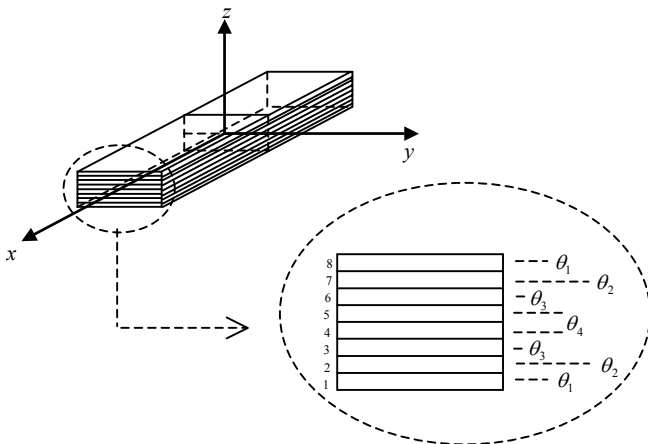


Fig 4. Fiber direction of the eight-layer laminate

Table 1 Material properties of the composite beam

	Material 1	Material 2
Name	T300/5208	Kevlar Fiber - Epoxy
E_1 (GPa)	84	181
E_2 (GPa)	5.6	10.3
G_{12} (GPa)	2.1	7.17
ν_{12}	0.34	0.28

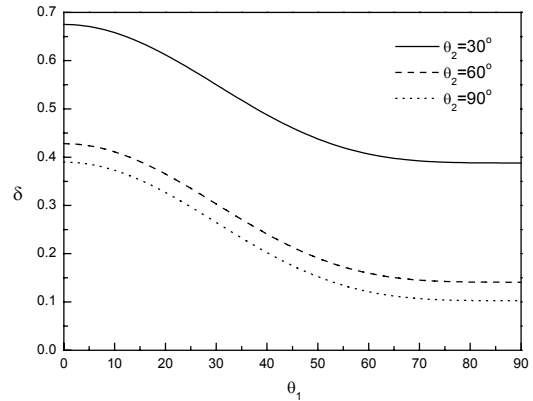


Fig.5 Variation of δ vs. variations of fiber angles

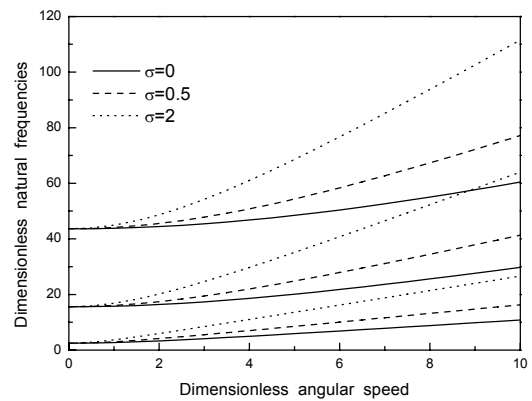


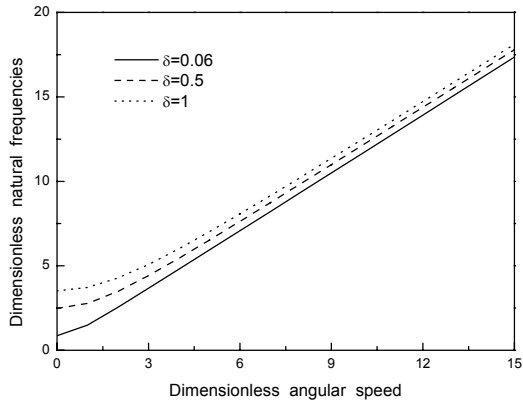
Fig.6 Natural frequency variation as angular speed increases

그림 6 은 $\delta = 0.5$ 일 때 구한 회전 각속도변화에 따른 가장 낮은 3 고유진동수의 변화를 보여준다. 잘 알려진 것처럼 고유진동수들은 회전 각속도의 증가에 따라 증가하며 그 증가율은 σ 값이 증가할수록 더욱 커진다.

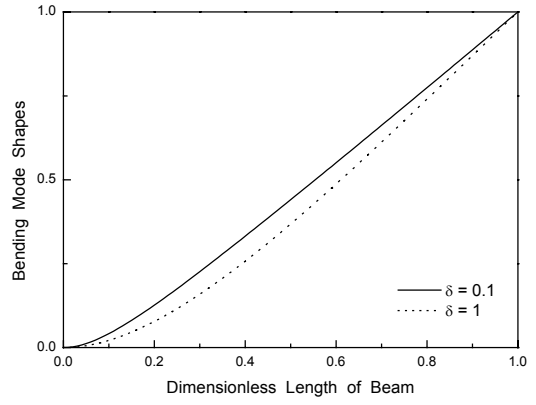
그림 7 의 (a)와 (b)는 $\sigma = 0.1$ 로 고정하고 회전 각속도를 증가시켰을 때 δ 값의 변화에 따른 첫 번째와 두 번째 고유진동수 변화를 각각 보여준다.

그림 8 은 회전각속도 증가에 따른 δ 의 영향력 변화를 살펴보기 위한 도표이다. 도표에서 $\lambda^{(i)}$ 는 다음 식으로부터 얻어진다.

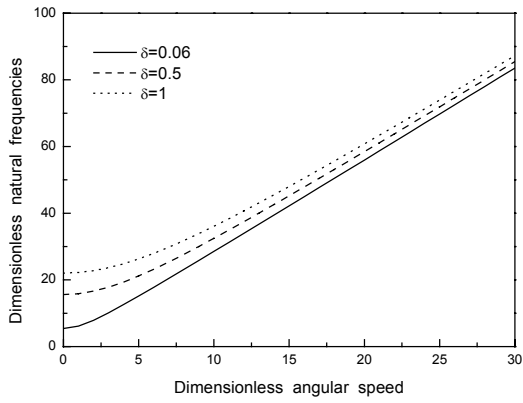
$$\lambda^{(i)} \equiv (\omega_{\max}^{(i)} - \omega_{\min}^{(i)}) / \omega_{\max}^{(i)} \quad (19)$$



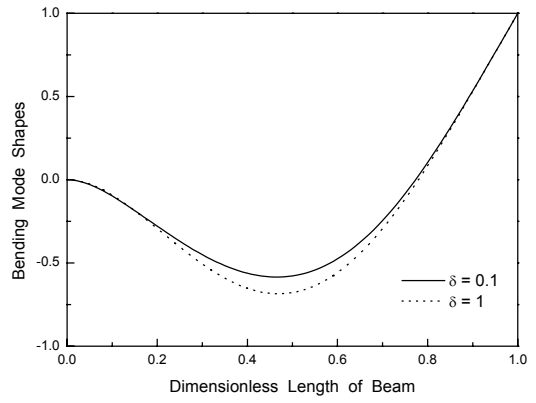
(a) First natural frequencies



(a) First mode shapes



(b) Second natural frequencies



(b) Second mode shapes

Fig 7. Natural frequency variation as the angular speed increase for fiber angle parameter δ

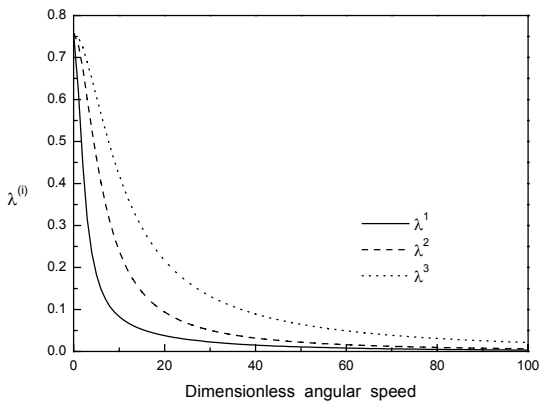
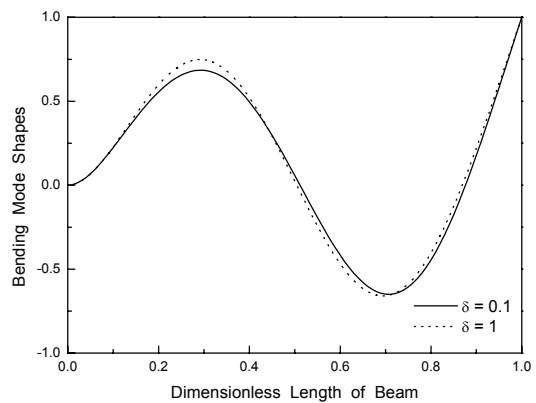


Fig 8. Effect of fiber angle parameter δ on natural frequency variation as the angular speed increases



(c) Third mode shapes

Fig 9. Comparison of mode shapes for fiber angle parameter δ

여기서 $\omega_{\max}^{(i)}$ 와 $\omega_{\min}^{(i)}$ 는 δ_{\max} 와 δ_{\min} 을 사용했을 때 얻어지는 i 번째 고유진동수들이다. 그림에서 보듯이 $\lambda^{(i)}$ 값들은 회전각속도가 증가할수록 급속히 감소하는 것을 알 수 있다.

3.2 매개변수 δ 의 변화에 의한 모드형상 변화

Fig 9 는 $\gamma = 5$, $\sigma = 0.1$ 일 때 $\delta = 0.1$ 일 때와 $\delta = 1$ 일 때의 세 모드의 변화를 각각 보여준다. 이 그림들은 δ 의 증가가 모드형상의 변화에 큰 영향을 주지 못함을 보여준다.

4. 결 론

본 논문에서는 회전하는 복합재 외팔보의 면외 방향 굽힘진동특성을 예측하기 위한 진동방정식이 제시되었으며 이를 이용한 해석결과가 도출되었다. 본 논문에서는 인장방향과의 연성효과가 사라지게 되는 대칭 적층의 경우에서 대해 나타나는 3 가지 매개변수의 고유진동수의 변화에 미치는 영향을 조사하였다. 회전각속도 매개변수 γ 와 축반경비 매개변수 σ 그리고 섬유배치각 매개변수 δ 는 모두 그 증가에 따라 고유진동수 증가를 초래한다. 축반경비 매개 변수와는 다르게 섬유 배치각 매개 변수 δ 는 그러나 회전각속도가 증가할수록 고유진동수의 변화에 미치는 영향이 상대적으로 점차 감소한다. δ 의 변화는 모드형상 변화에도 영향을 미치나 회전 각속도의 증가에 따라서 그 영향이 아주 미세해지는 것을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No.766.
- (2) Scilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp.28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56,

- pp.175~185.
- (4) Yoo, H. and Shin, S. W., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*. 212(5), 1998, pp.807~828.
- (5) Kuo, C. and Lin, S., 1998 "Modal Analysis and Control of a Rotating Euler-Bernoulli Beam Part I: Control System Analysis and Controller Design" *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 27, No. 5, pp. 75-92.
- (6) Kapania, R. K. and Raciti, S., 1989, "Nonlinear Vibration of Unsymmetrically Laminated Beams", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 2, pp. 201-210.
- (7) Rand, O., 1991, "Periodic Response of Thin-Walled Composite Helicopter Rotor Blades", *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 4, pp. 3-11.
- (8) S. Mohamed Nabi and N. Ganesan, 1994, "A Generalized Element for the Free Vibration Analysis Composite Beams", *Computers and Structures*, Vol. 51, pp. 607-610.
- (9) Kosmatka, J. B. and Friedmann, P. P., 1989, "Vibration Analysis of Composite Turbo-Propellers Using a Nonlinear Beam-Type Finite Element Approach", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 11, pp. 1606-1614.
- (10) K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy and S. Roy, 1990, "Free Vibration of Composite Beams Including Rotray Inertia and Shear Deformation", *Composite Structures*, Vol. 14, pp. 269-279.
- (11) Geoff and Eckold, 1994, Design and Manufacture of Composite Structures, Woodhead Publishing Ltd.
- (12) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.