장애함수법에 의한 신뢰성기반 최적설계

이태희* • 최운용** • 김홍선**

Barrier Function Method in Reliability Based Design Optimization

Tae Hee Lee ,Woonyong Choi, and Hongsun Kim

Key Words : Reliability Based Design Optimization (신뢰성기반 최적설계), Barrier Function (장애함수), Advanced Mean Value Plus Method (개선된 평균값 플러스 기법), FORM(First-Order Second Moment method:일계이차모멘트법), Reliability Index Approach (신뢰도지수접근방법), Performance Measure Approach (목표성능치 접근방법) Barrier Function Method (장애함수법)

Abstract

The need to increase the reliability of a structural system has been significantly brought in the procedure of real designs to consider, for instance, the material properties or geometric dimensions that reveal a random or incompletely known nature. Reliability based design optimization of a real system now becomes an emerging technique to achieve reliability, robustness and safety of these problems. Finite element analysis program and the reliability analysis program are necessary to evaluate the responses and the probabilities of failure of the system, respectively. Moreover, integration of these programs is required during the procedure of reliability based design optimization. It is well known that reliability based design optimization can often have so many local minima that it cannot converge to the specified probability of failure. To overcome this problem, barrier function method in reliability based design optimization is suggested. To illustrate the proposed formulation, reliability based design optimization of a bracket is performed. AMV and FORM are employed for reliability analysis and their optimization results are compared based on the accuracy and efficiency.

기호설명

Z : 한계상태식

P_f : 파괴확률

b : 신뢰도지수

g : 표준 정규 분포공간에서 한계상태식

$\mathbf{x}_i$: 정규분포 확률변수

U : 표준 정규분포 확률변수

1. 서 론

신뢰성 공학의 개념은 제 2 차 세계대전 중 V2 로켓을 제작하면서 공학분야에서 적용하기 시작하였다. V2 로켓은 여러 단계의 부품이 모여 하나의 로켓으로 완성되는데, 각 부품의 신뢰도는 99%일지라도 완성된 로켓의 신뢰도는 부품의 개수와 구성에 따라 99%보다 떨어지는 특성을 갖게 되고 이로 인하여 신뢰성의 중요성이 대두되었다.

기존에 신뢰성을 고려하지 않은 공학문제에서는 필연적으로 내재될 수밖에 없는 임의성(randomness), 불확실성(uncertainty)에 대한 대비를 위해 기존의 확정론적 방법으로 주로 경험에 입각한 안전계수(safety factor)를 사용하여 여유강도를 두어 이론상 파괴의 위험이 없는 것으로 가정하지만 실제 현실에서는 여러 사고가 적지 않게 일어나는 모순이 있다. 이에 반해 불확실성 자체를 정

* 한양대학교 기계공학부
** 한양대학교 대학원 기계설계학과

량적으로 고려하는 신뢰성 이론에서는 작지만 0 이 아닌 파괴의 가능성을 고려하여 안전성 평가를 수행하는 것이 기존의 방법과 다른 점이다.

한편 신뢰성 공학에서 파괴의 위험성을 고려하여 설계한다는 것이 기존의 방법과 비교할 때 안전계수를 그만큼 감소시키는 것은 아닌가 하는 우려를 할 수 있으나, 실제로는 기존의 방법에서 고려하지 않았던 파괴의 발생 가능성이 항상 존재한다는 사실을 인정하고 정량화하여 해석에 포함시키는 것 이외에는 기존의 전통적인 방법과 다를 바가 없다. 따라서 신뢰성 해석은 파괴의 가능성을 정량적인 파괴확률(probability of failure)로서 산정하고 표현할 수 있다는 점에서 기존의 정성적으로 안전계수를 이용하는 방법보다 합리적이고 이러한 확률론적 해석을 신뢰성 해석이다. 신뢰성기반 최적 설계는 설계자가 만족하는 신뢰도를 구속조건으로 사용함으로써 제약조건의 강건화를 구현할 수 있다. 그러나 최적설계를 수행할때 신뢰도 구속조건이 비활성화 되는 문제점이 발생하고 이 문제점을 보완하기 위하여 장애함수를 이용한 신뢰성기반 최적화를 정식화를 제안하고 이를 예제를 통하여 검증한다.

2. 신뢰성 해석

2.1 한계상태식과 파괴확률

확률적 해석에 대한 기본적인 문제는 구조물에 걸리는 하중과 구조물에 걸린 하중에 대한 저항을 식으로 표현하는 것이다. 전형적인 설계 조건에서 응력과 강도는 같은 선상에서 표현될 수 있다.

그리고 응력(S)과 강도(R)가 같다는 상황을 식으로 표현하면 $Z(\mathrm{R,S}) = \mathrm{R} - \mathrm{S} = 0$ 으로 표현될 수 있다. 이러한 식을 파괴영역($Z<0$)과 안전영역 ($Z>0$)으로 나누는 한계 상태식이라고 부른다.

확률밀도함수 $f_R(r)$ 과 $f_S(s)$ 는 R, S 의 통계적 분포를 표현하면 정량적인 식은 다음과 같다.

$$P_f = \iint_{\Omega} f_{R,S}(r,s)\,drds \tag{1}$$

여기서 $f_{R,S}(r,s)$ 는 결합 확률밀도함수(joint-probability density function)이고, Ω는 파괴 집합 (failure set), 즉 $Z(\mathrm{R,S}) \le 0$ 에 대한 R 과 S 의 모든 값에 대한 집합이다. 만약 R 과 S 가 통계적으로 독립이라고 가정한다면, 그때는 결합 확률밀도함수는 각각의 확률밀도함수의 곱으로써 표현될 수 있다.

$$f_{R,S}(r,s) = f_R(r)\, f_S(s) \tag{2}$$

따라서 파괴확률은 다음과 같이 표현될 수 있다

$$P_f = \iint_{\Omega} f_R(r) f_S(s)\,drds \tag{3}$$

2.2 개선된 평균점 방법

한계상태식이 비선형성이 강하다면, 평균점방법 (Mean Value method)의 해는 일반적으로 정확하지는 않다. 간단한 문제에서는 정확성을 향상시키기 위해서 더 높은 차수까지 확장하여 사용이 가능하지만, 불명확한 한계상태식을 포함하고 있는 문제라면 확장하는 것은 어렵고 비효율적이게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 최소한으로 한계상태식의 계산을 추가함으로써 평균점방법(Mean Value) 해의 정확성을 향상시키는 것이 개선된 평균점방법(Advanced Mean Value method :AMV)이다. 이 방법은 누적분포확률분포를 계산하기 위해 최대파괴가능점(most probable point : MPP)개념과 평균일계이차모멘트방법(Mean Value First Order Second Moment Method: MV FOSM or MV)을 혼합한 방식으로, Taylor 전개 후 생기는 생략오차를 보상하여, MV 의 해를 향상시키는 것이다. 이러한 방법을 기반으로 하는 누적분포확률함수는 잠재적인 수치적 문제를 찾아냄으로써 한계상태식의 비선형성에 대한 정보를 제공한다.

AMV 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{AMV} = Z_{MV} + H(Z_{MV}) \tag{4}$$

다른 z 값에 대한 모든 MPP 을 연결하여 이루어지는 MPP 궤적에서 계산된 Z 의 값과 Z_{MV} 의 값의 차이로 $H(Z_{MV})$ 는 정의된다. 그리고 Z_{MV} 의 MPPL 은 일반적으로 표준정규분포 공간에서는 비선형적인 곡선을 이루고 있다. 복잡한 구조해석에 대해서 Z_{MV} 의 구성은 시간소비가 심할지 모르지만, 그것의 MPPL 은 쉽게 계산될 수 있다. AMV 의 핵심은 Z_{MV} 에 의존하는 간단한 함수 $H(Z_{MV})$ 가 고차항의 역할을 대신함으로써, 생략오차를 감소시킨다는 것이다. AMV 의 과정은 Z_{MV} 의 MPPL 을 이용하기 때문에 단순화할 수 있다. 근사화된 한계상태식의 MPP 가 일반적으로 정밀한 MPP 에 근접해 있기 때문에 AMV 해는 많은 공학문제에서 좋은 CDF 를 제공한다.

AMV 의 계산과정은 다음과 같다. (i) Z_{MV} 를 기반으로 해서 MPP 를 계산하고 각각의 CDF 를 계산한다. (ii) MPP 를 한계상태식에 넣어 CDF 를 갱신한다.

주어진 MV 모델에서는, 한계상태식 계산에 필요한 횟수는 선택된 CDF 의 수와 같다. 만약 수치적 미분 기술이 Z_{MV} 의 함수를 정의하는데 사용된다면, 한계상태식의 값을 산정하는데 요구되는 횟수는 $(n+m+1)$ 이 된다.

여기서 n 은 확률변수의 수이고, m 은 각 CDF 수준의 수이다. CDF 해의 정확성을 높이는 것은 얼마만큼 정확한 MPP 를 구하느냐에 달려있다.

일반적으로 AMV 해는 최적화 과정 또는 반복과정을 통해서 더욱 향상될 수 있다.

2.3 First Order Reliability Method (FORM)

주어진 구조물의 파괴를 정의하는 한계상태식이 $g(x)$ 로 주어지고 확률변수들의 결합 확률밀도함수가 $f_X(x)$ 와 같을 때, 파괴확률 P_f 를 다음과 같은 다중적분형의 형태로 정의할 수 있다.

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x})\le 0} f_X(\mathbf{x})d\mathbf{x} \qquad (5)$$

서로 통계적으로 독립인 정규분포 확률변수 (normal distributed random variable) X_i 는

$$u_i = \frac{x_i - m_i}{s_i} \qquad (6)$$

의 선형변환을 이용하여 표준정규분포(standard normal distribution) 확률변수 u_i 로 변환하면, 식 (5)의 한계상태식은 다음과 같이 표현된다.

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (m_i + s_i u_i) \qquad (7)$$

이때 신뢰도지수 β의 정의는 다음 수식과 같다.

$$b = \frac{m_G}{s_G} = \frac{\left| g(all \quad u_i = 0) \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \right)^2}} \qquad (8)$$

따라서 **Fig**.1 에서와 같이 표준정규분포 확률변수의 공간에서 원점으로부터 한계상태식까지의 최단거리라는 기하학적 의미를 갖게 됨을 확인할 수 있다.

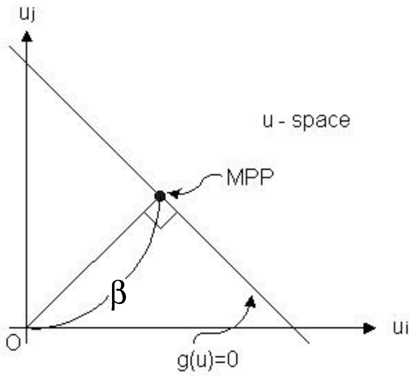

Fig.1 Geometric concept of reliability index

파괴확률의 산정을 위하여 주어진 확률변수와 한계상태식을 서로 통계적으로 독립인 표준정규분포 확률변수의 공간에서 표현되도록 변환한 다음, 원점으로부터 가장 가까운 직선거리에 위치한 한계상태식상의 점을 추적하고 그 직선거리를 신뢰도지수로 취하고 이를 이용, 파괴확률을 계산할 수 있다. 이때 신뢰도지수의 산정을 위해 구해진 한계상태식상의 점은 한계상태식상에 존재하는 모든 점들 중 가장 발현빈도가 높은 점에 해당하므로 MPP(most probable point) 또는 MPFP(most probable failure point)라고 한다.

표준정규분포 확률변수의 공간에서 구한 MPP 의 좌표를 u^* 로 표현하면, 정규분포 확률변수 공간에서의 좌표 x^* 는 다음과 같이 표현된다.

$$x^* = m_i + u^* s_i \qquad (9)$$

이때 임의의 비선형 한계상태식을 x^* 에서 일차항 Taylor 급수를 전개하면 근사하면 평균과 분산은 다음과 같다.

$$m_G = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} (m_i - x_i^*) ,$$

$$s_G^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} \right)^2 s_i^2 \qquad (11)$$

이것을 u 에 대한 식으로 바꾸면 표준정규분포의 공간에서는 각각 다음과 같다.

$$m_G = -\sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right|_{u^*} u^*$$

$$s_G^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right|_{u^*} \right)^2 \qquad (12)$$

신뢰도지수를 표준편차에 대한 평균의 비라는 확률론적 정의에 따라 유도하면 다음과 같다.

$$b = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right|_{u^*} u^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right|_{u^*} \right)^2}} \qquad (13)$$

식(10)을 MPP 에서 선형항까지 Taylor 급수로 전개한 근사식을 표준정규분포 확률변수 u 를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$g(u) \approx \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right|_{u^*} (u_i - u_i^*) \qquad (14)$$

여기서 중요하게 인식되는 것은 기하학적 정의에 따라 유도한 신뢰도지수의 표현식이 확률론적인 입장에서의 정의에 따라 유도한 식(13)의 신뢰도지수 표현식과 완전히 일치한다는 것이다. 이는 비선형 한계상태식을 평균점에서 선형근사하지 않고, 식 (10)처럼 MPP 에서 선형근사하면 평균 일계이차모멘트법의 가장 큰 문제점이었던 불변성결여와 같은 현상을 피할 수 있음을 의미한다.

Hasofer 등은 이러한 MV FOSM 의 불변성 결여 문제를 지적하고, 그 해법으로 반복법(iteration method)을 이용하여, MPP 를 구한 다음, 그 점에서 한계상태식을 선형근사하는 방법을 제시하였다.

이것이 AFOSM(Advanced First-Order Second Moment method) 혹은 FORM(First-Order Reliability Method)라고 한다.

3. 신뢰성기반 최적설계 방법론

신뢰성기반 최적설계(Reliability Based design Optimization: RBDO)는 다음과 같이 신뢰성 해석과 최적 설계가 엮여서 이루어진다.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad Cost(\mathbf{x}) \\ &\textit{subject to} \quad P(G(\mathbf{x}) \le 0) - P_f \le 0 \end{aligned} \tag{15}$$

이때 제약 조건이 되는 신뢰성 해석은 다음과 같은 두 가지 방법론을 가지고 있다.

3.1 신뢰도지수 접근방법(RIA)

신뢰도지수 접근방법을 이용한 신뢰성 기반 최적설계의 문제정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad F(\mathbf{x}) \\ &\textit{subject to} \quad b_j \ge b_{j,\text{target}} \\ &\qquad \mathbf{x}_L \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_U \end{aligned} \tag{16}$$

목표의 신뢰도지수를 정하고 그것을 제약조건으로 놓아 최적설계를 수행하는 것이다. 여기서 신뢰도지수를 산정하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &Min \quad b = |U| \\ &s.t \quad g(U) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

이때 신뢰성 해석은 한계상태식이 0 인 등가 제약조건을 갖는 최적화 문제로 표준정규분포 공간의 원점에서 MPP 점까지의 가장 가까운 거리를 구하여 신뢰도지수를 정의하고 구조물의 안전확률 혹은 파괴 확률을 예측 한다. 이렇게 구한 확률의 값이 설계자가 원하는 목표신뢰성 지수와 비교하여 비등가 제약조건의 위배여부를 판별한 다음, 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도 정보를 이용하여 최적화를 수행하는 것이 신뢰도지수 접근방법이다.

이 접근방법은 한계상태식이 0 인 제약조건에 대한 파괴확률을 산정하는 방식으로 단순한 신뢰성 해석에 가깝고 비선형이 강한 문제에 대하여 수렴하지 않는 특성을 갖는다.

3.2 목표성능치 접근방법(PMA)

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad F(\mathbf{x}) \\ &\textit{subject to} \quad g_{j,\text{target}} \ge 0 \\ &\qquad \mathbf{x}_L \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_U \end{aligned} \tag{18}$$

목표성능치 접근방법은 신뢰성지수 접근방법과는 다르게 한계상태식의 목표 값으로 정의되는 제약조건으로 갖는다. 즉, 신뢰도지수를 정해 놓고, 표준 정규분포의 공간에서 한계상태식이 최소화되는 값을 찾는 것이다.

$$\begin{aligned} &Min \quad g(U) \\ &s.t \quad b = |U| = b_{\text{target}} \end{aligned} \tag{19}$$

한계상태식의 값으로 이루어진 제약조건이 설계자가 원하는 목표 비등가 제약조건의 위배를 판별한 다음 최적화를 수행하는데, 이 목표성능치 접근방법은 목표 신뢰도 지수에의한 한계상태식의 값을 찾는 디자인의 개념이고 그로인하여 항상 설계자가 원하는 신뢰도를 만족시키고 있다는 장점을 가지고 있으므로 단순한 해석이 아닌 디자인 입장에서 최적설계에 적합하다.

3.3 장애함수법에 의한 신뢰성기반 최적설계

설계 문제에서 기존의 신뢰도지수 접근방법으로 신뢰성기반 최적설계를 수행하였을 때 신뢰도 구속조건이 비활성화 되는 문제점이 있다. 이런 문제를 보완하기위해 역장애함수법(inverse barrier function method)를 이용할 수 있다.

역 장애함수를 이용하면 우선 구속조건을 만족시키고, 그 다음에 목적함수를 최소화를 수행한다.

역 장애함수의 특징은 오직 부등식 제약조건 문제에 적용할 수 있고, 항상 가용 범위(feasible region) 내에서 최적 해를 찾기 때문에 수렴한 최적 값은 설계 영역 내에 존재하게 되며, 구해진 최적 값을 활용할 수 있다는 장점이 있다. 장애함수에의한 신뢰성기반 최적설계 문제정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad f = F(\mathbf{x}) + \frac{1}{s}\left(-\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}\right) \\ &\textit{subject to} \quad \mathbf{x}_L \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_U \\ &\textit{where} \quad s: \text{scale factor} \end{aligned} \tag{20}$$

4. Bracket 의 신뢰성기반 최적설계

4.1 문제의 정의

Fig.2 과 같이 좌우 대칭형 bracket 을 502 개의 쉘요소로 유한요소 모델을 구성하고 하중조건을 주었다.(10) Bracket 에 사용한 재료의 탄성계수 $E = 210\,GPa$, 프와송비 $n = 0.29$,이며 두께 $t = 1\ cm$ 이다.

이 예제는 12 개의 설계변수의 변화에 따라 형상이 변화하게 되는 형상문제로써 유한요소 모델

의 부피를 최소화하고, 최대응력에 대한 신뢰도지수 b 가 3 이하가 되도록 구속조건을 갖는 예제로, 하중조건에 의해서 Bracket 에 걸리는 최대항복응력이 620MPa 을 넘지 않아야 한다. b 가 3 이라는 것은 파괴확률이 0.0013, 즉 최대항복응력을 넘지 않을 확률은 0.9987 이 된다는 것을 의미한다.

설계 변수는 부피에 크게 관여하는 d1, d6, d8, d12 등 4 개로 설정하였다.

예제의 신뢰성 기반 최적설계 정식은 식(20)과 같고 각 설계변수를 확률변수로 정의하여 설계변수의 평균과 표준편차는 Table.1 과 같다.

$$Minimize \quad Volume \tag{21}$$
$$subject\ to \quad P[S_{max} < 620MPa] \le P_{target} = 0.9987$$

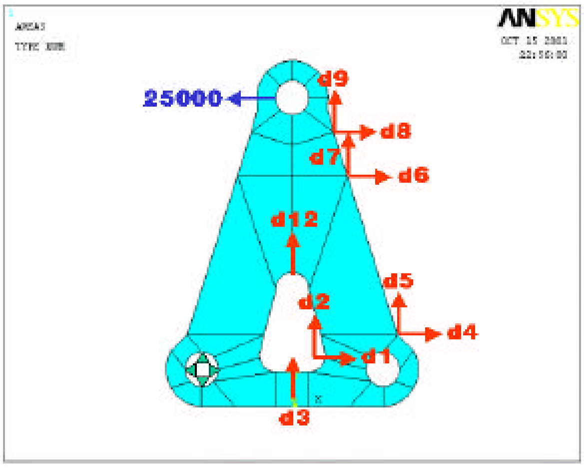

Fig. 2 Geometry and boundary condition of bracket

Table 1 Mean and standard deviation of the design variables

	Lower	Mean	Upper	Std.div.
d1	0.601	1.006	3.006	0.02
d6	0.832	3.332	5.332	0.02
d8	0.535	2.493	4.493	0.02
d12	6.776	7.776	11.176	0.02

4.2 신뢰성 기반 최적설계

우선 Bracket 의 유한요소해석과 신뢰성을 계산하기 위해 상용프로그램인 ANSYS 와 NESSUS 를 사용하였으며, 최적화를 수행하기 위해 통합화 및 자동화 프로그램인 ModelCenter 를 사용하였다. 최적화 기법은 내장되어 있는 DOT 를 사용하였다.

Bracket 의 문제정식화는 신뢰도지수 접근방법으로 제약조건과 장애함수법을 이용한 최적설계방법으로 구현하였다. 이때 제약조건은 Variable Metric Method 를, 장애함수는 Sequential Linear Programming 의 최적설계 알고리즘을 사용하였다. 단 이 Bracket 문제는 무수한 Local minimum을 가지고 있으므로 최적값에서 어느정도 가용한 범위내에 최적설계 시작점을 설정하였다.

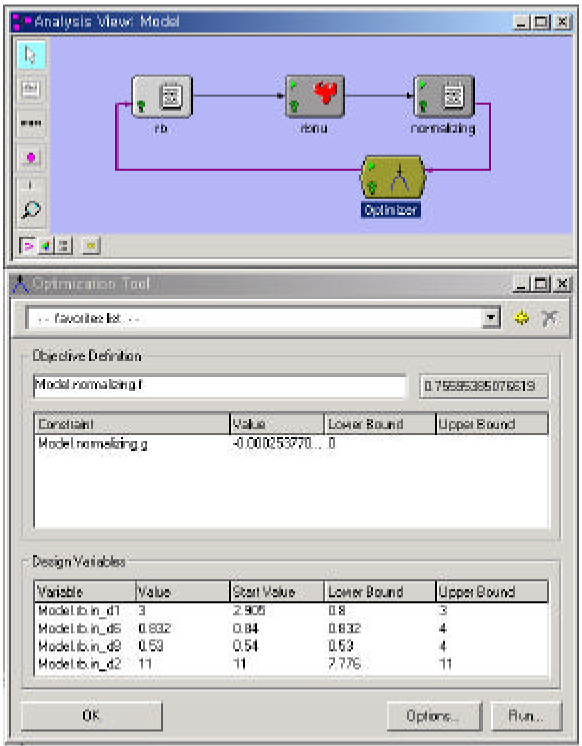

Fig. 3 Integration and automation in ModelCenter

Table 2 RBDO using RIA and BFM

Design Parameter	Initial	제약조건	장애함수
DV.d1	1.006	3.0063	2.9050
DV.d6	3.332	0.8321	0.8323
DV.d8	2.493	0.4932	0.5328
DV.d12	7.776	11.1767	10.7653
smax	24243	58111	54761
volume	**770**	**441**	**456**
Probability	**1**	**0.99755**	**0.99870**

Table 2 의 결과로써 제약조건의 구속조건에 위배 되어 목표치 신뢰성을 만족시키지 못하고 수렴함을 볼수있다. 이에 비하여 장애함수를 이용한 최적설계는 정확한 신뢰성을 만족시키는 결과를 얻을 수 있었다. 이로써 제약조건의 문제보다 장애함수를 사용한 문제가 더 수렴성이 있다고 결론내릴 수 있다.

Table 3 의 결과는 장애함수의 수렴성을 재고찰하기 위하여 신뢰성 해석 방식인 AMV, FORM 을 사용하여 동일한 신뢰성 기반 최적설계를 수행한 결과이고 두 방식을 모두 제약조건과 장애함수로

써 각각 수행하였다.

Table 3 RBDO using BFM based on AMV and FORM

Design Parameter	AMV	FORM
DV.d1	2.9050	2.9049
DV.d6	0.8323	0.8327
DV.d8	0.5328	0.5316
DV.d12	10.7653	11.1091
smax	54761	54724
volume	**456**	**448**
Probability	0.99870	0.99870
u	**3.0121**	**3.0122**
Iteration	60	171

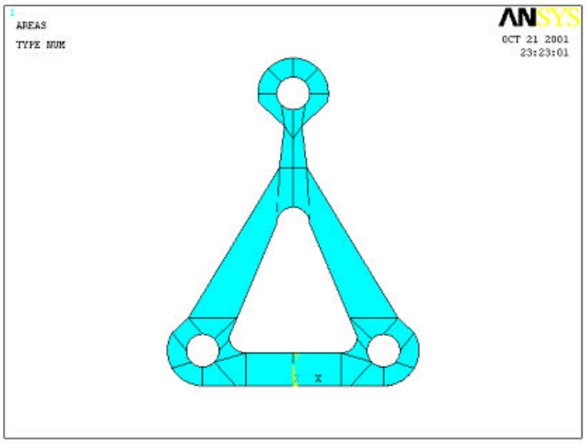

Fig 4 Optimal shape of bracket

이 문제를 수행한 결과는 예상대로 AMV 와 FORM 의 제약조건 문제는 구속조건이 비활성되는 문제를 가져왔고 장애함수의 경우 신뢰성을 만족시키는 결과를 얻을 수 있었다. 또한 FORM 이 더 정확한 결과값을 AMV 가 더 빠른 수렴속도를 갖음으로써 비선형성이 작은 문제는 FORM 방식이, 비선형성이 큰 문제는 AMV 방식이 적합함을 알 수 있었다

5. 결 론

기존의 신뢰성기반 최적화가 가지고 있는 문제점을 찾고, 이러한 문제를 해결하기 위해 장애함수를 이용한 신뢰성 기반 최적화 방법론을 제안하였다. 그리고 이 방법론을 기존의 방법론들과 예제를 통해 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 무수한 local minimum 을 가지고 있기 때문에 장애함수법을 제외한 신뢰도지수 접근방법과 목표성능치 접근방법은 적절한 최적설계의 초기 시작점을 갖지 않는다면 신뢰성을 만족시킬 수 없다. 따라서 최적설계의 초기 시작점 설정의 중요성을 알 수 있었다.
2) 역장애함수를 이용하여 신뢰성기반 최적화를 수행함으로써, 신뢰도 구속조건이 비활성되는 문제를 해결할 수 있었다.
3) .비선형의 크기에 따라서 신뢰성해석 기법을 적절히 선별할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) K. Choi and B. Youn, 2002, On Probabilistic Approaches for Reliability-Based Design Optimization (RBDO), AIAA-2002-5472.

(2) Xiaoping Du and Wei Chen, 2000, A Most Probable Point Based Method For Uncertainty Analysis, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Caltimore, Maryland.

(3) Wu, Y.-T. and Wang, W., 1996, A New Method for Efficient Reliability-Based Design Optimization, Probabilistic Mechanics & Structural Reliability: Proceedings of the 7th Special Conference, pp 274-277.

(4) Chen,X., Hasselman, T.K., and Neill, D.J., 1997, reliability Based Structural Design Oprimization for Practical Applications, 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Kissimmee, FL,paper No. AIAA-99-1601.

(5) Southwest Research institute, GETTING STARTED MANUAL NESSUS and FPI, Ver.24.

(6) Xiaodong Luo and R. V. Grandhi, 1995, Astros For Reliability-Based Multidisciplinary Structural.

(7) Analysis And Optimization, Computers and Structures Vol.62 No. 4, pp.737-745.

(8) J, Tu, K.K.Choi and Y.H.Park, 1999, A New Study On Reliability Based Design Optimization, Journal of MECHANICAL DESIGN Vol.121, December, 1999.

(9) Phoenix Integration Inc. 2000, ModelCenter User' s Guide.

(10) ANSYS Inc. 2000, ANSYS User' s Guide, Ver.6.1.

(11) KKChoi, 2001, Recent Advances in RBDO, Center for computer aided design, The University of Iowa.