

용접공정에서 발생하는 변태 소성 구성방정식의 수치적 구현에 관한 연구

김주완,[†] 임세영,^{*} 김현규,^{**} 최강혁^{***}

Numerical implementation of a constitutive equation of transformation plasticity in welding

Juwan Kim, Seyoung Im, Hyun-Gyu Kim, Kanghyouk Choi

Key Words : Welding(용접), Transformation Plasticity(변태소성)

Abstract

Finite element analysis of welding processes, which entail phase evolution, heat transfer and deformations, is considered in this paper. Attention focuses on numerical implementation of the thermo-elastic-plastic constitutive equation proposed by Leblond in consideration of the transformation plasticity. Based upon the multiplicative decomposition of deformation gradient, hyperelastic formulation is employed for efficient numerical integration, and the algorithmic consistent moduli for elastic-plastic deformations including transformation plasticity are obtained in the closed form. The convergence behavior of the present implementation is demonstrated via a couple of numerical examples.

기호설명

θ : 온도
 F : 변형 구배(deformation gradient)
 τ : Kirchhoff 응력 텐서
 s : 응력 deviator
 p_i : “i” 상의 부피 비
 E : Young 의 계수
 U : 탄성 자유에너지 함수의 volumetric 파트
 \bar{b}^e : left Cauchy strain 의 부피보존 형태

1. 서론

용접공정은 열전달과 변형 및 상변태까지 포함되어 있는 매우 복잡한 현상이다. 특히 생산공정에서

중요하게 여기는 잔류응력을 정확히 계산하기 위해서는 변태소성을 고려해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 Leblond 변태 소성 구성 방정식을 유한 요소해석에 도입한다. 이 과정에서 빠른 수렴속도를 위해 초탄소성(Hyperelastoplastic)을 수식화하여 적용하고 그 결과를 수치예제를 통해 상용코드인 SYSWELD 와 비교하여 검증한다.

2. 열적-야금적-기계적 지배방정식

이 절에서는 Leblond and Devaux⁽¹⁾와 Leblond⁽²⁾가 제안한 용접 시 재료내부에서 일어나는 물리적 현상을 지배하는 방정식을 요약한다. 단, 여기서는 조선이나 건물과 같은 철 구조물에 주로 사용되고 있는 아크용접으로 제한한다. 고려하는 재료는 steel 이며 구성방정식의 수식화 단계에서 변태소성(transformation plasticity)을 고려한다. 참고로 이 구성 방정식은 기존의 상용 코드인 SYSWELD 에서 사용되고 있다⁽³⁾.

[†] 한국과학기술원 기계공학과
 E-mail : zingga@kaist.ac.kr
 TEL : (042)869-5001 FAX : (042)869-3095

^{*} 한국과학기술원 기계공학과

^{**} 현대자동차

^{***} 한국과학기술원 기계공학과

2.1.1 철의 상변태 동적 방정식 및 에너지 방정식

Leblond and Devaux⁽¹⁾는 다음과 같은 철의 상변태 변은 방정식을 제시하였다.

$$\dot{p}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}(\theta, \dot{\theta}), i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

여기서 p_i 는 "i" 상의 부피비, θ 는 온도, N 은 발생할 수 있는 총 상의 개수를 의미한다. 또한, $A_{ij}(\theta, \dot{\theta})$ 는 단위시간당 "i" 상에서 "j" 상으로 변화하는 대수적인 상비율을 의미하고 $k_{ij}(\theta, \dot{\theta})$ 와 $l_{ij}(\theta, \dot{\theta})$ 는 각각 평형에 의해 결정되는 변태파라미터와 지연시간을 나타내고 있다.

상비율과 열적 경계조건을 포함하는 에너지방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_i p_i (\rho c)_i \frac{d\theta}{dt} + \sum_i \dot{p}_i \rho_i H_i = \nabla \cdot \left(\sum_i p_i \lambda_i \nabla \theta \right) \quad (2a)$$

$$(-)\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = q \quad \text{on } S_q \quad (2b)$$

$$(-)\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \chi_1(\theta - \theta_0) + \chi_2(\theta^4 - \theta_0^4) \quad \text{on } S_\chi \quad (2c)$$

여기서 ρ_i 는 "i"상의 밀도를, c_i , H_i , λ_i 는 각각 비열, 엔탈피, 열전도율을 의미한다. θ_0 는 외부온도이며 χ_1 와 χ_2 는 각각 대류와 복사열전달 계수이다.

2.1.2 열적-기계적 구성방정식

본 연구에서 사용된 변태소성에 대한 구성 방정식은 Leblond⁽⁴⁾ 등이 제안한 용접시에 재료의 반응을 지배하는 열적-기계적 구성 방정식을 사용한다. 이 방정식에는 전통적인 탄소성 변형과 변태소성에 대한 유동규칙(flow rule) 및 경화법칙(hardening law)이 포함되어 있다.

아래첨자 "1"은 약상(weaker phase), "2"는 강상(harder phase)을 나타내는데 이는 페라이트, 베이나

이트, 마르텐사이트 등과 같이 남아있는 미시적(microscopic)상을 의미한다. σ_i^y 와 ϵ_i^{eff} 는 항복응력과 각각의 상의 경화에 관련된 내부변수를 나타낸다. 철의 거시적(macroscopic) 항복응력인 σ^y 는 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\sigma^y(\epsilon_1^{eff}, \epsilon_2^{eff}, \theta) = [1 - f(z)]\sigma_1^y(\epsilon_1^{eff}) + f(z)\sigma_2^y(\epsilon_2^{eff}) \quad (3)$$

여기서 $f(z)$ 는 비선형 혼합규칙을 의미하고 "z"는 강상 "2"의 상비율을 나타낸다. 유동규칙과 진화방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\sigma} s \quad (3.a)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1-z)}{\sigma_1^y(\bar{\epsilon}_1^{eff})} \{(\dot{\epsilon}_1^{eff})\} \|s\| \quad (4.b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}_1^{eff} = (-) \frac{2\Delta\epsilon_{1 \rightarrow 2}^{th}}{1-z} (\ln z) \dot{z} h(\|s\|, \bar{\epsilon}_1^{eff}, \bar{\epsilon}_2^{eff}) + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g(z)}{E} \|s\| + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)z \ln z}{1-z} \dot{\theta} \quad (4.c)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}_2^{eff} = (-) \frac{\dot{z}}{z} \bar{\epsilon}_2^{eff} + \omega \frac{\dot{z}}{z} \bar{\epsilon}_1^{eff} \quad (4.d)$$

변태소성에 대한 유동규칙(3.a, b)은 고전적 소성의 경우와 같은 형태를 가지지만 항복조건이 없음을 알 수 있다. 이는 변태소성의 유한요소 구현에서 중요한 수단을 제공한다.

3. 유한요소 구현

3.1 기본 수식화

변형율 텐서의 곱분해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F = F^e F^p \quad (5)$$

여기서 F^e , F^p 는 각각 탄성과 소성 변형구배를 의미한다. 곱분해에는 회전을 처리하는 방식에 따라 여러 가지 방법이 있는데 여기에서는 Simo and Hughes⁽⁵⁾의 접근방식을 따르고 있다.

자유에너지 포텐셜에 기초한 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\tau = [JU' - 3\alpha(\theta - \theta_0)U^n] + s \quad (6.a)$$

$$s = dev[\tau] = \mu dev[\bar{b}^e] \quad (6.b)$$

Mises 항복조건과 응력관계를 적용한 J_2 -유동규칙은 다음과 같다.

$$L_v \bar{b}^e = -2\gamma J^{2/3} \left[\frac{1}{3} tr(\bar{b}^e)_n + \frac{\|s\|}{\mu} n^2 \right] \quad (7)$$

여기에서 $n = \frac{\|s\|}{s}$, L_v 는 Lie 미분을 의미하고 γ 는 loading index를, n 은 Kirchhoff 응력의 수직벡터이다. 식(7)의 두 번째 항은 대부분의 금속의 경우 무시할 수 있고 따라서 Mises 항복 조건에 따라 수정된 유동규칙은 다음 형태를 띤다⁽⁶⁾.

$$L_v \bar{b}^e = -\frac{2}{3} \gamma tr[\bar{b}^e] n \quad (8)$$

앞의 관계식들을 이용하여 식(4.a)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{3} tr[\bar{b}^e] \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (9)$$

결과적으로, 변태소성은 일반적인 Mises 항복조건에서의 J_2 -유동규칙과 같은 방법으로 구현할 수 있음을 알 수 있다.

3.2 수치 적분

유동규칙과 경화법칙의 적분시 응력과 변형율을 갱신하기 위해 사용한 반경회귀맵핑(radial return mapping)에 대응하기 위하여 오일러-후적분(Euler-backward method)을 이용한다. 변태소성의 경우, 반경회귀맵핑을 사용하므로 식(8)을 적분하여 정리하면 식(10)를 얻을 수 있다.

$$\|s_{n+1}\| = \|s_{n+1}^{trial}\| - 2\bar{\mu} \Delta\gamma \quad (10)$$

유동규칙과 경화변수의 진화식을 적분한 후 응력-변형률 관계식을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta \bar{\epsilon}_1^{eff} = ah(\Delta \bar{\epsilon}_1^{eff}, \bar{\mu}, \|s_{n+1}^{trial}\|) + b[1 - 2\bar{\mu}K(\Delta \bar{\epsilon}_1^{eff}, \bar{\mu})] \|s_{n+1}^{trial}\| + c \quad (11.a)$$

$$a = (-) \frac{2(\Delta \bar{\epsilon}_{1 \rightarrow 2}^{th})_{n+1}}{1 - z_{n+1}} (\ln z_{n+1}) \Delta z_{n+1} \quad (11.b)$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g(z_{n+1})}{E_{n+1}} \quad (11.c)$$

$$c = -b \|s_n\| + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)_{n+1} z_{n+1} \ln z_{n+1}}{1 - z_{n+1}} \Delta \theta_{n+1} \quad (11.d)$$

식(11)을 풀어서 $\Delta \bar{\epsilon}_1^{eff}$ 을 구하고 다른 상태변수들을 갱신한다. 비선형 방정식을 풀기 위해서는 Newton-Raphson의 방법을 사용한다.

3.3 정합 접선 계수(consistent tangent moduli)

정합 접선 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$d\tau = c : d\epsilon = c_{dev} : d\epsilon + c_{vol} : d\epsilon = ds + c_{vol} : d\epsilon \quad (12.a)$$

$$ds = c_{dev} : d\epsilon \quad (12.b)$$

$$ds_{n+1} = (c_{dev}^{trial} - 2\Delta\gamma \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial d\epsilon} \otimes n_{n+1} - 2\bar{\mu} \frac{\partial \Delta r}{\partial d\epsilon} \otimes n_{n+1} - 2\bar{\mu} \Delta r \frac{\partial n}{\partial d\epsilon}) : d\epsilon \quad (12.c)$$

식(12.c)의 둘째, 넷째항은 다음 방정식을 이용해 구할 수 있다⁽⁷⁾.

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial d\epsilon} = \frac{2}{3} s_{n+1}^{trial} = \frac{2}{3} \|s_{n+1}^{trial}\| n_{n+1} \quad (13.a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial d\epsilon} = \frac{1}{\|s_{n+1}^{trial}\|} (c_{dev}^{trial}|_{n+1} - n_{n+1} \otimes \frac{\partial \|s_{n+1}^{trial}\|}{\partial d\epsilon}) \quad (13.b)$$

$$\frac{\partial \|s_{n+1}^{trial}\|}{\partial d\epsilon} = 2\bar{\mu} (n_{n+1} + \frac{\|s_{n+1}^{trial}\|}{\bar{\mu}} dev[(n_{n+1})^2]) \quad (13.c)$$

한편, $\frac{\partial \Delta r}{\partial d\epsilon}$ 는 유동규칙과 경화변수의 진화식을 적분하여 얻을 수 있으므로 이로부터 대응 접선 계수를 계산하게 된다.

4. 수치 예제

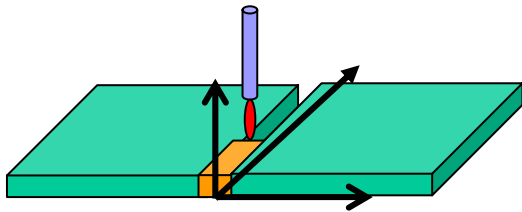


Fig. 1 Test butt-welding process.

Fig.1 과 같은 간단한 맞대기용접(butt-welding)예제를 해석한 후 상용해석코드인 SYSWELD 와 비교해 본다. Table 1 에 나타난 재료상수를 이용하였고 Fig.2 와 같이 2280 개의 8 절점 선형요소로 구성 되어 있다. 모델의 대칭면에는 열적 및 기계적 대칭경계조건을 적용하고 열원은 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$q = 10e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} (W/mm^3) \text{ where } r_0 = 3(13)$$

여기서 r 은 용접부 중심과 각 적분점과의 거리 이고 용접부의 속도는 2mm/sec 이다. 모델의 표면에는 대류 및 복사 조건을 적용하고 외력은 주어지지 않는다.

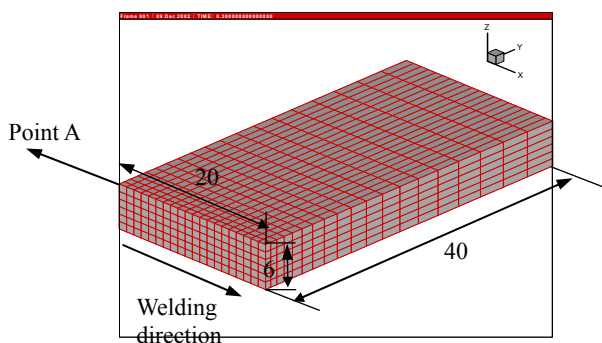


Fig. 2 The finite element meshes of the butt-welding process.

계산결과를 SYSWELD 와 비교하기 위한 위치로 Fig.2 의 'A'점을 선택한다. Fig.3 부터 Fig.6 에서 나타난 결과들을 보면 SYSWELD 와 잘 일치함을 알 수 있다. Table 2 에는 본 연구결과가 SYSWELD 보다 수렴속도가 우수하게 나타나고 있다.

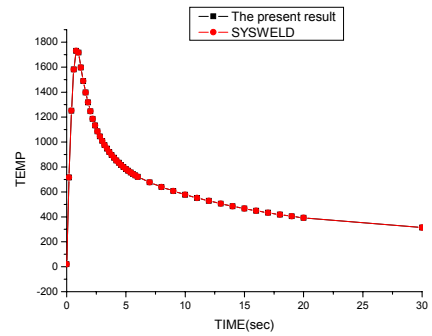


Fig. 3 The temperature history of point 'A'

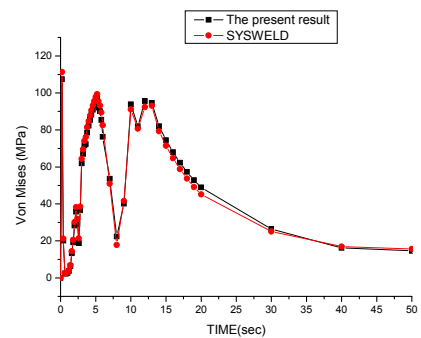


Fig. 4 The Von Mises stress of point 'A'

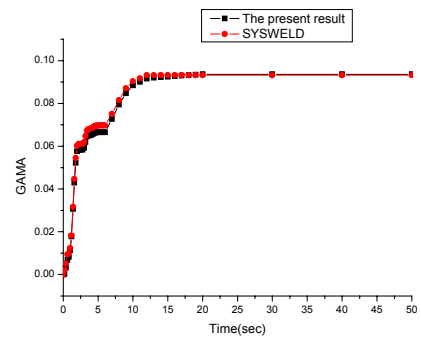


Fig. 5 The plastic hardening variable of γ -based phase of point 'A'

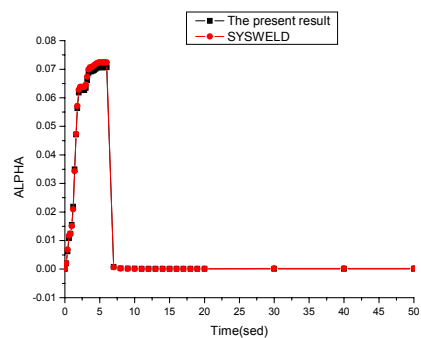


Fig. 6 The plastic hardening variable of α -based phase of point 'A'.

후 기

Table 1 Material Properties

temperature($^{\circ}$ C)	20	700	1500
Young's modulus(MPa)	200700	100000	1500
Poisson ratio	0.3	0.3	0.3
Yield stress of pearlite and bainite(MPa)	425.	110	50
Yield stress of martensite(MPa)	750	210	50
Yield stress of austenite(MPa)	220	100	50
Hardening coefficient for all phases(MPa)	2000	2000	2000
Thermal expansion of α -based phase	0		0.025
Thermal expansion of γ -based phase	-0.0115		0.0225
Conductance($W / mm^{\circ} K$)	0.046	0.029	0.55
Enthalpy(J / mm^3)	1.47	3.95	7.01
Density(kg / m^3)	7800.	7600	7300

Table 2 The average of each time step for the butt-welding process analysis.

	The average iteration of each time step
The present result	3.8
SYSWELD	8.2

5. 결 론

용접에서의 변태소성을 고려하는 (Leblond 의) 열적—탄소성 구성방정식의 효율적이고 조직적인 수치적 방법을 제시하였다. 곱분해에 근거한 초탄성 수식화를 개발하고 이를 이용하여 해의 빠른 수렴성을 위해 변태소성을 고려하여 정합접선계수를 계산하였다. 수치예제를 통해 수식화의 정확성 및 효율성을 입증하였다.

본 연구는 과학기술부 국책연구개발사업 중 공학용 해석소프트웨어 기술개발사업의 일환으로 수행되었음에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Leblond, J. B. and Devaux, J. (1984), A kinetic model for anisothermal metallurgical transformation in steels including effect of austenite grain size, *Acta Metall.*, 32(1), 137-146
- (2) Leblond, J. B., Mottet G. and Devaux J. C. (1986), A Theoretical and Numerical approach to the plastic behavior of steels during phase transformations -II. Study of classical plasticity for ideal-plastic phases, *J. Mech. Phys. Solids*, 34 (4), 411-432
- (3) SYSWELD +2.0 reference manual (1998), SYSTUS International
- (4) Leblond, J. B. (1989), Mathematical modeling of transformation plasticity in steels II : coupling with strain hardening phenomena, *International Journal of Plasticity*, 5, 573-591
- (5) Simo J. C. and Hughes T. J. R. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer
- (6) Simo, J. C. (1988), A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition Part I, Continuum Formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 66, 199-219
- (7) Simo, J. C. (1988), A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition Part II, Computational Aspects, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 68, 1-31