두 개의 Clausius 부등식의 입증 방법

박경근†

A Method to Establish Two Clausius Inequalities

Kyoung Kuhn Park

Key Words: Thermodynamics(열역학), Clausius Inequality(Clausius 부등식), Carnot Proposition(Carnot 정리)

Abstract

There are two Clausius inequalities. One involves the temperature of external reservoir and the other involves the temperature at the system boundary. It is shown that the former Clausius inequality can be established from a direct application of the proposition regarding the efficiency of a Carnot cycle based on an apparatus with two reservoirs. A different apparatus which also has two thermal reservoirs is utilized to compare the cyclic integral of the former inequality with that of the latter, resulting in the proof of the latter inequality.

기호설명

COP : 성능 계수
Q : 열전달량 [kJ]
T : 절대 온도 [K]
W : 일 [kJ]

그리스 문자

η : 열효율

하첨자

A, B : 외부 사이클
H : 고온 열에너지 저장조
L : 저온 열에너지 저장조
ext : 외부 열에너지 저장조
int : 경계면의 내부
irr : 비가역
rev : 가역
sys : 시스템
Carnot : Carnot 사이클
1 : 시스템의 고온부
2 : 시스템의 저온부

1. 서 론

잘 알려진 Clausius 부등식 한 가지는 다음과 같다.(1-3)

$$\oint \delta Q_{ext} / T_{ext} \le 0 \tag{1}$$

여기서 $\oint$는 사이클 적분을 나타내며, T_{ext}는 열 δQ_{ext}가 전달되는 외부 열에너지 저장조의 온도이다. 또 다른 Clausius 부등식은 다음과 같다.(4-6)

$$\oint \delta Q_{int} / T_{int} \le 0 \tag{2}$$

여기서 T_{int}는 열 δQ_{int}가 전달되는 시스템

---

† 국민대학교 기계자동차공학부
E-mail : pkk@kookmin.ac.kr
TEL : (02)910-4679 FAX : (02)910-4839

경계면의 내부 온도이다. 일반적으로 $T_{int} \neq T_{ext}$ 이므로 식 (1)과 식 (2)는 서로 다른 식이며, Clausius 부등식은 두 가지이다. 최근에 이 두 부등식을 비교 분석하는 기본 연구가 Park(7)에 의해 시도되었다.

본 연구에서는 위의 두 Clausius 부등식을 입증하는 방법을 제시하고자 한다. 우선 두 개의 열원이 있는 장치에서 Carnot 정리와 Clausius 부등식의 직접적인 연관성을 이용하는 방법으로 식 (1)을 입증한 후, 두 개의 열원이 있는 또 다른 장치를 분석하여 식 (1)과 식 (2)에 들어있는 사이클 적분항을 비교하고 그 결과로서 식 (2)를 입증하고자 한다.

2. Clausius 부등식

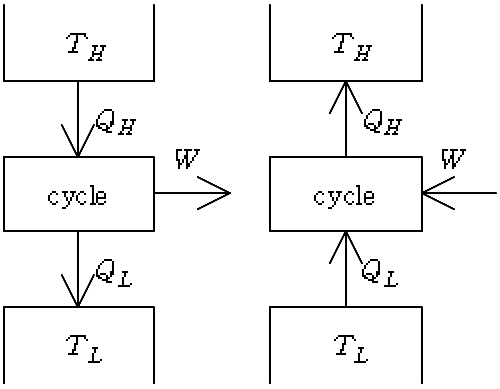
2.1 첫 번째 Clausius 부등식의 입증

우선, 열원이 두 개인 장치를 이용하여 Clausius 부등식을 입증하고자 한다. 이는 이미 자세히 제시되었으므로(7) 여기서는 간단히 설명한다. Fig. 1과 같이 열원이 두 개인 장치를 이용하여 Clausius 부등식 (1)을 입증하는 기존의 방법(1-3)에서는 열기관의 경우에 Q_H가, 냉동기의 경우에 Q_L이 비가역 사이클과 가역 사이클에 대하여 각각 같다고 가정한다. 그러나 여기서는 그러한 가정 또는 제한 없이 Carnot 정리를 직접 활용하여 식 (1)을 입증하고자 한다. 모든 가역 사이클은 Carnot 사이클의 조합으로 간주할 수 있으므로 가역 사이클로는 Carnot 사이클만을 고려한다.

Clausius 부등식 (1)을 입증하기 위해서는 먼저 Carnot 정리가 필요하다. Carnot 정리는 여러 가지로 표현이 가능하며 예를 들어 다음과 같다.

(1) 주어진 두 개의 등온 열에너지 저장조 사이에서 작동하면서 가역 Carnot 기관보다 효율이 더 높은 기관은 만들 수 없다.
(2) 주어진 두 개의 등온 열에너지 저장조 사이에서 작동하는 모든 가역 Carnot 기관의 효율은 같다.

정리 (1)은 열기관의 경우 다음과 같이 부등식으로 표현할 수 있다.(8)



(a) (b)

Fig. 1 Possible cycles with two thermal energy reservoirs (a) heat engine cycle, (b) refrigeration cycle

$$\eta \leq \eta_{Carnot} \tag{3}$$

냉동기(또는 열펌프)의 경우는 다음과 같다.

$$COP \leq COP_{Carnot} \tag{4}$$

정리 (2)가 뜻하는 바는 Carnot 사이클 기관의 효율이 외부 변수인 열에너지 저장조 온도에만 의존한다는 것이다. 즉,

$$\eta_{Carnot} = \eta(T_H, T_L) \tag{5}$$

이 된다.

Fig. 1(a)와 같은 열기관 사이클의 경우에

$$\eta = 1 - Q_L/Q_H \tag{6}$$

$$\eta_{Carnot} = 1 - T_L/T_H \tag{7}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\oint \delta Q_{ext}/T_{ext} &= Q_H/T_H - Q_L/T_L \\ &= (Q_H/T_L)(\eta - \eta_{Carnot})\end{aligned} \tag{8}$$

이다. 여기서 Q_H와 T_L은 양수이며, Carnot 정리 식 (3)에 의하면 $\eta - \eta_{Carnot} \leq 0$ 이므로 $\oint \delta Q_{ext}/T_{ext} \leq 0$ 이 된다.

Fig. 1(b)와 같은 냉동 사이클의 경우에

$$COP = Q_L/(Q_H - Q_L) \tag{9}$$

$$\mathrm{COP}_{Carnot} = T_L/(T_H - T_L) \tag{10}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\oint \delta Q_{ext}/T_{ext} &= -Q_H/T_H + Q_L/T_L \\ &= \frac{Q_L}{T_H}\left(\frac{\mathrm{COP}-\mathrm{COP}_{Carnot}}{\mathrm{COP}_{Carnot}\times\mathrm{COP}}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

이다. 여기서 Q_L과 T_H는 양수이며, Carnot 정리 식 (4)에 의하면 $\mathrm{COP}-\mathrm{COP}_{Carnot} \le 0$ 이므로 역시 $\oint \delta Q_{ext}/T_{ext} \le 0$ 이 된다.

두 결과를 종합하면 모든 열기관 또는 냉동 사이클에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\oint \delta Q_{ext}/T_{ext} \le 0 \tag{12}$$

따라서 식 (1)을 입증하였으며, Fig. 1의 열기관 또는 냉동기에 대하여 유효하다. 등호는 가역 사이클에 부등호는 비가역 사이클에 대하여 각각 적용한다. 온도 T_{ext}는 외부 열에너지 저장조의 절대 온도(T_H 또는 T_L)이다.

이번에는 조금 더 복잡한 장치를 이용하여 Clausius 부등식 (1)과 (2)에 있는 사이클 적분항을 비교하고자 한다.

2.2 사이클 적분 항의 비교

Fig. 2의 장치에서 온도가 T_H로 일정한 열에너지 저장조와 열기관 시스템을 사이클 A가 연결하고 있다. 사이클 A는 저장조로부터 δQ_H의 열을 받아 δW_H의 일을 하고 δQ_1의 열을 온도가 T_1인 경계를 통해 열기관 시스템에 공급한다. 사이클 작동을 하는 열기관 시스템은 δW_{sys}의 일을 하고 온도가 T_2인 경계를 통해 δQ_2의 열을 또 다른 사이클 B에 공급한다. 사이클 B는 δW_L의 일을 하고, 온도가 T_L로 일정한 열에너지 저장조에 δQ_L의 열을 방출한다. 열이 전달되는 경계면의 온도 T_1과 T_2는 시스템의 상태에 따라서 변화가 가능하다. 단, $T_L < T_2 < T_1 < T_H$ 이다. 사이클 A와 B는 가역일 수도 있고 비가역일 수도 있다. 극단적으로 δW_H와 δW_L은 0일 수도 있다.

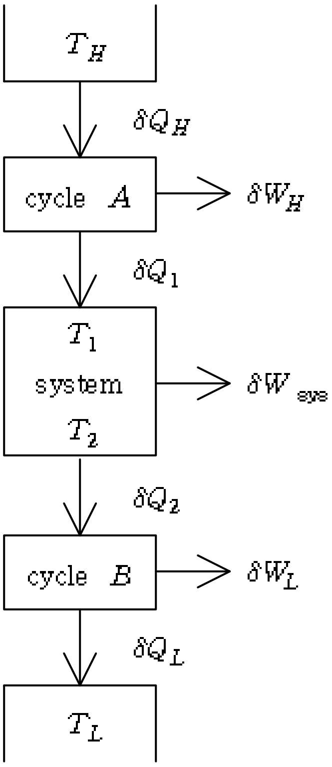


Fig. 2 A heat engine system and two cycles to compare two cyclic integrals

이러한 장치 안에 있는 열기관 시스템의 경계에서 계산하는 다음의 적분에 대하여 알아본다.

$$\oint \delta Q_{int}/T_{int} = \oint \delta Q_1/T_1 - \oint \delta Q_2/T_2 \tag{13}$$

사이클 A에 대해 식 (3)에 의하면

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \delta Q_1/\delta Q_H \\ &\le 1 - T_1/T_H\end{aligned} \tag{14}$$

이므로

$$\delta Q_1/T_1 \ge \delta Q_H/T_H \tag{15}$$

가 성립한다. 마찬가지로 사이클 B에 대해

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \delta Q_L/\delta Q_2 \\ &\le 1 - T_L/T_2\end{aligned} \tag{16}$$

이므로

$$-\delta Q_2/T_2 \ge -\delta Q_L/T_L \tag{17}$$

이 성립한다. 식 (13), (15), (17)에 의하면

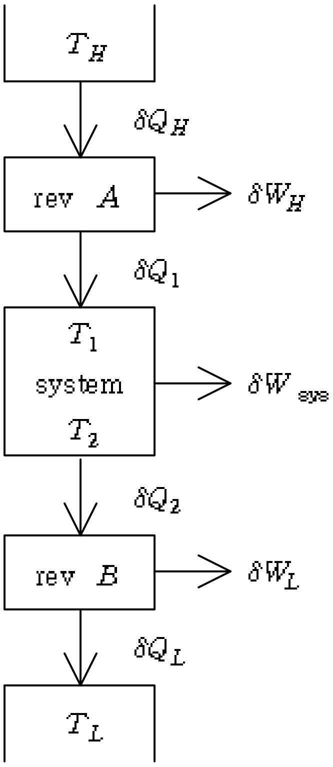


Fig. 3 A heat engine system with a reversible cycle A and another reversible cycle B

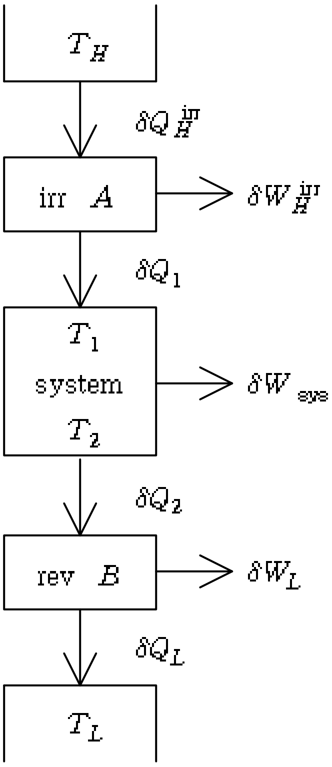


Fig. 4 A heat engine system with an irreversible cycle A and a reversible cycle B

$$\oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \geq \oint[\delta Q_H/T_H] - \oint[\delta Q_L/T_L] = \oint \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \tag{18}$$

즉

$$\oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \geq \oint \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \tag{19}$$

이 된다. 같은 방법으로 이 부등식이 냉동기에 대하여도 성립함을 보일 수 있다. 여기서 등호는 사이클 A와 B 모두가 가역일 때, 즉 시스템과 열에너지 저장조 사이에 비가역 요인이 없을 때 성립한다. 이 경우에는

$$\oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} = \oint \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \tag{20}$$

이다.

2.3 두 번째 Clausius 부등식의 입증

Fig. 3과 Fig. 4에서와 같이 사이클 A는 가역(Fig. 3) 또는 비가역(Fig. 4)이면서 시스템의 운전 상태는 같게 할 수 있다(즉 온도 T_1과 열전달량 δQ_1이 같다). 편의상 아래의 사이클 B는 항상 가역이라고 가정한다. Fig. 3에서 두 외부 사이클이 가역이므로 식 (20)에 의해

$$\oint_{\mathrm{rev}\,A} \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} = \oint_{\mathrm{rev}\,A} \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \tag{21}$$

이 성립한다. 또한 Fig. 4에서는 하나의 외부 사이클이 비가역이므로 식 (19)에 의해

$$\oint_{\mathrm{irr}\,A} \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} > \oint_{\mathrm{irr}\,A} \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \tag{22}$$

가 성립한다. Fig. 3의 시스템 및 Fig. 4의 시스템의 운전 상태는 같으므로(이는 Fig. 3과 Fig. 4에서 위의 고온 열원과 사이클 A를 가리고 남은 아래 부분이 같음을 통해 알 수 있다.)

$$\oint_{\mathrm{rev}\,A} \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} = \oint_{\mathrm{irr}\,A} \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \tag{23}$$

이 성립한다. 즉, 사이클 적분의 값은 시스템과 열에너지 저장조 사이의 비가역 여부(여기서는

사이클 A의 비가역 여부)와는 무관하다. 따라서 두 적분 항에서 외부의 비가역 여부($\mathrm{rev}\,A$ 또는 $\mathrm{irr}\,A$)를 생략하여 단순히 $\oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}}$로 표현하고, 식 (21), (22), (23), (12)를 종합하면

$$\begin{aligned}&\oint_{\mathrm{irr}\,A} \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \\ &\quad < \oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \\ &\quad = \oint_{\mathrm{rev}\,A} \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \le 0\end{aligned} \tag{24}$$

이다. 그러므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \le 0 \tag{25}$$

따라서 식 (2)를 입증하였다. 여기서 등호는 내부적으로 가역일 때, 부등호는 내부적으로 비가역일 때 각각 성립한다.

식 (12), (19), (25)를 종합하면 다음과 같다.

$$\oint \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \le \oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \le 0 \tag{26}$$

왼쪽의 등호는 시스템과 열에너지 저장조 사이에 비가역 요인이 없을 때 성립한다. 오른쪽의 등호는 시스템이 내부적으로 가역일 때 성립한다.

3. 결 론

두 개의 열원이 있는 장치에서 기존의 방법과는 달리 Carnot 사이클의 효율에 관한 정리를 직접 이용하여 외부 열원의 온도가 사용되는 Clausius 부등식을 입증하였다. 두 개의 열원이 있는 또 다른 장치를 분석하여 Clausius 사이클 적분 항을 비교하고 그 결과로서 시스템 경계면에서의 내부 온도가 사용되는 Clausius 부등식을 입증하였다. 이 결과를 요약하면

$$\oint \delta Q_{\mathrm{ext}}/T_{\mathrm{ext}} \le \oint \delta Q_{\mathrm{int}}/T_{\mathrm{int}} \le 0$$

이 되며, 왼쪽의 등호는 시스템과 열에너지 저장조 사이에 비가역 요인이 없을 때 성립하고, 오른쪽의 등호는 시스템이 내부적으로 가역일 때 성립한다.

참고문헌

(1) Sonntag, R. E., Borgnakke, C. and Van Wylen, G. J., 1998, *Fundamentals of Thermodynamics*, John Wiley & Sons, New York, Chapter 8.

(2) Saad, M. A., 1997, *Thermodynamics: Principles and Practice*, Prentice Hall, New Jersey, Chapter 3.

(3) Howell, J. R. and Buckius, R. O., 1992, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, Chapter 5.

(4) Cengel, Y. A. and Boles, M. A., 1998, *Thermodynamics: an Engineering Approach*, WCB McGraw-Hill, Boston, Chapter 6.

(5) Moran, M. J. and Shapiro, H. N., 1993, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, John Wiley & Sons, New York, Chapter 6.

(6) Wark, K., 1977, *Thermodynamics*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Chapter 6.

(7) Park, K. K., 2003, "Study on the Establishment and Comparison of Clausius Inequalities," Transactions of the KSME B, Vol. 27, No. 2, pp. 259 ~ 264.

(8) Zemansky, M. W., Abbott, M. M. and Van Ness, H. C., 1975, *Basic Engineering Thermodynamics*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Chapter 7.