동적인 자유표면을 가진 동심원통에서의 열모세관 대류

심복철*·김우승†

Dynamic Free-Surface Deformations in Axisymmetric Thermocapillary Convection in Open Cylindrical Annuli

Bok-Cheol Sim and Woo-Seung Kim

Key Words: Dynamic Surface Deformation(동적인 자유표면 변형), Thermocapillary Convection (열모세관 대류), Cylindrical Annuli(동심원통)

Abstract

Thermocapillary convection in an open cylindrical annulus heated from the inside wall is investigated by two-dimensional numerical simulations. The deformable free surface is obtained as a solution of the coupled transport equations at fixed Prandtl and aspect ratio. Only steady convection can be realized in this axisymmetric computations with either non-deformable or deformable surfaces. Dynamic free-surface deformations do not induce transitions to oscillatory convection even at large Reynolds numbers. Free surfaces are convex near the cold wall due to the stagnation point, and concave near the hot wall. Free surface deformation increases with increasing Ca at a fixed Re. Two peaks appear at the free surface with low Re, while additional ripples, four peaks, occur at larger Re. Thermocapillary convection in the open annulus interior is insensitive to variations in Ca.

기호설명

Ar	:	종횡비, R/H
Ca	:	Capillary수, $\gamma \triangle T/\sigma_0$
h(t,r)	:	무차원 자유표면의 위치
H	:	원통의 높이
Ma	:	Marangoni수, Pr · Re
P	:	무차원 압력
Pr	:	Prandtl수, ν/α
R	:	원통의 반지름
R_i	:	내부 원통의 반지름
r	:	반경 방향
Re	:	Reynolds수, $\gamma \triangle TH/\nu\mu$
T	:	무차원 온도
$\triangle T$	:	$T_{hot}-T_{cold}$
u	:	무차원 r방향 속도
V	:	무차원 유체체적
v	:	무차원 속도 벡터
v	:	무차원 z방향 속도
z	:	축(수직)방향
γ	:	$-\partial\sigma/\partial T$
σ	:	표면장력

† 김우승 (한양대 기계공학과)
E-mail : wskim@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5248 FAX : (031)418-0153
* 심복철 (한양대 BK21 기계사업단)

1. 서 론

단결정 성장으로부터 고품질의 결정체를 얻기 위해서는 부력과 열모세관력의 영향력을 연구할 필요가 있다. 이러한 두 가지 힘은 단결정성장 중 유체유동을 발생시킨다. 하지만 미소 중력(microgravity) 상태에서는 열모세관력이 지배적이다. 열모세관 유동은 어느 임계온도차에서 주기적인 진동을 하는 불안정 유동으로 전이된다. 주기적으로 진동하는 용융 액은 성장된 결정체에 줄무늬를 발생시킨다. 결정체의 줄무늬는 다른 농도를 나타내며 물리적 화학적 성질에 직접적으로 영향을 미친다. 이러한 유동을 제어하기 위해서 불안정성의 특성을 체계적으로 연구해야 할 필요성이 있다.

Schwabe[1]등은 두가지 형상에서의 열모세관 유동을 실험적으로 보고했다. 하나는 직사각형 형상이며 다른 하나는 얕은 동심원통의 형상이다. 그들은 자유 표면에서 원주방향(Azimuthal)의 Wave들을 발견했으며, Ma가 증가함에 따라 Wave수는 증가한다는 것을 보여 주었다. 또한 Kamotani등[2-5]은 열모세관 대류에 대한 (유체 체적에 의해 결정된) 자유표면 형상의 영향력을 실험했다. 평평한 자유표면을 가진 동심원통에서의 3차원 열모세관 대류현상은 Sim과 Zebib[6]에 의해 수치적으로 해석되었으며, Schwabe등[7]과 Sim등[8]이 미소 중력에서의 실험과 수치해석의 결과들을 동시에 보고했다. 정적인 자유표면의 모양이 유동 불안정성에 미치는 영향력은 Sim과 Zebib[9,10]에 의해 최근에 수치적으로 보고되었다. 그들은 Liquid bridge와 Open Cylinder에서의 축대칭 모델은 오직 안정한 열모세관 유동만을 분석 할 수 있고 불안정 유동은 3차원 현상임을 보여 주었다.

동적인 자유표면을 가진 수치적 결과들은 오직 2차원 직사각형의 형상[11-14]에서만 보고 되었다. Mundrane과 Zebib[14]는 자유 표면의 아주 작은 동적인 변형은 유동 불안정을 야기시키지 못한다는 것을 2차원 직사각형의 Cavity에서 보여 주었다.

실제 자유표면은 동적이며, 그것의 형상은 미리 결정될 수 없다. 따라서, 본 연구에서는 시간에 따른 동적인 자유표면의 형상을 분석하고자 한다. 자유표면의 형상은 지배방정식과 연계(Coupled)되어 시간에 따라 결정된다. 특히, 자유표면의 동적인 움직임과 유동 불안정성과의 관계를 연구하고자 한다..

2. 수학적 모델

본 연구의 모델은 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 동적인 자유표면을 가진 동심원통이다. 종횡비와 Prandtl수는 각각 1과 30이 사용된다. 두 수직면의 무차원 온도 $T_{hot}=1$과 $T_{cold}=0$ 이고 아래면은 단열이다. 유체 표면장력은 아래와 같이 가정된다.

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \tag{1}$$

여기서 밑첨자 0은 기준 상태를 가리킨다. 유체

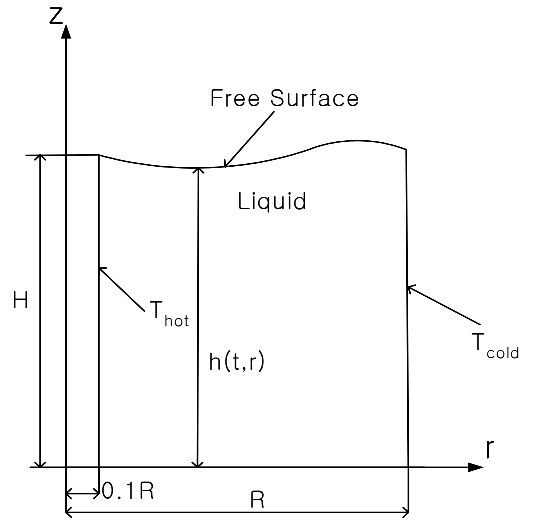

Fig. 1: Physical System.

를 물성값이 일정한 뉴턴유체라고 가정하면 미소 중력 상태에서의 무차원 지배 방정식은 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

$$Re\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{vv})\right) = -\nabla P + \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{3}$$

$$Ma\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}T)\right) = \nabla^2 T \tag{4}$$

길이, 온도, 속도, 압력 그리고 시간은 각각 H, ΔT, $\nu \Delta T/\mu$, $\nu \Delta T/H$와 $\mu H/\nu \Delta T$에 의해 무차원화 된다. 벽면에서의 경계조건들은 아래와 같다.

$$u=0,\ v=0,\ w=0,\ T=1, \quad at\ r=0.1 \tag{5}$$

$$u=0,\ v=0,\ w=0,\ T=0, \quad at\ r=1 \tag{6}$$

$$u=0,\ v=0,\ w=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0, \quad at\ z=0 \tag{7}$$

그리고 무차원 자유표면의 위치가 h(t,r)에 의해 표현된다면, 자유표면(z=h(t,r))의 경계조건들은 아래에 기술된 바와 같이 열적(Thermal), 운동학적(Kinematic), 그리고 전단응력과 수직응력 평형 조건들이다.

$$h' \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial z} \tag{8}$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + h' u \tag{9}$$

$$(1-h'^2)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) + 2h'\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = -N\left(\frac{\partial T}{\partial r} + h' \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{10}$$

$$-P+\frac{2}{N^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+h'^2\frac{\partial u}{\partial r}-h'\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$$
$$=\frac{1-CaT}{CaN}\left(\frac{h''}{N^2}-\frac{1}{h}\right) \quad (11)$$

여기서 $N=(1+h'^2)^{1/2}$와 $h'=\frac{\partial h}{\partial r}$이다.

전단응력 평형 방정식 식(10)은 열모세관력을 나타내며, 수직응력 평형 방정식 식(11)은 초기조건과 두 개의 경계조건들을 가진다.

$$h(t=0,r)=1 \quad (12)$$
$$h(t,r=0.1)=1 \quad (13)$$
$$h(t,r=1)=1 \quad (14)$$

유체의 체적은 항상 보존되어야 하며, 전체 무차원 유체체적은 일정해야 한다.

$$V=\frac{2\int_{0.1}^{1} rhdr}{0.99}=1 \quad (15)$$

여기서 유체의 체적은 $0.99\pi HR^2$에 의해 무차원화되었다. 자유표면의 동적인 변화는 Ca수에 의해서 특징 지워진다. 만약 표면 장력이 아주 크다면 (Ca=0), 자유표면은 평평하다. Ca의 실제 실험치는 알려져 있지 않으나, Liquid bridge[15]에서의 Ca는 대략 $O(10^{-1})-O(10^{-3})$의 범위안에 있다.

3. 수치적 모델

동적인 자유표면을 가진 문제를 풀기 위해서 모든 방정식들은 실제의 물리적인 영역(t,r,z)으로부터 직교인 계산영역(t,ξ,η)으로 변환된다.

$$\xi=r/g(z) \quad (16)$$
$$\eta=z \quad (17)$$

계산영역으로 변환된 지배 방정식들은 아래와 같다.

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi u}{\partial \xi}-\eta\frac{h'}{h}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{h}\frac{\partial v}{\partial \eta}=0 \quad (18)$$

$$Re\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\eta}{h}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi u^2}{\partial \xi}-\frac{\eta h'}{h}\frac{\partial u^2}{\partial \eta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h}\frac{\partial uv}{\partial \eta}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{\eta h'}{h}\frac{\partial p}{\partial \eta}-\frac{u}{\xi^2}+\nabla^2 u \quad (19)$$

$$Re\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\eta}{h}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi uv}{\partial \xi}-\frac{\eta h'}{h}\frac{\partial uv}{\partial \eta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h}\frac{\partial v^2}{\partial \eta}\right)=-\frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\nabla^2 v \quad (20)$$

$$\Pr Re\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\eta}{h}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi uT}{\partial \xi}-\frac{\eta h'}{h}\frac{\partial uT}{\partial \eta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h}\frac{\partial vT}{\partial \eta}\right)=\nabla^2 T \quad (21)$$

$$\nabla^2=\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\right)-\frac{2\eta h'}{h}\frac{\partial^2}{\partial \eta\partial \xi}+2\left(\left(\frac{h'}{h}\right)^2-\frac{h''}{h}\right.$$
$$\left.-\frac{h'}{h\xi}\right)\eta\frac{\partial}{\partial \eta}+\left(\left(\frac{h'\eta}{h}\right)^2+\frac{1}{h^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (22)$$

한편, 변환된 경계조건들은 아래와 같다.

$$At\ \ \xi=0.1,\quad T=1,\ u=0,\ v=0 \quad (23)$$
$$At\ \ \xi=1,\quad T=0,\ u=0,\ v=0 \quad (24)$$
$$At\ \ \eta=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \eta}=0,\ u=0,\ v=0 \quad (25)$$

자유표면에서($\eta=1$)

$$\frac{1+h'^2}{h}\frac{\partial T}{\partial \eta}=h'\frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (26)$$

$$v=\frac{\partial h}{\partial t}+h'u \quad (27)$$

$$\left(\frac{1+h'^2}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}-2h'\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(\frac{h'+h'^3}{h}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}$$
$$+(1-h'^2)\frac{\partial v}{\partial \xi}=-N\frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (28)$$

$$-P+\frac{2}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-h'\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{2h'}{N^2}\left(h'\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$
$$=\frac{1-CaT}{CaN}\left(\frac{h''}{N^2}+\frac{h'}{\xi}\right) \quad (29)$$

여기서 P는 적분상수, C(t)를 포함하고 있다. h(t,r)과 C(t)는 식(12)-(14), 식(15) 그리고 식(29)에 의해서 결정되어진다. 각 시간에서의 C(t)는 Shooting 방법에 의해 결정된다.

동적인 자유표면의 모양은 미리 알려져 있지 않으며, h(t,r)는 전체 지배방정식의 해와 함께 구해져야 한다. 지배 방정식 식(18)-(21)과 경계조건 식(23)-(29)는 SIMPLER 알고리즘을 사용한 유한체적법에 의해 해결된다. 경계층이 발생하는 자유표면과 벽면 근처에 격자가 밀집된 비균일 격자계을 사용한다. 수치적인 계산과정은 아래와 같이 요약되어진다.

1) T, u, v 그리고 h의 초기 조건을 가지고 계산을 시작한다.
2) 물리적 영역을 직교인 계산영역으로 변환한다.
3) 경계조건 식(23)-(29)와 지배방정식 식(18)-(21)으로부터 T, u 그리고 v를 구한다.
4) 경계 조건 식(12)-(14)와 식(15) 그리고 수직응력 평형 식(29)로부터 h와 C를 구한다.
5) T, u, v 그리고 h의 방정식이 수렴할때까지, Step (2)-(4)를 반복한다.
6) 다음 시간 단계를 위해 Step (1)로 돌아간다.

Table 1 Grid refinement studies.

Re	Ca	Grid numbers (r×z)	Stream function minima
2000	0	61×61	−0.00106
		71×71	−0.00106
		81×81	−0.00106
		121×121	−0.00106
	0.05	61×61	−0.00106
		71×71	−0.00106
		81×81	−0.00106

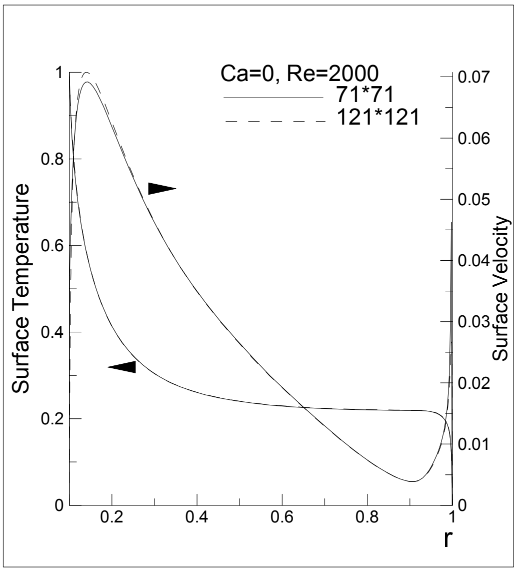

Fig. 2: Surface temperature and velocity distributions with various grids.

격자 의존성을 조사하기 위해, Table 1과 Fig. 2에 나타낸 것과 같이 여러 가지 격자계에 따른 최대 Stream function값, 표면 유체속도와 온도 분포들을 비교한 후, 71×71의 비균일 격자계가 사용되었다.

4. 결과 및 고찰

Fig. 3은 본 수치해석의 결과와 실험치와의 비교를 보여주고 있다. 실험결과와 수치해석 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 찬벽 근처에서의 약간의 차이는 아마도 자유표면에서의 열손실에 기인하는 것으로 간주되어 진다. 동적인($Ca \le 0.1$) 자유표면을 가진 동심원통에서의 축대칭 열모세관 대류를 Re=5000까지 조사했으며, 축대칭 모델에서 불안정 유동은 발생하지 않았다. 3차원 정적인 평평한 자유표면을 가진 원통형 모델에서의 불안정성을 위한 임계 Re는 2200이다[6]. 따라서

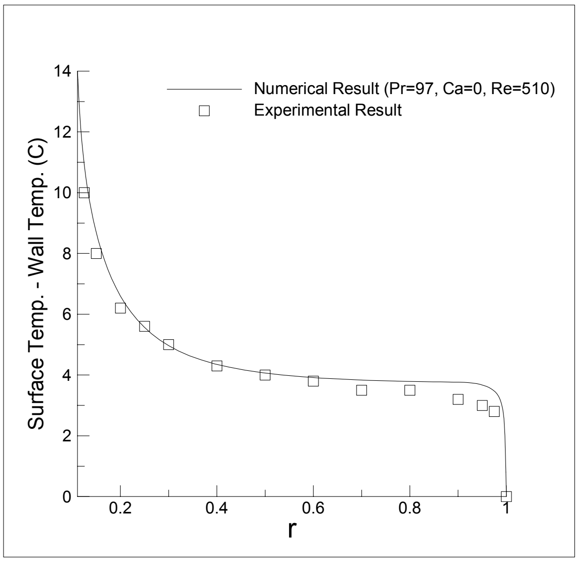

Fig. 3: Comparison of surface temperature distributions with experimental results (Pr=97, Re=510, R_i/H=0.111, Ar=1, Ca=0).

동적인 자유표면의 움직임은 불안정 유동을 야기시키지 못함을 알 수 있다. 또한 오직 Azimuthal Wave만이 불안정 유동을 야기시킬 수 있다는 결론을 얻을 수 있다. 즉 0의 Wave수를 가진 비정상(불안정) 열모세관 대류는 동심원통모델에서 발생하지 않았다. 이러한 결과는 Open Cylinder[9]와 Liquid bridge[10]에서의 결과들과 잘 일치한다.

Fig. 4는 Re에 따른 자유 표면의 모양을 나타내고 있다. 자유 표면은 고온의 벽근처에서는 오목하며, 저온 Stagnation 벽에서는 볼록하다. Re가 증가함에 따라 자유 표면의 변형은 감소한다. 자유표면의 동적인 변화는 Ca수에 의해서 특징 지워지며, 동적인 자유 표면의 영향력은 Figs. 5와 6에 잘 나타나 있다. 낮은 Re에서의 자유 표면은 두 개의 Peak를 나타내며, r=0.6에서 Reflection Point를 가진다. Ca가 증가함에 따라, 자유 표면의 변형은 증가함을 알 수 있다. 높은 Re에서는 자유 표면의 모양이 상대적으로 복잡하며, 4개의 Peak가 나타난다.

Fig. 7은 Ca에 따른 자유 표면의 온도와 속도 분포를 나타내고 있다. 열모세관 유동에 대한 동적인 자유 표면의 영향력은 거의 무시해도 좋음을 잘 알 수 있다. Fig. 8은 Ca=0.05와 Re=2000의 온도장과 유동장을 나타내고 있다. 큰 하나의 와

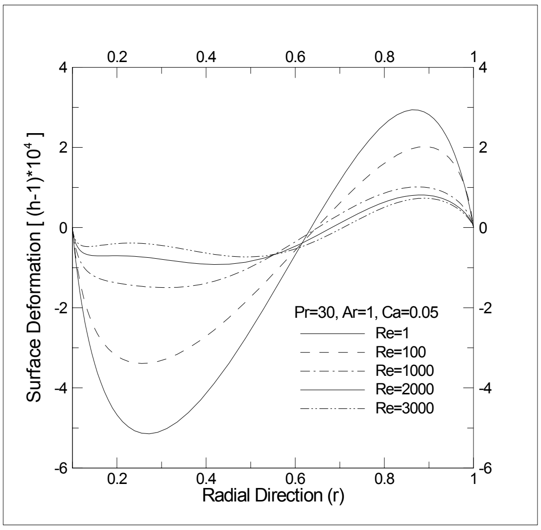

Fig. 4: Free surface deformations with Ca=0.05 and various Re.

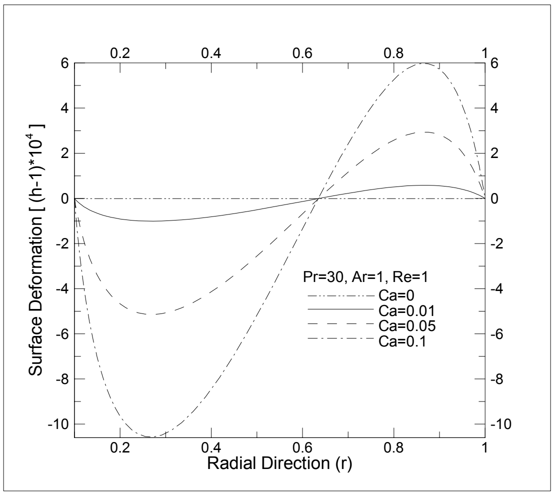

Fig. 5: Effect of Ca on free surfaces with Re=1.

류가 생기는 전형적인 열모세관 유동을 나타내며, 많은 연구가들에 의해 분석되었기 때문에 자세한 설명은 여기서 생략한다.

5. 결 론

동적인 자유 표면이 열모세관 유동에 미치는 영향을 분석하기 위하여, 다양한 Ca를 가진 동심원통에서 열모세관 대류에 대해 2차원 수치해석을 수행하였다. 자유 표면의 동적인 움직임과 관계없이 축대칭 모델은 오직 정상 상태 유동만을

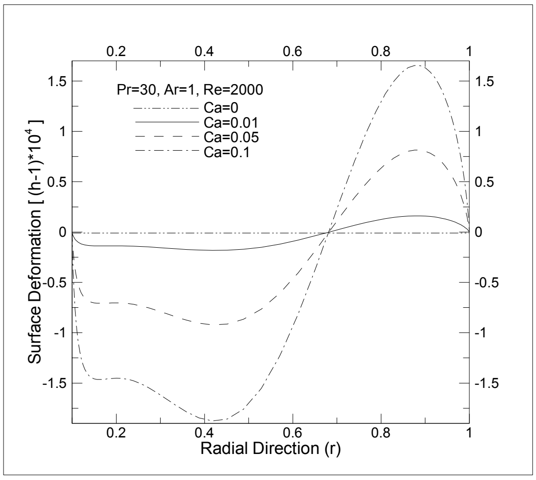

Fig. 6: Free surface deformation with Re=2000 and various Ca

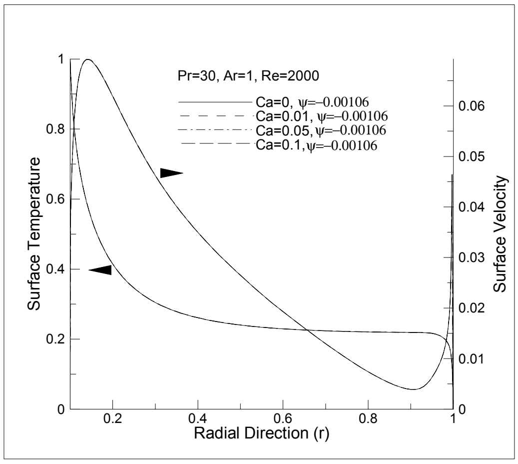

Fig. 7: Effect of Ca on surface temperature and velocity distributions with Re=2000.

보여 주었다. 따라서 동적인 자유표면의 움직임은 불안정 유동을 야기시키지 못함을 알 수 있다. Azimuthal Wave만이 불안정 유동을 야기시킬 수 있다. 자유 표면은 고온의 벽근처에서는 오목하며, 저온 Stagnation 벽에서는 볼록하다. Re가 증가함에 따라 자유 표면의 변형은 감소한다. 낮은 Re에서의 자유 표면은 두 개의 Peak를 나타내며, 높은 Re에서는 4개의 Peak를 가진다. Ca가 증가함에 따라 자유 표면의 변형은 증가함을 알 수 있다. 열모세관 유동에 대한 동적인 자유 표면의 영향력은 거의 무시해도 좋음을 잘 알 수 있다.

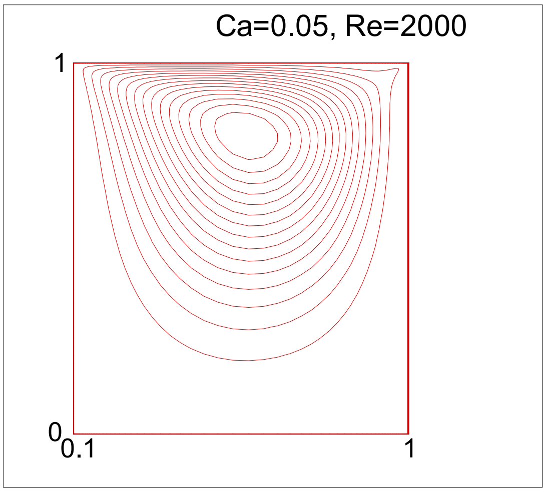

Fig. 8: Streamlines with Ca=0.05 and Re=2000.

참고문헌

(1) D. Schwabe, U. Moller, J. Schneider, and A. Scharmann, 1992, Instabilities of shallow dynamic thermocapillary liquid layers, Phys.Fluids Vol.4, pp.2368-2381.

(2) Y. Kamotani, S. Ostrach, and A. Pline, 1995, A thermocapillary convection experiment in microgravity, J. Heat Transfer, Vol.117, pp.611-618.

(3) Y. Kamotani, S. Ostrach, and A. Pline, 1994, Analysis of velocity data taken in surface tension driven convection experiment in microgravity, Phys.Fluids, Vol.6, pp.3601-3609.

(4) Y. Kamotani, S. Ostrach, and J. Masud, 1998, Oscillatory thermocapillary flows in open cylindrical containers induced by CO_2 laser heating, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.42, No.3, pp.555-564.

(5) Y. Kamotani, S. Ostrach, and J. Masud, 2000, Microgravity experiments and analysis of oscillatory thermocapillary flows in cylindrical containers, J.Fluid Mech. Vol.410, pp.211-233.

(6) B.-C. Sim and A. Zebib, 2002, Effect of surface heat loss and rotation on transition to oscillatory thermocapillary convection, Phys.Fluids, Vol.14, pp.225-231.

(7) D. Schwabe, A. Zebib and B.-C. Sim, 2001, Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. Part 1. Experiments under microgravity, submitted to J.Fluid Mech.

(8) B.-C. Sim, A. Zebib and D. Schwabe, 2001, Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. Part 2. Simulations, submitted to J.Fluid Mech.

(9) B.-C. Sim and A. Zebib, 2002, Thermocapillary convection with undeformable curved surfaces in open cylinders, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.45, No.25, pp.4983-4994.

(10) B.-C. Sim and A. Zebib, 2002, Thermocapillary convection with undeformable curved surfaces in liquid bridges, J.Thermophys. Heat Transfer, Vol.16, pp.553-561.

(11) M. Mundrane, J. Xu and A. Zebib, 1995, Thermocapillary convection in a rectangular cavity with a deformable interface", Adv.Space Res., Vol.16, No.7, pp.41-53.

(12) J. Chen and F. Hwu, 1993, Oscillatory thermocapillary flow in a rectangular cavity, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.36, No.15, pp.3743-3749.

(13) M. Hamed and J. Floryan, 2000, Marangoni convection. Part 1. A cavity with differentially heated sidewalls, J.Fluid Mech., Vol.405, pp.79-110.

(14) M. Mundrane and A. Zebib, 1995, Low Prandtl number Marangoni convetion with a deformable interface, J.Thermophys. Heat Transfer, Vol.9, pp.795-797.

(15) H. Kuhlman and C. Nienhuser, 2002, Dynamic free-surface deformations in thermocapillary liquid bridges, Fluid Dynamics Research, Vol.31, pp.103.