

난류에 의해 야기되는 이차유동 예측에 관한 비선형 난류모형의 평가

명현국[†]

Evaluation of Nonlinear Models on Predicting Turbulence-Driven Secondary Flow

Hyon Kook MYONG

Key Words: Nonlinear model(비선형 모형), Turbulence-driven secondary flow (난류에 의해 야기되는 이차유동), Anisotropy (비등방성), Evaluation (평가)

Abstract

Nonlinear relationship between Reynolds stresses and the rate of strain of nonlinear $k-\epsilon$ models is evaluated theoretically by using the boundary layer assumptions against the turbulence-driven secondary flows in noncircular ducts and then their prediction performance is validated numerically through the application to the fully developed turbulent flow in a square duct. Typical predicted quantities such as mean axial and secondary velocities, turbulent kinetic energy and Reynolds stresses are compared with available experimental data. The nonlinear model adopted in a commercial code is found to be unable to predict accurately duct flows with the prediction level of secondary flows one order less than that of the experiment.

1. 서론

공학적으로 중요한 열교환기, 공기조화시스템, 연소챔버 및 원자로의 냉각채널 등에서 나타나는 비원형 단면(noncircular duct)을 가지는 덕트내 난류유동의 주된 특징은 충분히 발달된 유동의 경우에도 횡단면상에 난류의 비등방성에 의해 야기되는 Prandtl의 제2종 이차유동(secondary flow of the second kind)이 존재한다는 것이다. 이 이차유동은 축방향 주류속도에 비해 1% 이하로 상대적으로 매우 작으나, 난류에너지를 재분배시키고, 주유동 속도에 영향을 주어 결과적으로 벽면전단응력 분포를 변화시키는 등 유동장 전반에 걸쳐 큰 영향을 미친다. 따라서, 현재까지 많은 실험적 및 수치해석적 연구가 수행되어 왔다⁽¹⁾⁻⁽¹⁰⁾.

한편, 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어 복잡한 난류유동장 예측을 위해 현재 일반좌표계를 사용하는 해석코드가 널리 사용되고 있다. 그러나, 대부분의 해석코드는 난류의 등방성 가정에 기초한 선형(linear) 난류모형을 채택하고 있어 난류의 비등방성에 기인하여 발생하는 난류유동을 제대로 예측하지 못하고 있다. 최근, 난류의 비등방성을 고려한 비선형(nonlinear) 난류모형을 도입시킨 상용코드(STAR-CD)⁽¹¹⁾가 개발되고, 또한 일반좌표계를 사용하는 해석코드에 비선형 난류모형을 도입하여 난류로 야기되는 이차유동을 해석한 연구^{(12), (13)}가 보고 되고 있으나, 이들 비선형 난류모형에 대한 정확한 평가가 아직 제대로 이루어지지 않은 상태로 이에 대한 정립이 필요하다.

본 연구에서는 이러한 배경하에 난류에 의해 야기되는 이차유동 예측에 대한 기존의 대표적인 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델에서의 레이놀즈응력과 변형을 사이의 관계인 비선형 난류모형을 이론적 고찰을 통해 정성적으로 평가하고, 정사각형 덕

[†] 국민대학교 기계자동차공학부

E-mail : myong@kookmin.ac.kr

TEL : (02)910-4714 FAX : (02)910-4839

트유동에 적용하여 이들 비선형 난류모형의 예측 성능을 정량적으로 평가하고자 한다.

2. 비선형 난류모형의 이론적 평가

일반적으로 벽함수를 사용하는 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델은 선형(등방성) $k-\epsilon$ 난류모델과 기본적으로는 똑같은 모델방정식 및 모델상수를 사용하고 있으나, 레이놀즈응력과 변형을 사이의 관계가 선형이 아닌 비선형으로 된다. 또한, 이들 모델은 기본이 되는 k 및 ϵ 방정식의 모델형태도 조금씩 다르기 때문에, 본 연구에서는 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델에 포함된 레이놀즈 응력과 변형을 사이의 관계인 비선형 난류모델에 초점을 맞추기 위해, 기본적인 k 및 ϵ 방정식의 모델형태로 표준 $k-\epsilon$ 난류모델의 모델방정식을 사용하기로 한다.

본 연구에서는 비선형 난류모델로 현재 상용 코드에 도입되어 사용되고 있는 Shih 등⁽¹⁴⁾의 모델(SZL 모형), 최근 연구에서 많이 사용되고 있는 Speziale⁽⁹⁾의 모델(SP 모형) 및 정사각형 덕트 유동에서 좋은 예측성능을 보인 Myong-Kasagi⁽¹⁵⁾의 모델(MK 모형)을 선정하여, Fig. 1에 나타낸 바와 같이 비원형 덕트중에서 형상이 단순한 정사각형 단면을 가지는 덕트내의 난류유동을 대상으로 하여 이들 비선형 모형에 대한 상호 비교분석을 통해 평가한다.

일반적으로 비선형 모형은 레이놀즈응력과 변형을 사이의 관계를 다음과 같이 비선형으로 표현할 수 있다⁽¹⁶⁾.

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t S_{ij} \\ &+ C_1 \nu_t \frac{k}{\epsilon} (S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) \\ &+ C_2 \nu_t \frac{k}{\epsilon} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ C_3 \nu_t \frac{k}{\epsilon} (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij}) \quad (2)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

위의 식(1)에서 선형 난류모델은 우변의 처음 두 항만을 사용한다. 비선형 난류모델의 모델상

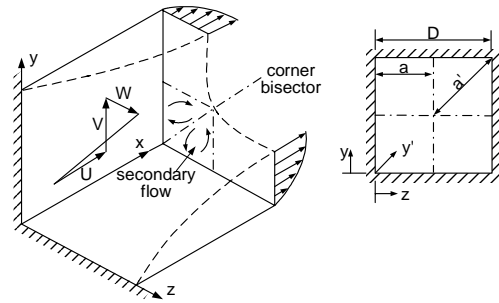


Fig.1 Coordinate system and pertinent variables in a straight square duct.

수에 대해서 먼저 SZL 모형은 다음과 같은 형태를 채용하고 있으며,

$$C_1 = \frac{0.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4a)$$

$$C_2 = \frac{3.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4b)$$

$$C_3 = \frac{4.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4c)$$

$$C_\mu = \frac{2/3}{1.25 + S + 0.9\Omega} \quad (5)$$

$$S = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \Omega = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (6)$$

SP 모형은 원래의 식 형태는 식 (1)과 다르나, 식 (1)과 같이 표현하면 다음과 같은 모델상수 값을 가진다.

$$C_1 = -0.1512, C_2 = 0, C_3 = 0 \quad (7)$$

한편, MK 모형은 원래 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 난류모델⁽¹⁵⁾로 표준형 $k-\epsilon$ 난류모델과 모델상수도 다소 다르며, 레이놀즈응력과 변형을 사이의 관계도 식 (1)과 다른 표현형태를 가지나, 벽면 근처의 영향을 고려한 벽감쇄함수 및 추가항들을 제외시킨 고레이놀즈수형에 대해서는 식(1)로 표현하면, 다음과 같은 모델상수 값을 가진다.

$$C_1 = 0.275, C_2 = 0.2375, C_3 = 0.05 \quad (8)$$

식 (1)의 레이놀즈응력에 대한 비선형 모형을 대수응력모델 및 비선형 모형 상호간에 비교하기 위해, 본 연구에서 대상으로 하는 비원형 단면을 가지는 사각형 덕트유동에 대해 경계층 근사를 사용한다. 이 근사 과정에서 식 (1)의 속도구배의 비선형항 중에서 주방향 속도구배만을 갖지 않는 항들은 통상의 차수평가(order estimation)로부터 무시할 수 있으나, 속도구배의 선형 및 비선형항 사이에서는 일반적으로 똑같은 차수평가

를 적용할 수 없으므로, 선형항에서 2차 속도구배항들은 유지한다. 이것은 선형항 중의 이차속도구배가 이차유동 형성에 중요한 역할을 하는 것을 보고한 Perkins⁽²⁾ 및 Demuren and Rodi⁽⁸⁾의 연구결과에 의해서도 간접적으로 확인할 수 있다. 결과적으로 식 (1)의 레이놀즈응력은 다음과 같이 비교적 단순한 형태로 정리된다.

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}(C_1 + 6C_2 + C_3) \times \nu_t \frac{k}{\epsilon} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$\overline{v^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}\nu_t \frac{k}{\epsilon} [(C_1 - 6C_2 + C_3) \times \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + 2(C_1 + C_3) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2] \quad (10)$$

$$\overline{w^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}\nu_t \frac{k}{\epsilon} [(C_1 - 6C_2 + C_3) \times \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2(C_1 + C_3) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2] \quad (11)$$

$$\overline{uv} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\overline{uw} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$\overline{vw} = -\nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + (C_1 - 2C_2 + C_3)\nu_t \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (14)$$

비선형 모형에 의해 얻어진 레이놀즈응력에 대한 위의 결과 형태를 난류에 의해 야기되는 이차유동 해석을 위해 사용한 기존의 대표적인 대수응력모델인 Demuren and Rodi의 모델⁽⁸⁾ (DR 모델) 및 Launder and Ying의 모델⁽⁶⁾ (LY 모델)과 함께 비교하면, 먼저 식 (12) 및 식 (13)으로 나타내어지는 주 레이놀즈 전단응력에 대한 표현은 통상적인 선형 (등방) 난류모형과 DR 및 LY 모델 형태와 동일하다. 그러나, 이들 식 형태가 비선형 모형에서는 경계층 근사만 적용하여 얻어졌으나, DR 및 LY 모델에서는 극단적인 가정하에서 얻어졌다. 이런 면에서 비선형 모형은 기존의 대수응력모델에서 불명확한 이론적 배경하에서 채택한 주 레이놀즈 전단응력에 대한 와확산 개념 (eddy diffusivity concept)의 유용성을 확인시켜주고 있다고 사료된다. 둘째로, 비선형 모형에서는 이차적인 수직응력에 대한 차 $\overline{w^2} - \overline{v^2}$ 가 식 (10) 및 식 (11)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \overline{w^2} - \overline{v^2} &= 2\nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ &\quad - (C_1 - 2C_2 + C_3)\nu_t \frac{k}{\epsilon} \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

참고로, 이 항과 식 (14)의 이차적인 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 의 항은 일반적으로 이차유동(또는 와동) 생성에 중요한 역할을 하는 것으로 알려져 있다⁽²⁾. 식 (14)와 식 (15)의 형태는 기존의 대수응력모델 중에서 우수한 것으로 알려진 DR 모델과 유사하나, DR 모델에서는 일련의 불명확한 특별한 가정을 사용하여 이 식들이 얻어지는데 반해, 비선형 모형에서는 위에서 기술한 바와 같이 단순한 경계층 근사만으로 얻어진다. 특히, 비선형 모형은 Perkins⁽²⁾에 의해 확인된 이차적인 전단응력의 생성에 기여하는 두 가지 다른 메커니즘의 적합성, 즉 식 (14)에 나타난 바와 같이 이차속도구배와 결합된 메커니즘을 등방성 와확산의 항으로 우변 첫번째 항에, 코너 부근에서 주 레이놀즈 전단응력장의 왜곡과 밀접한 관련 때문에 주방향 속도구배와 결합된 메커니즘을 우변 두번째 항에 명확하게 보여주고 있다. 셋째로, 식 (10)과 식 (11)로 표현되는 이차적인 수직응력 $\overline{v^2}$ 및 $\overline{w^2}$ 이 비선형 모형에서는 y 및 z 방향으로의 주방향 속도구배항을 모두 가지고 있어 물리적으로 합당한 식 형태를 가지나, 대수응력모델인 DR 과 LY 모델에서는 각 응력에 대해 오직 한 방향으로의 주방향 속도구배항만을 가지고 있다. 결과적으로, 비선형 모형은 레이놀즈응력에 대한 모델 식 형태에서 대수응력모델과 강한 유사성을 가지고 있으나, 물리적면에서 보다 적절하다고 판단된다.

이와 같이 비선형 모형은 이차유동 생성에 중요한 역할을 하는 것으로 알려져 있는 이차적인 수직응력에 대한 차 $\overline{w^2} - \overline{v^2}$ 와 이차적인 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 의 항을 모두 적절하게 나타내고 있으나, SP 모형은 이차원 경계층 유동에 대해서 MK 및 SZL 모형과 달리 난류수직응력들에 대한 실험적 관계를 정확하게 나타내지 못하고 있다. 즉, 속도구배로 $\partial U/\partial y$ 만이 존재하는 2차원 경계층 유동에 대해서 식(9)부터 식 (11)에 각 모형의 모델상수를 대입해 보면 MK 모형 및 SZL 모형

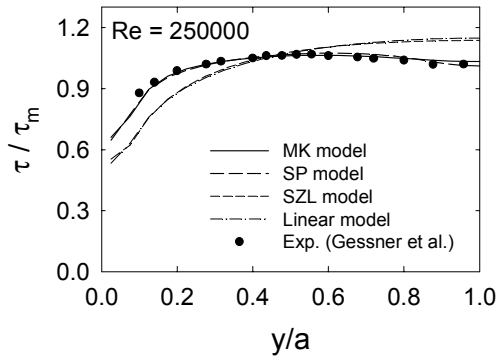


Fig.2 Local wall shear stress distributions in a square duct.

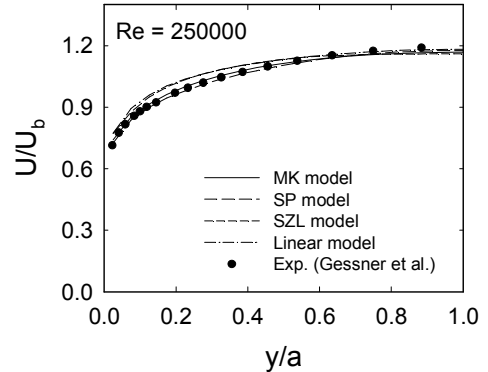
은 $\overline{u^2} > \overline{w^2} > \overline{v^2}$ 로 난류수직응력에 대한 실험적 관계를 정확하게 나타내는데 반해, SP 모형은 $\overline{w^2} > \overline{u^2} = \overline{v^2}$ 로 실험적 사실과 모순된 결과를 나타냄을 알 수 있다.

3. 정사각형 덕트유동에의 적용 결과

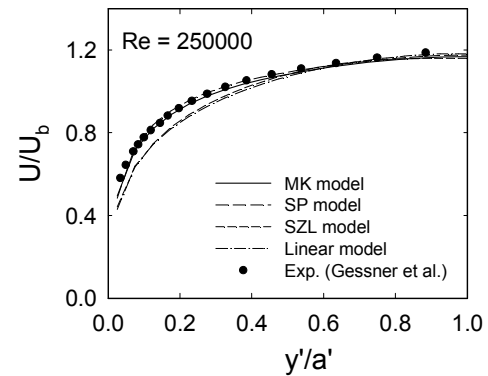
본 절에서는 앞에서 살펴 본 비선형 모형을 완전히 발달된 정사각형 덕트유동에 적용하여 각 모형의 예측성능을 정량적으로 평가한다.

수치해석은 자체 개발한 MOSA3D코드⁽¹⁷⁾를 사용하여 수행하였다. 이 코드는 유한체적법과 SIMPLE 해법에 기초하고 일반좌표계(경계밀착좌표계)와 정렬격자계를 채택하고 있다. 따라서, 앞절에서 고찰한 것과 같은 경계층 근사를 일절 사용하지 않고 있으며, 완전히 발달된 정사각형 덕트내의 유동을 경제적으로 처리하기 위해 축(주유동) 방향으로 1~3개의 셀층만이 요구되는 수치해석방법을 코드에 도입하였다.

본 연구에서는 대칭성을 고려하여 Fig. 1에 나타난 정사각형 단면의 1/4만을 대상으로, y 및 z 축 방향으로 각각 20개의 등간격 격자를 사용하고, 벽면경계에 대해서는 선형 난류모델에서 사용하는 벽함수를 그대로 사용하였다. 또한, 대류항에 대한 도식으로는 하이브리드 도식(hybrid scheme)을 사용하였다. 참고로, 수치해석방법에 관한 보다 자세한 사항은 명⁽¹⁸⁾에 의해 보고되어 있으며, 본 논문에서 이하 비교 고찰하는 유동은 덕트 폭 및 축방향 평균속도에 기초한 레이놀즈



(a) wall bisector (along $z/a = 1$)

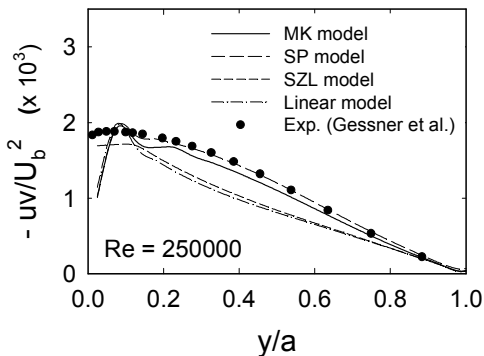


(b) corner bisector (along $z = y$)

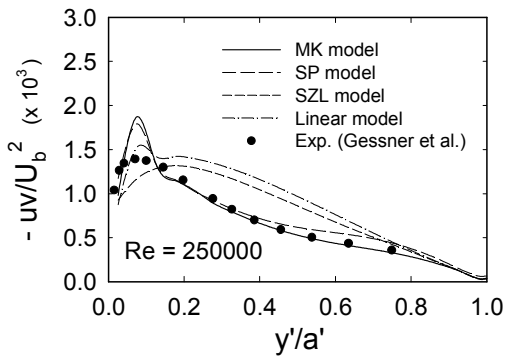
Fig.3 Mean axial velocity profiles in a square duct.

수 Re 가 250,000인 경우이다.

Fig. 2는 완전히 발달된 난류유동에 대한 덕트 주변길이에 따른 국소 벽면전단응력의 예측결과를 실험결과^{(4), (5)}와 함께 나타내고 있다. 비교를 위해 선형모형의 결과도 함께 나타냈다. 실험결과는 벽면 부근에서 코너쪽으로 향하는 이차유동에 기인하여 벽면전단응력이 대칭면(양쪽 벽면의 중심)으로부터 코너쪽을 향해 상승하여 코너와 대칭면 중간 지점에서 최대값을 가진 후, 코너부근에서 급격히 떨어지고 있다. 예측결과를 보면 MK 모형 및 SP 모형은 실험적으로 알려진 특징을 정확하게 예측하고 있으며, 정량적으로도 실험결과와 매우 잘 일치하고 있다. 반면, SZL 모형은 비등방성 효과를 전혀 고려하지 않는 선형모형과 유사하게 코너에서부터 상승하여 양쪽 벽면의 중심인 대칭면에서 최대가 되는 예측결과를 보여주고 있어, 이러한 실험적 결과를 거의 반영시키지 못하고 있다.



(a) wall bisector (along $z/a = 1$)



(b) corner bisector (along $z = y$)

Fig.4 Primary Reynolds shear stress profiles in a square duct.

Fig. 3은 $z/a = 1$ 의 벽면 이등분선 및 $z = y$ 의 코너 이등분선상에서의 축방향 속도 분포를 보여주고 있다. 예측결과를 보면 MK 모형 및 SP 모형은 코너쪽으로 향한 이차유동에 기인하여 속도에 대한 등고선이 코너쪽을 향해 만곡된 형상을 나타내는 실험결과^{(1), (3)-(5)}를 잘 재현하고 있으나, SZL 모형은 난류의 비등방성을 전혀 고려하지 않는 선형(등방) 모형의 결과와 거의 유사한 예측결과를 나타내고 있다.

Fig. 4는 벽면 및 코너 이등분선상에서의 주방향 전단응력 분포를 보여주고 있다. MK 모형 및 SP 모형은 실험결과^{(1), (3)-(5)}를 정성적 및 정량적으로 상당히 잘 재현하고 있으나, SZL 모형은 이차유동으로 인해 변화하는 양상을 제대로 예측하지 못하고, 선형모형의 결과와 거의 유사하다. Fig. 3과 Fig. 4의 결과를 종합적으로 볼 때, 속도 분포를 정확히 예측할 경우, 통상적인 선형모형의 형태와 동일한 주 레이놀즈 전단응력에 대한 식 (12)의 표현이 타당함을 알 수 있다.

Fig. 5는 이차유동 생성에 중요한 역할을 하는

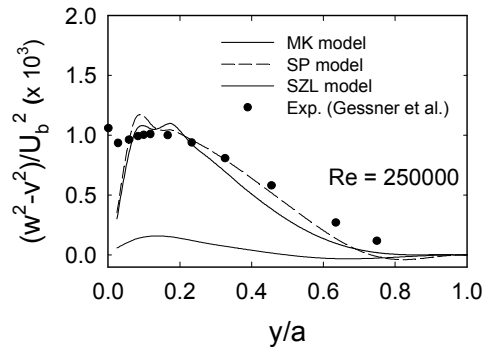


Fig.5 Predicted anisotropy between secondary normal stresses (along the wall bisector).

것으로 알려져 있는 이차적인 수직응력에 대한 차 $\overline{w^2} - \overline{v^2}$ 의 벽면 이등분선상에서의 예측결과를 나타낸다. MK 모형 및 SP 모형은 실험결과^{(1), (3)-(5)}와 비교적 잘 일치하고 있어, 식 (15)의 적합성을 간접적으로 입증해 주고 있으나, SZL 모형은 실험결과에 비해 한 차수 작게 예측하고 있다. 또한, 세 모형 모두 정성적으로 유사한 이차유동의 분포 형태(그림 생략)를 보여 주고 있으나, 정량적으로는 크게 차이를 나타내고 있다. 즉, MK 모형 및 SP 모형이 이차유동 속도크기의 최대값을 축방향 평균속도의 약 1.3 % 정도로 예측하고 있는데 반해, SZL 모형은 0.15 %로 1.8%로 보고한 실험결과^{(4), (5)} 및 MK 모형에 비해 한 차수 작게 이차유동을 예측하고 있다. 결과적으로, SZL 모형은 이차적인 수직응력에 대한 차 및 이차적인 레이놀즈 전단응력(그림 생략)을 제대로 예측하지 못하기 때문에 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 너무 작게 예측하여 전술한 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도 및 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없다.

Fig. 6은 벽면 이등분선상에서의 난류에너지 및 주방향 수직응력 분포를 나타낸다. 난류에너지 분포에 대해 MK 모형 및 SP 모형은 실험결과^{(1), (3)-(5)}를 비교적 잘 재현하고 있으나, SZL 모형은 선형모형의 결과와 거의 유사한 예측을 보이고 있다. 그러나, 주방향 수직응력 분포에서는 MK 모형은 실험결과와 거의 유사하나, SP 모형은 실험결과와 상당한 차이를 나타내며, SZL 모형 및 선형모형과 유사하다.

이와 같이 SP 모형이 각각의 수직응력은 제대

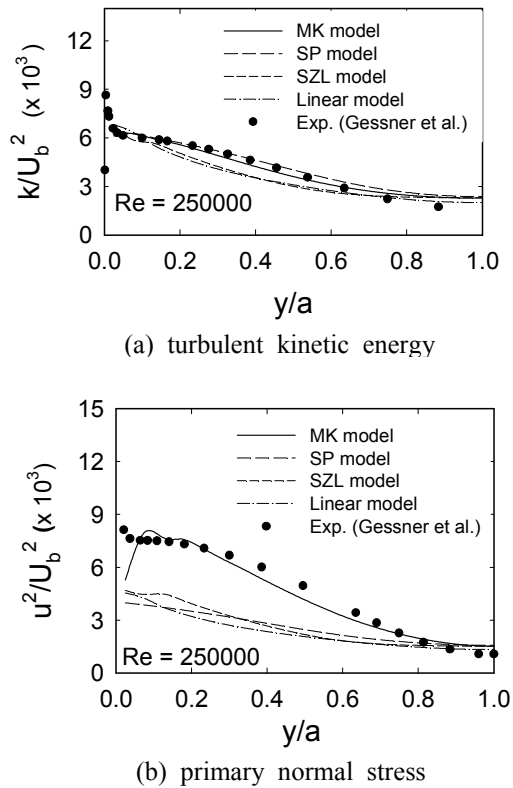


Fig.6 Predicted profiles of turbulent kinetic energy and primary normal stress (along the wall bisector).

로 예측하지 못하면서도 앞에서 기술한 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도 및 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 MK 모형과 거의 동등하게 예측하는 것은 다음과 같이 설명될 수 있다. 즉, 벽면 이등분선 상에서 속도구배로는 $\partial U/\partial y$ 만이 존재하므로 식 (9)부터 식 (11)에 각 모형의 모델상수를 대입해 보면 MK 모형은 $\overline{u^2} > \overline{w^2} > \overline{v^2}$ 로 난류수직응력에 대한 실험적 관계를 정확하게 나타내는데 반해, SP 모형은 $\overline{w^2} > \overline{u^2} = \overline{v^2}$ 로 실험적 사실과 모순된 결과를 나타낸다. 그러나, 식 (14) 및 식(15)의 우변 2번째 항의 계수값이 MK 모형에서는 -0.15이고 SP 모형에서는 -0.1512로 거의 동일한 값을 가지기 때문에, 이차유동 생성에 중요한 역할을 하는 것으로 알려진 식 (15)로 표현되는 이차적인 수직응력에 대한 차 및 식 (14)의 이차적인 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 의 항은 거의 일치하고 있다.

4. 결론

난류에 의해 야기되는 이차유동 예측에 대한 기존의 대표적인 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델에서의 레이놀즈응력과 변형을 사이의 관계인 비선형 난류모형을 이론적 고찰을 통해 정성적으로 평가하고, 정사각형 덕트유동에 적용하여 이들 비선형 난류모형의 예측성능을 정량적으로 평가하였다.

연구결과,

(1) MK 모형은 이차유동을 포함해 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 정성적 및 정량적으로 잘 예측하고 있다.

(2) SP 모형은 이차유동을 포함해 실험적으로 알려진 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도 및 레이놀즈전단응력에 대한 유동장의 변화를 잘 예측하고 있다. 그러나, SP 모형은 난류 수직응력의 각 성분에 대해 실험적 사실과 모순된 예측 결과를 주고 있다.

(3) 상용코드에 도입된 비선형 난류모형인 SZL 모형은 정성적으로 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 MK 모형, SP 모형 및 실험결과에 비해 한차수 이상 작게 예측하여 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없다.

참고문헌

- (1) Brundrett, E. and Baines, W.D., 1964, "The Production and Diffusion of Vorticity in Duct Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol.19, pp.375~394.
- (2) Perkins, H.J., 1970, "The Formation of Streamwise Vorticity in Turbulent Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol.44, pp.721~740.
- (3) Melling, A. and Whitelaw, J.H., 1976, "Turbulent Flow in a Rectangular Duct," *J. Fluid Mech.*, Vol.78, pp.289~315.
- (4) Gessner, F.B., Po, J.K. and Emery, A.F., 1979, "Measurement of Developing Turbulent Flow in a Square Duct," *Turbulent Shear Flows I* (ed. by Durst, et al.), Springer-Verlag, New York, pp.289~315.
- (5) Gessner, F.B. and Emery, A.F., 1981, "The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts," *Trans. ASME. J.*

- Fluids Engineering, Vol. 103, pp. 445~455.
- (6) Launder, B.E. and Ying, W.M., 1973, "Prediction of Flow and Heat Transfer in Ducts of Square Cross Section," *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol.187, pp.455~461.
- (7) Nakayama, A., Chow, W.L. and Sharma, D., 1983, "Calculation of Fully Development Turbulent Flows in Ducts of Arbitrary Cross-Section," *J. Fluid Mech.*, Vol.128, pp.199~217.
- (8) Demuren, A.O. and Rodi, W., 1984, "Calculation of Turbulent Driven Secondary Motion in Non-Circular Ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol.140, pp.189~222.
- (9) Speziale, C.G., 1987, "On Nonlinear $k-l$ and $k-\epsilon$ Models of Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol.176, pp.459~475.
- (10) Myong, H.K. and Kobayashi, T., 1991, "Prediction of Three-Dimensional Developing Turbulent Flow in a Square Duct with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Model," *ASME J. Fluids Engineering*, Vol.113, pp.608~615.
- (11) STAR-CD, 1999, Methodology Manual, Version 3.10, Computational Dynamics Ltd., pp.2.1~2.14.
- (12) Lee, K.B. and Jang, H.C., 1997, "A Numerical Prediction on the Turbulent Flow in Closely Spaced Bare Rod Arrays by a Nonlinear $k-\epsilon$ Model," *Nuclear Engineering and Design*, Vol.172, pp.351~357.
- (13) de Lemos, M.J.S. and Assato, M., 2002, "Simulation of Axial Flow in a Bare Rod Bundle using a Non-linear Turbulence Model with High Reynolds Approximation," *Proc. ICONE10*(10th Int. Conf. on Nuclear Eng.), ICONE10-22300, Arlington, VA, Apr. 14-18.
- (14) Shih, T.H., Zhu, J. and Lumley, J.L., 1993, "A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model," NASA TM-105993.
- (15) Myong, H.K. and Kasagi, N., 1990, "Prediction of Anisotropy of the Near-Wall Turbulence with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Turbulence Model," *ASME J. Fluids Engineering*, Vol.112, pp.521~524.
- (16) Craft, T.J., Launder, B.E. and Suga, K., 1996, "Development and Application of a Cubic Eddy-Viscosity Model of Turbulence," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.17, pp.108~115.
- (17) Myong, H.K., 2002, "Development of 3-D Convective Heat Transfer Analysis Program using Structured Grid System," (in Korean) Proc. KAMES 2002 Joint Symp. (KSME part), pp.2614~2619.
- (18) Myong, H.K., 2002, "Prediction of Fully Developed Turbulent Flow in a Square Duct with Nonlinear Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Models," submitted to *Trans. KSME*.