

비엇갈림 격자계에서 CIP법을 이용한 캐비티내의 유동해석

이정희[†]·강준*·임도균*·김찬중**

Analysis of the Flow in Square Cavity Using CIP Method in Non-staggered Grid Arrangement

Jung Hee Lee, Joon Kang, Dokiun Im and Charn Jung Kim

Key Words: CIP, Cavity flow, Non-staggered grid, Predictor-Corrector scheme, CFL condition

Abstract

In this study, we discuss CIP method, which can treat compressible/incompressible problem and multi-phase problem. We can apply this method to the general equations by using CCUP. In this paper, non-staggered grid arrangement and predictor-corrector method are used to enhance later development and the solution accuracy and convergence performance. To validate the numerical algorithm proposed in this paper, the two-dimensional unsteady flow in the driven cavity is simulated. The numerical results of this subject using the present algorithm are compared with other numerical results. As a result, it is proved that the present scheme gives stable and improved solutions, and the results even coarse grid are in good agreement with other result using a fine grid arrangement.

1. 서 론

컴퓨터 성능의 급속한 발달과 함께 열·유체 유동에 관한 수치해석 기법들도 과거에 비해 크게 향상되었다. 그럼에도 불구하고 다상열유동, 상변화유동, 상경계 이동에 관한 유동 및 급격한 밀도 변화를 나타내는 유동에서는 아직도 해석에 많은 어려움이 있다. 특히 상변화 현상은 상변화 과정에서 100에서 1000배에 이르는 급격한 밀도 변화를 수반하기 때문에 반드시 비압축성과 압축성 유동의 동시처리가 필요하다.

압축성과 비압축성 유동의 동시 처리를 처음 시도한 수치기법으로 Harlow와 Amsden⁽¹⁾의 ICE

(Implicit Continuous Eulerian)법을 들 수 있다. 지배방정식들을 보존형 형태로 유지하는 이 방법을 압축성과 비압축성 유동을 동시에 처리하기는 했으나 현재까지는 특별한 진보가 없이 개발단계에 머무르고 있다. 열유체유동 해석에 널리 이용되는 SIMPLE 방법은 비압축성과 압축성 유동을 동시에 처리하기 어려우며, 서로 다른 상경계가 이동할 경우에는 날카로운 경계면에서 수치확산이 발생하는 단점이 있어 다상열유동 및 상변화 현상을 해석하는 데는 부적합하다. 또한 유한체적법과 연계되어 사용되는 VOF(Volume of Fraction)법은 인접 검사체적 사이의 유동을 고려하지만 경계면의 처리과정이 복잡하여 3차원으로의 확장이 어렵고 기하학적으로 복잡할 경우 부정확한 결과를 나타내는 단점이 있다.

이러한 문제점을 해결하는 방안으로 Takewaki 등⁽²⁾은 쌍곡선 방정식의 해법에서 도입한 CIP(Cubic Interpolate Propagation) 기법을 개발하였다. CIP법은 열유동 방정식을 풀 때 가장 큰 오류를 발생하는 대류항을 3차 정확도를 나타내는 스플

[†]FunctionBay, Inc

E-mail : ljhsy21@hotmail.com

TEL : (02)880-1660

* 서울대학교 대학원 기계항공공학부

** 서울대학교 공과대학 기계항공공학부

라인 보간법을 사용함으로써 수치확산을 크게 줄일 수 있는 장점이 있다. 특히 날카로운 경계면에서 수치확산을 수반하는 다상 열유동 및 상변화 현상 해석에 적합하며 압축성과 비압축성 유동이 동시에 존재하는 유동에서도 해석 가능한 통합해법이라 할 수 있다. 또한 이 방법은 고정 격자계를 사용함으로써 이동 격자계를 사용하는 방법에 비하면 훨씬 더 알고리즘이 간단하고 특히 상경계에 대한 경계조건을 별도로 처리할 필요가 없는 장점이 있다. Yoon 등⁽³⁾은 엇갈림 격자계에서 Predictor-Corrector법을 사용한 CCUP방법을 이용하여 비압축성, 압축성 및 자유표면유동문제를 해석하였다. 하지만 엇갈림 격자계를 사용함으로써 인해 속도와 스칼라장의 저장 위치가 다름에 따라 경계조건 적용이 어렵고 비직교 격자계에서의 적용이 힘들고 특히 이 경우 3차원에서의 확장이 매우 어려운 단점이 있다.

따라서 본 연구에서는 엇갈림 격자계를 이용한 CIP법의 단점을 보완하기 위해 비엇갈림 격자계를 이용한 CIP법을 개발하고자 한다. 또한 압력 방정식을 풀 때 압력경계조건 적용에 어려움을 피하기 위하여 Predictor-Corrector 기법을 적용하여 경계조건을 용이하게 처리하고자 하며 본 해석 결과의 정확성을 검증하기 위해 Lid-Driven Cavity Flow 유동을 해석하고 이 결과를 기존 연구결과와 비교하고자 한다.

2. 수치이론

2.1 CIP법의 기본개념

CIP법은 쌍곡선형 방정식을 풀기 위한 기법으로 수치확산의 오류가 적고 다차원에서의 확장이 용이한 장점이 있다. 우선 CIP법의 간단한 원리를 설명하기 위해 1차원 파동방정식을 고려하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

CIP법은 Fig.1과 같이 x_i 와 x_{i+1} 사이를 하나의 다항식으로 보간하는 스플라인 보간법을 사용하고 있다. 식(1)의 파동 방정식에 대한 수치해는 c 가 거의 변화지 않도록 시간간격 Δt 를 충분히 짧게 잡으면, 격자점 x_i 에서 다음 시각 $t + \Delta t$ 에서의 함수값 ϕ_i^{n+1} 은 다음과 같이 구할 수 있다.

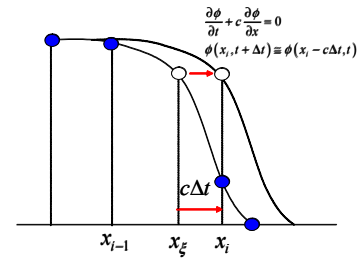


Fig.1 Principle of spline interpolation.

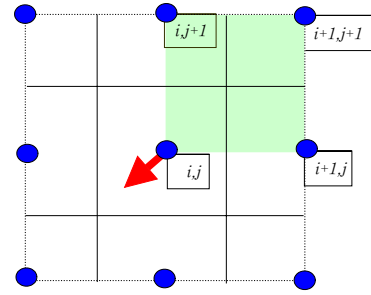


Fig.2 Non-staggered grid

$$\phi_i^{n+1} \equiv \phi(x_i, t + \Delta t) \equiv \phi(x_i - c\Delta t, t) = \phi_\xi^n \tag{2}$$

2.2 2차원 CIP법

1차원과 마찬가지로 2차원 파동방정식에 CIP법의 기본개념을 적용하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = G \tag{3}$$

$$F_{i,j}(x, y) = \left[(A1_{i,j}X + A2_{i,j}Y + A3_{i,j})X + A4_{i,j}Y + \partial_x \phi_{i,j} \right] X + \left[(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j})Y + \partial_y \phi_{i,j} \right] Y + \phi_{i,j} \tag{4}$$

Fig.2에서 $u < 0, v < 0$ 인 경우에 격자점 (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$ 에서의 ϕ , $\partial \phi / \partial x$, $\partial \phi / \partial y$ 를 이용하여 식(4)의 3차 스플라인 함수에서의 계수를 구하면 다음과 같다.

$$A1_{i,j} = \left[-2d_i + \partial_x (\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j}) \Delta x \right] / \Delta x^3$$

$$A2_{i,j} = \left[A8_{i,j} - \partial_x d_j \Delta x \right] / \Delta x^2 \Delta y$$

$$A3_{i,j} = \left[3d_i + \partial_x (\phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j}) \Delta x \right] / \Delta x^2$$

$$\begin{aligned}
 A4_{i,j} &= [-A8_{i,j} + \partial_x d_j \Delta x + \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y \\
 A5_{i,j} &= [-2d_j + \partial_y (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}) \Delta y] / \Delta y^3 \\
 A6_{i,j} &= [A8_{i,j} - \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y^2 \\
 A7_{i,j} &= [3d_j - \partial_y (\phi_{i,j+1} + 2\phi_{i,j}) \Delta y] / \Delta y^2 \\
 A8_{i,j} &= \phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $\Delta x = xc_{i,j} - xc_{i+1,j}$, $\Delta y = yc_{i,j} - yc_{i,j+1}$
 $d_i = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$, $d_j = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}$

2.2.1 대류단계

대류단계에서는 전 시간단계에서 구한 $\phi_{i,j}^n$, $\partial_x \phi_{i,j}^n$, $\partial_y \phi_{i,j}^n$ 를 CIP법을 이용하여 $\phi_{i,j}^*$, $\partial_x \phi_{i,j}^*$, $\partial_y \phi_{i,j}^*$ 를 구할 수 있다.

2.2.2 비대류단계

대류단계에서는 비대류단계 구한 $\phi_{i,j}^*$, $\partial_x \phi_{i,j}^*$, $\partial_y \phi_{i,j}^*$ 를 이용하여 $\phi_{i,j}^{n+1}$, $\partial_x \phi_{i,j}^{n+1}$, $\partial_y \phi_{i,j}^{n+1}$ 를 다음과 같이 계산한다.

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^* + G_{i,j} \Delta t \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_x \phi_{i,j}^{n+1} &= \partial_x \phi_{i,j}^* \\
 &\quad - \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1} - \phi_{i+1,j}^* + \phi_{i-1,j}^*}{2\Delta x} \\
 &\quad - \partial_x \phi_{i,j}^* \frac{(u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*) \Delta t}{2\Delta x} \\
 &\quad - \partial_y \phi_{i,j}^* \frac{(v_{i+1,j}^* - v_{i-1,j}^*) \Delta t}{2\Delta x}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_y \phi_{i,j}^{n+1} &= \partial_y \phi_{i,j}^* \\
 &\quad - \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i+1,j-1}^{n+1} - \phi_{i+1,j}^* + \phi_{i+1,j-1}^*}{2\Delta y} \\
 &\quad - \partial_x \phi_{i,j}^* \frac{(u_{i,j+1}^* - u_{i,j-1}^*) \Delta t}{2\Delta y} \\
 &\quad - \partial_y \phi_{i,j}^* \frac{(v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*) \Delta t}{2\Delta y}
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.3 CCUP(CIP-Combined Unified Procedure)법

CCUP법은 CIP법을 일반적인 열유체방정식에 적용하기 위한 범용해법이다. 연속방정식, 운동량 방정식 및 에너지방정식을 일반적인 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{Q}_u \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho c_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{11}$$

여기서 \mathbf{Q}_u 항은 점성력이나 중력, 부력과 같은 부가항이다.

CCUP법에서는 지배방정식을 대류단계와 비대류단계로 분리하여 계산한다. 대류단계는 3차 스플라인함수를 사용한 CIP법을 이용하여 계산하며, 비대류단계는 일반적인 차분법을 통해 수행된다. 본 연구에서는 대류항을 먼저 수행한 다음 비대류항을 계산한다.

대류항

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \rho^n = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = 0 \tag{13}$$

$$\frac{p^* - p^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^n = 0 \tag{14}$$

식(12), (13)과 (14)의 방정식을 CIP법을 이용하여 ρ^* , \mathbf{u}^* , p^* 를 구한다.

비대류항

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \tag{15}$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*} + \mathbf{Q}_u^* \tag{16}$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} = -\rho^* c_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \tag{17}$$

위 식에서 비대류 단계에서의 방정식을 보면 압력과 속도항이 $n+1$ 시간단계의 값이기 때문에 직접계산이 불가능하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 연구에서는 Predictor-Corrector법을 도입하였다. 예측 단계에서는 양함수법을 도입하여 계산을 수행하며, 수정단계에서는 예측 단계에서의 값을 이용해 계산을 수행한다. 예측 단계에서의 운동량방정식은 대류 단계후의 값들 이용하여 계산하게 된다.

예측단계

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^*}{\rho^*} + \mathbf{Q}_u^* \quad (18)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho^*} \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \right) = \frac{1}{\rho^* c_s^2 \Delta t^2} \delta p + \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (20)$$

여기서 $\delta p = p^{n+1} - p^*$

수정단계

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{\rho^*} \nabla \delta p \quad (21)$$

$$\rho^{n+1} = \rho^* - \rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \Delta t \quad (22)$$

$$p^{n+1} = p^* + \delta p \quad (23)$$

2.4 운동량 보간

본 연구에서는 비 엇갈림 격자배열를 사용함으로써 인해 발생하는 속도 Decoupling문제를 Rhie와 Chow⁽⁴⁾가 제시한 운동량 보간법을 이용하여 처리하였다. 검사체적 면에서의 속도는 식(18)를 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\tilde{u}_e - u_e^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{p_E^* - p_P^*}{x_E - x_P} + Q_u^* \Big|_e \quad (24)$$

2.5 압력수정방정식의 경계조건

식(19)로부터 e 경계면에서의 속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{u_e^{n+1} - \tilde{u}_e}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \Big|_e \quad (25)$$

이를 u_e^{n+1} 에 대해 정리하면,

$$u_e^{n+1} = \tilde{u}_e - \frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \Big|_e \Delta t \quad (26)$$

따라서 e면에 속도가 주어진 경우에 \tilde{u}_e 는 u_e^{n+1} 로 대체되고 $\nabla \delta p \Big|_e / \rho^* \Delta t$ 는 제거되어야 한다. 즉, e면에서의 계수항 a_E 를 0로 두면 된다.

3. 수치해석결과

3.1 해석모델과 경계조건

본 연구에서는 비엇갈림 격자계와 Predictor-Corrector법을 적용한 개선된 CCUP방법을 개발하였으며 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 Lid-driven Cavity Flow 문제를 계산하여 Ghia 등⁽⁵⁾의 결과와 비교하였다.

Fig.3과 같은 형상에서 무차원화된 속도 u 가 1로 움직이는 문제를 비정상유동으로 해석하였다. Fig.4는 각각 50×50 의 균일·비균일 격자계를 나타내고 있다. 본 연구에서는 격자생성의 효율성을 위해 프로그램을 비균일 격자에서도 적용이 가능하도록 하였다.

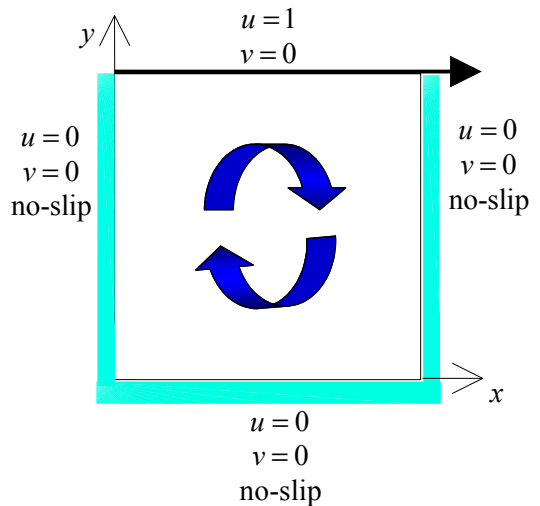
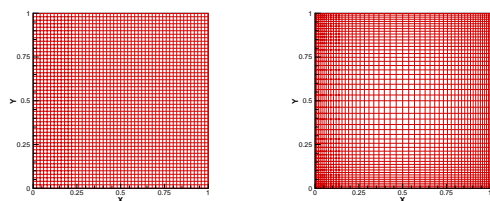


Fig.3 Model for lid-driven cavity.



(a) uniform (b) non-uniform

Fig.4 Grid arrangement.

3.2 유동분포

Fig.5과 6은 $Re=1000$ 에서 균일 격자에서 계산된 속도와 압력분포를 나타낸 결과이다. Fig.7은 Re 수가 1000이고 $CFL=0.2$ 이며 50×50 의 균일 격자계에서 시간 변화에 따른 내부유선의 변화를 나타낸 그림이다. 시간이 증가에 따라 점성에 의한 전단력에 의하여 재순환영역이 발생하고 서서히 내부로 전파됨에 따라 재순환영역이 확대됨을 보이고 있다. 유동이 점점 더 발달함에 따라 우측하단에 재순환영역이 형성되고 서서히 좌측하단에도 재순환영역이 나타남을 보여주고 있다.

3.3 유동의 검증

Fig.8~12는 본 유동의 해석 결과를 검증하기 위해 Re 수가 각각 400, 1000, 3200, 5000, 10000에 대해 CCUP법을 이용하여 계산한 결과와 256 X 256인 격자에서 계산한 Ghia 등⁽⁵⁾의 결과를 비교한 것이다. 모든 경우에 두 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. CIP법은 작은 격자수로도 정확한 결과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

Fig.13은 비균일 격자에서 본 해석 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 50×50 격자계에서 Re 수 1000인 경우에 대해 Ghia 등⁽⁵⁾의 결과와 비교한 것이다. 비균일 격자에서도 잘 일치함을 볼 수 있다.

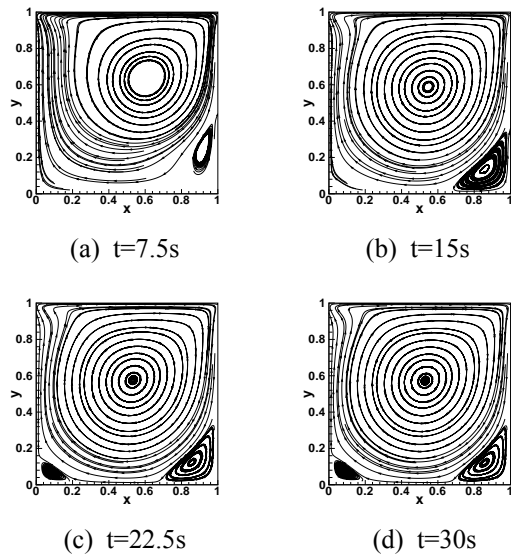


Fig.7 Streamlines for uniform grid.

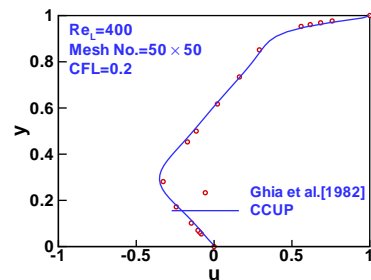


Fig.8 Comparison of velocity profiles at $Re=400$.

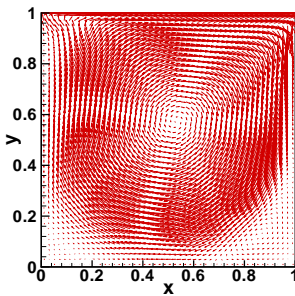


Fig.5 Velocity distribution for uniform grid.

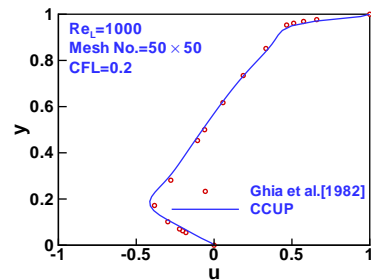


Fig.9 Comparison of velocity profiles at $Re=1000$.

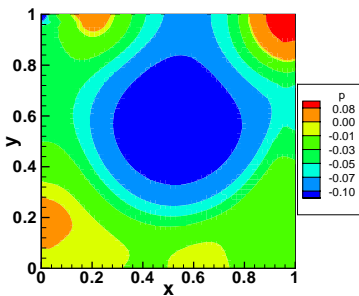


Fig.6 Pressure contours for uniform grid.

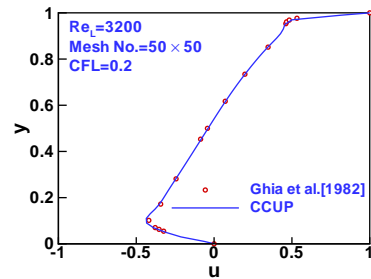


Fig.10 Comparison of velocity profiles at $Re=3200$.

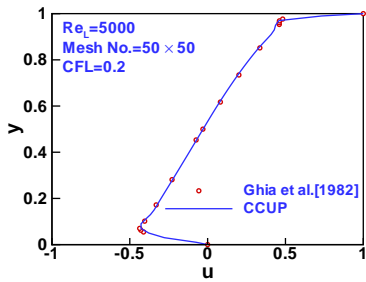


Fig.11 Comparison of velocity profiles at Re=5000.

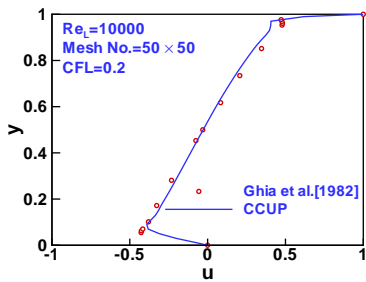


Fig.12 Comparison of velocity profiles at Re=10000

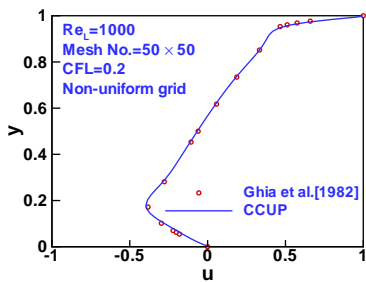


Fig.13 Comparison of velocity profiles at Re= 1000 for non-uniform grid.

4. 결 론

본 연구에서는 기존의 2차원 CIP법에 비엇갈림 격자배열과 Predictor-Corrector법을 적용하여 새롭게 개선된 해법을 제시하였다. 개발된 프로그램의 검증은 위하여 Lid-Driven Cavity 문제를 계산하였으며 기존 연구결과와 잘 일치함을 보여 주었다. 비 엇갈림 격자배열을 사용함으로써 향후 비직교 격자계와 3차원으로의 확장이 용이할 것으로 판단된다. Predictor-Corrector법을 사용함으로써 인하여 압력수정방정식에 대한 경계조건을 명확히 처리할 수 있었다. 특히 상대적으로 적은 격자를 사용하고도 정확성을 높일 수 있었고 계산

시간도 상당히 줄일 수 있었다.

향후 본 프로그램을 좀 더 확장하여 자유표면, 상변화 유동 및 압축성, 비압축성 문제를 통합 해석할 수 있는 프로그램을 개발하고자한다. 또한 시간간격에 영향을 받는 문제점을 해결하고 3차원 비직교 좌표계로의 확장을 통해 응용범위를 넓히고자 한다.

후 기

본 연구는 서울대학교 BK 기계분야사업단의 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사드리는 바입니다.

참고문헌

- (1) F. H. Harlow and A. A. Amsden, 1968, Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow, J. Comput. Phys., Vol.3, pp.80~93.
- (2) H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, 1985, Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP), for Solving Hyperbolic-type Equations, J. Comp. Phys, Vol.61, pp.261~268.
- (3) S. Y. Yoon, T. Yabe, 1999, The Unified Simulation for Incompressible and Compressible Flow by the Predictor-corrector Scheme based on the CIP method, Comput. Phys. Communications, Vol.119, pp.149~158.
- (4) C. M. Rhie and W. L. Chow, 1983, A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation, AIAA, Vol.21, pp.1525~1532.
- (5) U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, 1982, High-resolution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Comput. Phys, Vol.48, pp.387~411.