경계층 유동에서 입자확산의 예측을 위한 라그랑지안 확률모델

김병구† ·이창훈*

A New Lagrangian Stochastic Model for Prediction of Particle Dispersion in Turbulent Boundary Layer Flow

Byunggu Kim, Changhoon Lee

Key Words: Elliptic relaxation(타원완화법), Lagrangian Stochastic Model(라그랑지안 확률모델), Particle Dispersion(입자확산).

Abstract

A new Lagrangian stochastic dispersion model is developed by combining the GLM(generalized Langevin model) and the elliptic relaxation method. Under the physically plausible assumptions a simple analytical solution of elliptic relaxation is obtained. To compare the performance of our model with other model, the statistics of particle velocity as well as concentration are investigated. Numerical simulation results show good agreement with available experimental data.

기호설명

ν kinematic viscosity.
W_i Wiener process.
U_i instantaneous velocity of particle.
p pressure.
ε turbulent dissipation rate.
k turbulent kinetic energy.
C_0 Kolmogorov constant
C_1, C_2, γ_5 model constant.
L length scale.
u_τ wall shear velocity.
$\varkappa$ Karman constant.
y_0 roughness length.
δ boundary layer thickness.
h_s height of line source.
c dimensionless concentration.

† 연세대학교 대학원
E-mail : kbg73@yonsei.ac.kr
TEL : (02)2123-2811
* 연세대학교 기계공학과
E-mail : clee@yonsei.ac.kr

1. 서 론

대기질 예측은 환경분야에서 가장 중요한 분야 중의 하나라고 할수 있다. 대기중 오염물질의 확산 예측을 위하여 전통적으로 가우시안 플륨모델, 퍼프모델등이 사용되어져 왔다. 그러나 이들 모델은 많은 부분이 경험식에 의존할뿐 아니라 오염물질 확산에 중요한 역할을 하는 유동의 비균질성 및 비등방성 효과의 고려가 부족한 단점이 있다. 따라서 이러한 모델에 의한 확산예측은 필연적으로 정확도가 낮을 수 밖에 없지만 어느 정도 근사한 결과를 보여주고 있으며 모델의 단순한 장점과 컴퓨터 성능에 의한 제약을 비교적

적게 받기 때문에 현재까지도 사용되고 있다. 대기경계층과 같은 고 레이놀즈수의 유동에서 라그랑지안 확률 모델은 입자확산을 예측하기 위한 더 정확한 모델로 알려져 있으나[1] 입자 각각의 속도와 위치를 구해야 하기 때문에 많은 계산량과 데이터 처리를 필요로 하는 단점이 있었으나 최근에 들어서는 많은 연구가 진행되었다. Thomson[1]은 확률모델의 타당성을 판별하기 위한 기준인 균질혼합조건(well-mixed condition)을 제시하였다. Thomson, Kurbanmuradov 와 Sabelfeld[2], Reynolds[3,4] 등의 모델은 균질혼합조건을 만족하는 모델들이다. 즉, 유동장의 확률밀도함수를 물리적 타당성을 지니도록 가정하면 Fokker-Plank방정식을 만족하는 라그랑지안 가속도를 구할수 있다. 그러나 2차원 이상인 경우 Fokker-Plank 방정식을 만족하는 해가 무수히 존재하게 되므로, 균질혼합조건이 라그랑지안 확산모델을 결정하기 위한 완전한 기준을 제시하는 것은 아니다. 한편 Pope[7]에 의해 난류유동의 해석에도 라그랑지안 기법이 도입되었으며 레이놀즈수가 낮긴 하지만 평판유동에 적용하여 성공적인 결과를 얻어내었다. 본 연구에서는 Pope의 라그랑지안 난류모델인 GLM(generalized Langevin model)[12]과 타원완화법(elliptic relaxation)[3]을 사용하여 확산모델을 개발하였다. 주유동방향과 수평방향으로 균질한 경계층 유동은 단순한 형태를 지니나 대기경계층에서 실제 흔히 나타나는 현상이기 때문에 실제 대기현상으로 간주 할 수 있으며, 경계층 유동에서 일반적으로 적용할 수 있는 상사성을 적용하여 타원완화모델의 특수해를 구할 수 있으로 모델의 단순화까지 이룰 수 있는 장점있다. 또한, 경계층 유동에서 얻어진 확산실험결과도 많이 존재한다. 본 연구에서는 모델의 결과를 Raupach 와 Legg [9]의 실험결과와 비교하였다.

2. 확산모델

2.1 지배방정식 및 모델

입자의 속도는 다음과 같이 평균속도와 섭동량의 합으로 표현할 수 있다.

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i \tag{1}$$

위 식에서 〈・〉는 입자 위치에서의 Eulerian 평균값을 의미한다. 라그랑지안입자의 시간 dt 동안의 위치변화는 다음과 같다.

$$dx_i = U_i dt \tag{2}$$

고레이놀즈수의 유동에서는 점성의 영향을 무시할 수 있으므로 입자의 속도는 GLM을 사용하면 다음과 같이 주어진다.

$$du_i = G_{ij} u_j dt + \sqrt{C_0 \varepsilon} dW_i \tag{3}$$

dW_i는 Wiener process의 증분이며 평균이 0이고 분산이 dt인 Gaussian 분포에서 추출한 값이다. G_{ij}는 비등방성텐서이며 다음과 같다[7].

$$G_{ij} = \frac{g_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon\delta_{ij}}{k} \tag{4}$$

유동의 non-local 효과를 나타내기 위하여 g_{ij}를 다음과 같은 타원완화법으로 모델링한다.

$$g_{ij} - L_D^{(2-p-q)} \nabla \cdot \left[L_D^p \nabla \left(L_D^q g_{ij} \right) \right] = \overline{g_{ij}} \tag{5}$$

p, q를 도입함으로서 g_{ij} 모델을 일반적인 형태로 표현할 수 있다. g_{ij}의 non-local 효과는 두번째 항으로 인해서 나타난다.

$\overline{g_{ij}}$는 다음과 같은 local 모델이다.

$$\overline{g_{ij}} = \frac{1 - C_1}{2}\varepsilon\delta_{ij} + kH_{ijkl}\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_l} \tag{6}$$

H_{ijkl}은 레이놀즈 응력의 비등방성을 나타내기 위한 4차 텐서이다.

$$H_{ijkl} = \left(C_2 + \frac{1}{3}\gamma_5\right)\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\gamma_5\delta_{il}\delta_{jk} + \gamma_5 b_{ik}\delta_{jl} - \gamma_5 b_{il}\delta_{jk} \tag{7}$$

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\langle u_k u_k \rangle} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{8}$$

길이스케일은 벽근처에서 Kolmogorov scale 보다 작아지는 것을 방지하기 위하여 다음과 같이 사용한다.

$$L = C_L \max\left[\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right] \tag{9}$$

2.2 타원완화모델의 특수해

g_{ij}를 수치해석적으로 구하기 위해서는 편미분방정식을 풀어야 하므로 많은 계산량 요구되지만 경계층 유동의 벽면 근처에서 가정할 수 있는 self similarity를 적용하면 g_{ij}의 특수해를 구할 수 있다. 이렇게 함으로서 모델을 단순화 할 수 있고 계산비용을 감소시킬 수 있는 장점이 있을 뿐

만 아니라 타원완화법을 풀기 위해 필요한 경계조건이 제거된다는 장점이 있다. 유동장은 거친 바닥위의 경계층 유동에서 일반적으로 적용할 수 있는 다음관계식을 사용한다.

$$\langle U(y)\rangle = \frac{u_\tau}{\kappa}\ln\frac{y}{y_0} \tag{10}$$

$$\varepsilon(y) = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \tag{11}$$

$$\langle u^2\rangle = a^2 u_\tau^2 \tag{12}$$

$$\langle v^2\rangle = b^2 u_\tau^2 \tag{13}$$

$$\langle w^2\rangle = c^2 u_\tau^2 \tag{14}$$

$$\langle uv\rangle = -u_\tau^2 \tag{15}$$

사용된 상수의 값은 다음과 같다.

$a=2.5,\ b=1.25,\ c=2.0,\ \kappa=0.41$

위의 관계식에 의하여 $\overline{g_{ij}} \sim y^{-1}$, $L \sim y$의 관계가 얻어지며 식(6)에 사용하면 다음과 같이 y^{-1}에 비례하는 g_{ij}의 특수해가 얻어진다.

$$g_{ij} = \frac{\overline{g_{ij}}}{R} \tag{16}$$

$$R = 1 - C_L^2\kappa^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^3 \times (q-1)(p+q-2) \tag{17}$$

p, q에 의해 해의 형태가 바뀌게 되지만 다른 상수의 조합을 통해 동등한 해가 됨을 알 수 있다. 따라서 $p=0$, $q=1$를 선택하면 $R=1$이며 길이척도 L의 필요성이 제거될뿐만 아니라 g_{ij}의 해는 단순하게 local-model이 된다. 즉,

$$g_{ij} = \overline{g_{ij}} \tag{18}$$

Table 1. Constraint of constants

fixed quantity	Constraint
$\langle u^2\rangle, \langle v^2\rangle$	$C_1 = \frac{k}{b^2 u_\tau^2} C_0$ $C_2 = -\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\frac{C_0}{2}$
$\langle uv\rangle, \langle v^2\rangle$	$C_1 = \frac{k}{b^2 u_\tau^2} C_0$ $C_2 = -\frac{1}{b^4} C_0$

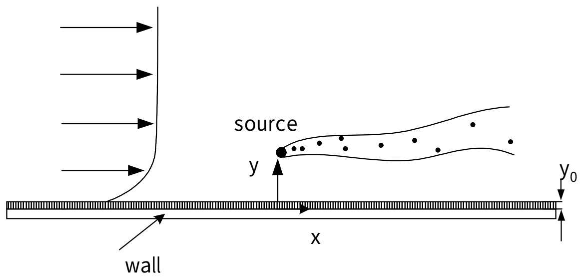

Figure 1. Schematic diagram of computational domain.

2.3 상수 C_1, C_2의 구속조건

모델링된 라그랑지안 입자의 속도 u^*에 대하여 GLM으로 표현하면

$$du_i^* = G_{ij}u_j^* dt + \sqrt{C_0\varepsilon}\,dW_i \tag{19}$$

여기서 G_{ij}와 ε은 self-similarity 식 (10) ~ (15)에 의해 결정된다. 따라서 모델의 레이놀즈응력은 주어진 식 (12) ~ (15)를 만족해야 한다. 식 (19)에 속도성분을 곱하면

$$\frac{d\langle u_i u_j\rangle^*}{dt} = G_{ik}\langle u_j u_k\rangle^* + G_{jk}\langle u_i u_k\rangle^* + C_0\varepsilon\delta_{ij} \tag{20}$$

$\langle u_i u_j\rangle^*$는 모델의 레이놀즈 응력이다. 이 모델에서 입자 속도의 섭동량만 고려하고 있기 때문에 생성항은 무시되었다.

모델이 $\langle u^2\rangle^* = \langle u^2\rangle, \langle v^2\rangle^* = \langle v^2\rangle, \langle uv\rangle^* = \langle uv\rangle$을 만족한다면 다음과 같은 첫 번째 구속조건을 얻을 수 있다.

$$-\frac{1}{k}C_1\varepsilon\langle u^2\rangle + 2C_2\frac{d\langle U\rangle}{dy}\langle uv\rangle + C_0\varepsilon = 0 \tag{21}$$

$$-\frac{1}{k}C_1\varepsilon\langle v^2\rangle + C_0\varepsilon = 0 \tag{22}$$

$$-\frac{1}{k}C_1\varepsilon\langle uv\rangle + C_2\frac{d\langle U\rangle}{dy}\langle v^2\rangle = 0 \tag{23}$$

조작과정중 γ_5가 제거되었음에 유의하여야 하는데, 이는 γ_5가 레이놀즈 응력의 재분포에 관여하지 않는다는 것을 의미한다. 위 관계식을 만족하는 C_1, C_2, C_0는 모두 0으로서 의미가 없는 해이다. 따라서 세 레이놀즈 응력을 모두 만족하는 상수는 존재하지 않는다. 그러나, 두 방향의 레이놀즈 응력만을 만족하는 상수들의 구속조건은 찾을 수 있다. $\langle v^2\rangle^* = \langle v^2\rangle$, $\langle uv\rangle^* = \langle uv\rangle$를

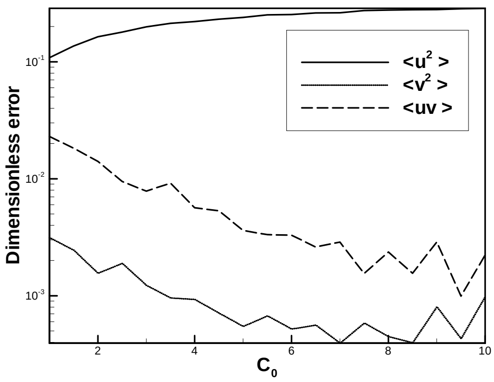

Figure 2. Dimensionless error defined by $\int[\langle u_i u_j\rangle-\langle u_i u_j\rangle_{exact}]^2 dy / \int\langle u_i u_j\rangle^2_{exact}dy$.

만족한다고 가정하면, 두 번째 조건은

$$-\frac{1}{k}\ C_1\varepsilon\langle u^2\rangle+2C_2\frac{d\langle U\rangle}{dy}\langle uv\rangle+C_0\varepsilon-\gamma_5 \times\frac{uv}{k}\ \frac{d\langle U\rangle}{dy}(\langle u^2\rangle^*-\langle u^2\rangle)=0 \qquad (24)$$

$$-\frac{1}{k}C_1\varepsilon\langle v^2\rangle+C_0\varepsilon=0 \qquad (25)$$

$$-\frac{1}{k}\ C_1\varepsilon\langle uv\rangle+C_2\frac{d\langle U\rangle}{dy}\langle v^2\rangle-\frac{\gamma_5}{2k}\ \langle v^2\rangle \times\frac{d\langle U\rangle}{dy}(\langle u^2\rangle^*-\langle u^2\rangle)=0 \qquad (26)$$

$\langle u^2\rangle^*\neq\langle u^2\rangle$ 이므로 $\langle uv\rangle^*$가 주어진 값으로 유지되기 위해서 $\gamma_5=0$이어야 한다.

또 다른 조건으로 $\langle u^2\rangle^*=\langle u^2\rangle$, $\langle v^2\rangle^*=\langle v^2\rangle$ 도 가능하나 이 연구에서는 두 번째 조건이 가장 좋은 결과를 보였으므로 마지막 조건은 생략한다. 단 이 경우에도 $\gamma_5=0$ 이어야 한다. 이로부터 단순화된 확산모델을 얻을 수 있다.

$$du=\left(-\frac{1}{2k}\ C_1\varepsilon u+C_2\frac{d\langle U\rangle}{dy}\ v\right)dt+\sqrt{C_0\varepsilon}dW_1 \qquad (27)$$

$$dv=-\frac{1}{2k}\ C_1\varepsilon v dt+\sqrt{C_0\varepsilon}dW_2 \qquad (28)$$

이 후의 모든 결과는 조건 2를 사용한 것이다. 그림 2는 $x/h_s=30$에서 레이놀즈 응력의 무차원 오차를 C_0의 대하여 나타낸 것이다. 주유동방향의 오차를 제외하고 상당히 작은 오차를 보이고 있다. 확산모델의 결과로부터 C_0=4인 경우 가장 좋은 선택임을 알 수 있었다.

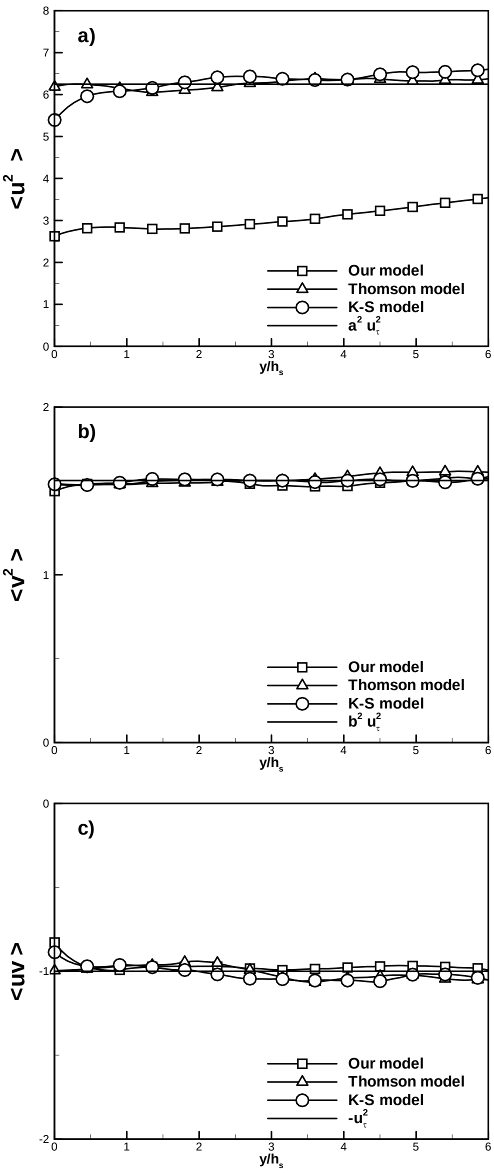

Figure 3. A comparison of Reynolds stress of our model with other model at $x/h_s=30$.

3. 수치계산 및 결과

본 연구에서는 식(2),(3)를 적분하기 위하여 Runge-Kutta 3차의 방법을 사용하였다. 부력의 영향이 없는 경계층 유동에서 높이 h_s의 선방출원에서 입자가 방출되고 있으며 z방향으로의 길이는 무한하다. 벽에 부딪힌 입자는 완전 탄성 충돌한 것으로 간주하였다. 벽면에서의 충돌조건의 영향을 최소화하기 위하여 Δt는 벽에서의 거리에 비례하도록 하였다.

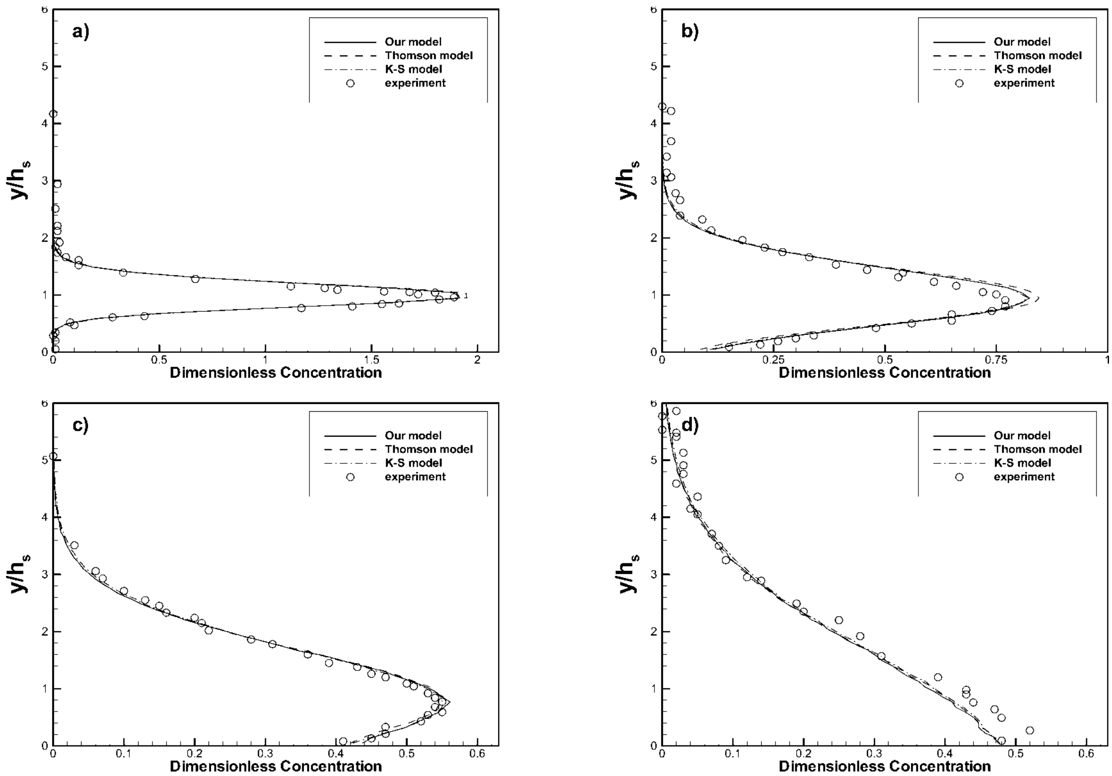

Figure 4. Dimensionless concentration at four locations: (a) $x/h_s = 2.5$; (b) $x/h_s = 7.5$; (c) $x/h_s = 15$; (d) $x/h_s = 30$ compared with experimental data (Raupach and Legg, 1983).

$$\Delta t = \alpha T_L$$

라그랑지안 시간척도 T_L은 $2\langle v^2\rangle^{1/2}/C_0\varepsilon$로 정의되며 α는 0.02이면 충분하였다. Figure 1은 본 연구에서 사용한 전체 계산 영역을 도식화한 것이다. 자세한 수치는 아래와 같다.

$$y_0 = 2\times 10^{-4} m$$

$$h_s = 0.111 m$$

$$\delta = 1 m$$

$$u_\tau = 1 m/\sec$$

$$\kappa = 0.41$$

Figure 3에 $x/h_s = 30$인 곳에서 모델들의 레이놀즈 응력을 비교하였다. Thomson과 K-S모델은 $\langle u^2\rangle$, $\langle v^2\rangle$, $\langle uv\rangle$ 모두 주어진 값과 잘 일치하고 있다. 반면 본 모델은 $\langle u^2\rangle$에서 큰 차이를 보이고 있으나 이것은 앞에서 이미 예측된 결과이다. $\langle v^2\rangle$, $\langle uv\rangle$은 정확한 값과 잘 일치하고 있다.

그림 4에 x/h_s=2.5, 7.5, 15, 30인 곳에서 구한 무차원 평균 농도 c를 나타내었다.

$$c = \frac{\bar{c}}{c^*}$$

$\bar{c}$: 평균농도

$$c^* = \frac{Q}{h_s\langle U(h_s)\rangle}$$

Q : 선방출원의 단위길이당 강도

$\langle U(h_s)\rangle$: 방출원 위치에서 유동의 평균속도

입자들이 방출된 직후인 $x/h_s = 2.5$에서는 모든 모델들의 예측이 정확하게 맞는 것을 볼 수 있다. $x/h_s = 7.5$인 위치에서는 모든 모델의 최고농도의 예측값이 실험값보다 높게 나타나며 그 위치가 실험값을 약간 비켜감을 보인다. $x/h_s = 15$에서는 모든 모델의 결과와 실험값이 잘 일치하고 있으며, $x/h_s = 30$에서는 벽근처에서의 예측값이 낮게 나타난다. 전반적으로 모든 모델들의 성능은 양호한 것으로 나타났다.

4. 결 론

부력의 영향이 없는 경계층유동에서 입자의 확산을 예측하기 위하여 라그랑지안 확산 모델을 개발하였다. 벽면 근처의 난류의 비균질한 효과를 입자의 확산현상에 적용하기 위하여 라그랑지안 난류모델인 GLM 및 타원완화법을 이용하였다. 경계층유동에서 적용할수 있는 상사성을 사용하여 타원완화법의 특수해를 구함으로써 수치계산에 드는 노력을 감소시킬 수 있었을 뿐 아니라 많은 모수들이 제거되어 C_0 만으로 표현되는 모델을 얻을 수 있었다. 본 모델의 특성상 주유동방향의 레이놀즈 응력이 주어진 값과 일치하지 않았으나, 예측된 농도분포는 실험 결과와 잘 일치하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 특정기초연구사업 (R01-2000-000-00306-0) 연구비에의해 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Thomson, D. J., 1987, "Criteria for the selection of stochastic models of particle trajectories in turbulent flows," *J. Fluid Mech.* Vol. 180, pp. 529-556

(2) Kurbanmuradov, O., and Sabelfeld, K., 2000, "Lagrangian Stochastic Models for Turbulent Dispersion in The Atmospheric Boundary Layer," *Boundary-Layer Meteorology*. Vol. 97, 191-218

(3) Reynolds, A. M., 1998, "On the Formulation of Lagrangian Stochastic Model of Scalar Dispersion within Plant Canopies," *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 86, pp. 333-344.

(4) Reynolds, A. M., 1998, "On Trajectory Curvature as a Selection Criterion for Valid Lagrangian Stochastic Dispersion Models," *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 88, pp. 77-86.

(5) Durbin, P. A., 1991, "Near-Wall Turbulence Closure Modeling Without 'Damping Functions'," *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* Vol. 3, pp. 1-13

(6) Dreeben, T. D., and Pope, S. B., 1997, "Pdf and Reynolds-stress modeling of near-wall turbulent flows," *Phys. Fluids.* Vol. 9, 154-163

(7) Dreeben, T. D., and Pope, S. B. 1998, "Pdf/Monte Carlo simulation of near-wall turbulent flows," *J. Fluid Mech.* Vol. 357, pp. 141-166.

(8) Wizman, V., Laurence, D., Kanniche, M., Durbin, P. A., and Demuren, A., 1996, "Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp 255-266

(9) Raupach, M. R., and Legg, B. J. 1983, "Turbulent dispersion from an elevated line source," *J. Fluid Mech.* Vol. 136, 111-137

(10) Pope, S. B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, 2000.

(11) Pope, S. B., 1994, "On the relationship between stochastic Lagrangian models of trubulence and second-moment closures," *Phys. Fluids*. 6, 973-985

(12) Haworth, D. C., and Pope, S. B., 1986, "A Generalized Langevin Model for Turbulent Flows," *Phys. Fluids*, Vol. 29, pp. 387-405.