

# 전단유동에서 입자의 운동

조성기\* · 이창훈\*\*

## Migration of a heavy particle in uniform shear flow

SeongGee Cho, Changhoon Lee

**Key Words:** Saffman lift force(사프만 양력), shear flow(전단유동), Stokes flow, wall(벽)

### Abstract

The motion of a small, heavy rigid particle in the shear flow on a stationary wall is investigated in the context of Stokes flow. The lift force proposed by Saffman(1965) and later modified by Mclaughlin(1991) and Mei(1992) is considered in the prediction of the particle motion far away from the wall. Later, the expression of the lift force is modified to take into account the effect of wall(Cherukat and Mclaughlin, 1994). In the analysis the gravity and buoyancy effect are also taken into account. An analytical and numerical results for the terminal velocities and trajectories of the particle after the enough lapse of time are presented.

### 1. 서론

전단유동 내에서의 입자의 운동은 자연계와 여러 공학 분야에서 많이 발견할 수 있다. 대기과 하수에서의 오염물질의 확산, 호흡기 계통에서의 먼지, 혈관 내에서의 백혈구와 같은 입자의 이동, 로켓의 연소 등이 그 예이다. 따라서 전단유동 내에서의 입자의 움직임을 조사하는 일은 산업 실험장비를 구축하는 분야나 수치적 모사를 하는 분야에 있어서 중요한 요소이다.

구형 모양의 입자가 전단유동 내에서 움직일 때 이 입자에는 양력과 항력이 작용하게 된다. 벽이 존재할 경우, 양력을 유발하는 것은 두 가지가 있는데 하나는 입자의 유동에 대한 상대적

인 속도 즉, slip velocity 에 의한 것과 벽에 의한 것이다(Ziskind et al, 1998). 또 입자가 어떤 방향으로 움직일 때 입자는 그 운동방향의 반대방향으로의 항력을 받게 된다. 일찍이 Stokes는 Reynolds 수가 낮을 때 구형의 입자가 어떤 속도를 가지고 유체 내를 움직일 때 받는 항력에 대해서 연구한 바가 있다. 이때 slip velocity 는 유체의 속도에 대한 입자가 움직이는 상대속도이다. Saffman (1965)은 전단유동 내에서의 작은 입자에 가해지는 양력에 대해서 조사했다. 그는 전단유동을 고려한 Reynolds number,  $Re_G$ 와 slip velocity를 고려한 Reynolds number,  $Re_s$ 를 가정했고, 그 범위를  $1 \gg Re_G \gg Re_s$  로 두었다.

Mclaughlin (1991)은 Saffman의 결과를  $Re_s$ 가  $Re_G$ 보다 작지 않은 경우에까지 확장해서 연구를 해서 양력에 대한 표현에 수정을 했다. Dandy and Dwyer (1992)는  $0.1 \ll Re_s \ll 100$  의 범위에서 구 모양의 입자들에 대해서 직접 수치모사를 수행했고, Mei(1992)는 이것을 바탕으로 위의 Mclaughlin의 결과에 대한 근사적인 표현을 얻어내었다.

Cox & Hsu (1977)는 벽이 있는 전단유동에서

† 연세대학교 대학원

E-mail : dean2358@hotmail.com

TEL : (02)2123-2846

\* 연세대학교 기계공학과

입자의 크기가 입자와 벽과의 거리에 비해서 상대적으로 아주 작다고 가정하고 양력에 대한 표현을 구했다. 그리고 Cherukat & Mclaughlin (1994) 은 입자의 크기가 입자와 벽과의 거리에 비교할 만 할때, 벽 근처를 평행하게 움직이고 있는 입자의 관성 양력에 대한 표현을 제시했다.

이 논문의 주요 목적은 전단유동 내에서 작은 입자가 움직이고 있을 때, 입자의 크기가 아주 작기 때문에 그 주위의 유동은 평형상태를 이룬다고 가정하고 그 때 입자에 걸리는 Stokes drag force와 Saffman lift force를 바탕으로 입자의 속도에 대한 정상해를 구하여, 그 결과를 Mclaughlin 과 Mei의 결과로 확장시켜서 입자 의 속도와 궤적에 대한 정보를 얻는 것이다. 이때 실제 유동장에서의 여러 가지 상황을 재현하기 위해서 중력과 부력의 영향을 고려하였고, 전단유동의 전단 방향과 중력의 방향이 일반적으로 일치하지 않을 때를 고려하였다. 벽이 있는 전단유동에서도 위와 같은 해석을 행하였다.

## 2. 입자의 운동 방정식

### 2.1 Formulation of the problem

전단유동 내에서의 구형 모양의 입자의 유동에 대해서 고려하였다. 우선 직선운동을 하고 있는 입자의 반대방향으로 걸리는 항력, 즉 Stokes drag force는

$$F_D = 6\pi\mu v_s a \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기에서  $\mu$ 는 유체의 동점성계수,  $a$ 는 입자의 반지름,  $v_s$ 는 유동의 속도에 상대적인 입자의 속도로서  $x, y$  좌표계에서  $y$  방향으로 속도가 변하는 전단유동을 생각한다면  $v_s = u - Gy$ 로 정의 할 수 있고, 그것을 이용해서 particle에 관련된 Reynolds number,  $Re_s = v_s a / \nu$ 와 전단속도에 관련된 Reynolds number,  $Re_G = Ga^2 / \nu$ 를 정의 할 수 있다. 여기에서  $G$ 는 유체의 shear rate(전단율)이다. Saffman의 경우 이 Reynolds number 들의 범위를  $1 \gg Re_G \gg Re_s$ 로 한정했다.

유체의 관성의 효과로 인해 입자의 움직이고 있는 방향의 수직방향에 대한 양력, 즉 Saffman lift force는

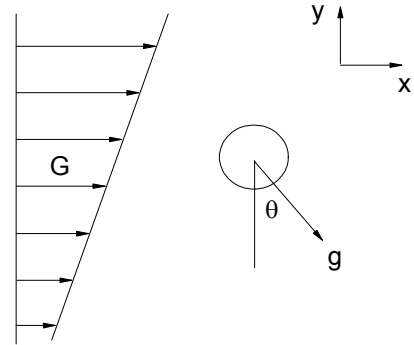


Fig 1 Schematic of the shear flow and sphere configuration

$$F_L = 6.46\mu v_s a^2 (G/\nu)^{1/2} \quad (2)$$

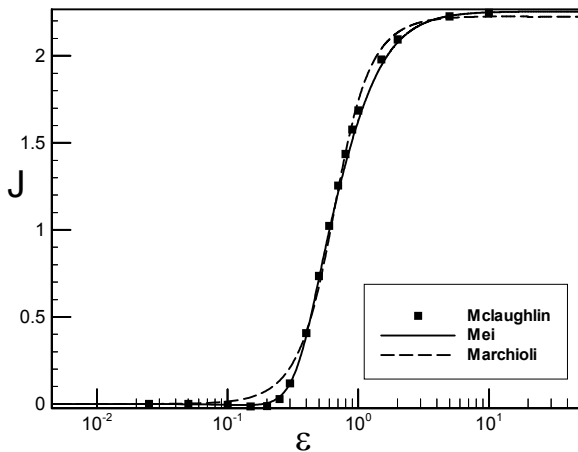
로 나타낼 수 있다. 이것을 바탕으로 전단유동 내를 움직이고 있는 입자의 운동을 나타내기 위해서 식을 세우면,  $F = ma$ , 즉  $dv/dt = F/m$  이고, Fig.1.에서 보는것처럼 가로축을  $x$ 방향, 세로축을  $y$ 방향으로 생각하고, 아래방향으로의 중력과 입자의 부력의 영향을 고려했다. 또한 실제 난류 유동에서의 여러 가지 전단속도의 형태를 고려해서 전단속도는  $x$ 방향으로 평행한 것으로 가정하고 그때 중력의 방향을 아래방향을 고정하고 전단율의 방향을 변화시켜 가면서 시계 반대방향의 각도,  $\theta$ 를 고려했다. (1), (2)식들을 바탕으로 해서  $x, y$  방향으로의 속도의 변화에 대한 식을 세워보면 다음과 같다.

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{6\pi\mu a}{m} v_s - Gv + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) g \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{6.46a\mu Re_G^{1/2}}{m} v_s - \frac{6\pi\mu a}{m} v - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) g \cos \theta \quad (4)$$

(3)번식 우변의 첫 번째항은 입자가  $x$ 축방향으로 움직일 때 받는 항력이고, (4)번식 우변의 의 첫 번째 항은 입자가 움직일 때 받는 양력, 그리고 두 번째 항은 그 양력으로 입자가  $y$ 축 방향으로 움직일 때 입자가 받게되는 항력이다. 또,  $\rho/\rho_p$ 는 유체와 입자의 밀도비이고,  $g$ 는 중력가속도,  $a$ 는 입자의 반지름,  $m$ 은 입자의 무게이다.

Mclaughlin(1991)은 Saffman의 연구결과로부터



**Fig 2 Comparison J function with Mclaughlin (1991), Mei(1992) and Marchioli(2002)**

$Re_s$ 가  $Re_G$  보다 작지 않은 경우에 대해서 lift force 에 대한 연구를 확장했다. 그는 속도장을 Fourier transform 해서 입자로부터 멀리 떨어진 거리에서의 disturbance flow와 입자주위에서의 Stokeslet flow와의 차이를 계산해서 관성 이동 속도(inertial migration velocity)를 구했다. 그것은 위에 세운 연립방정식의 Saffman의 표현에서 계수 6.46 를  $9J(\epsilon)/\pi$  으로 바꿔 써 줌으로써 그 식의 변화를 표현할 수 있다. 여기서  $J(\epsilon)$  은  $\epsilon = Re_G^{1/2}/Re_s$  의 범위에 따라서 값이 달라지게 되는데  $\epsilon \gg 1$  인 경우, 즉 Saffman limit의 경우에는 2.255의 값을 가지게 되어 lift force의 계수를 6.46으로 만족시킨다.

그렇지만  $J(\epsilon)$ 에 대한 Mclaughlin 의 식은 아주 복잡한 계산을 필요로 하기 때문에 계산의 효율성을 위해서 이 논문에서는 Mei(1992)가 제안한 근사식을 사용했다. 이 근사식은 Mclaughlin 의 결과를 간략화 한 것으로서 다음과 같다.

$$J(\epsilon) \approx 0.6765\{1 + \tanh[2.5(\log_{10}\epsilon + 0.191)]\} \{0.667 + \tanh[6(\epsilon - 0.32)]\} \quad (5)$$

Fig. 2 는 Mclaughlin 의  $J(\epsilon)$  에 대한 결과를 Mei의 식과 Marchioli(2002)이 제시한 결과와 비교한 것이다. 그림에서 보는바와 같이 Mei의 식을 쓰는 것이 타당함을 확인 할 수 있다.

이때, 원래 연립방정식의 lift force에 해당하는 항에  $J(\epsilon)$  값을 대입하게 되면  $v_s$  에 대한 비선형 항이 생기게 된다. 이것을 풀기 위해 iteration을 행했다. 정확한 초기값의 추측을 위해서 Saffman limit를 이용한 연립방정식으로부터 얻은 무차원

화된 값  $v_s^*$  를 첫 추측값으로 두고 그것을 통해 얻은 새로운 해의 값이 첫 추측값과의 오차가  $10^{-7}$ 보다 작아져서 수렴을 할 때 까지 계산을 하도록 했다. 이 때,  $\epsilon$  안에 있는  $Re_s$  의 항이 추가가 되는데, 이것을 잘 살펴보면,

$$Re_s = \frac{v_s d}{\nu} = \frac{v_s G}{g} \frac{gd}{G\nu} = (1 - \frac{\rho}{\rho_b}) v_s^* \frac{1}{Re_G} \frac{gd^3}{\nu^2} \quad (6)$$

과 같이 우리가 알고 있는 식으로 고쳐 쓸 수가 있다. 윗 식에서 제일 마지막 항에  $gd^3/\nu^2$  라는 새로운 무차원수가 생겼다. 이것은 실제의 물리적 상태를 고려해서 각 값을 주어야한다. 우선, 입자의 지름을 마이크로 사이즈인  $10^{-5}m$ , 중력 가속도  $g=9.81m/s^2$ , 대기의 295K 일때의 점성계수인  $\nu=2.3169 \times 10^{-5}m^2/s$  로 각각 두고 계산을 해서  $0.5 \times 10^{-5}$  의 값을 얻었다. 이 값을 가지고  $Re_s$  를 다시 써 보면,

$$Re_s = 5 \times 10^{-6} (1 - \frac{\rho}{\rho_b}) \frac{v_s^*}{Re_G} \quad (7)$$

와 같다. 여기에서 구한  $Re_s$  값을 가지고 첫  $\epsilon$  값을 가정하고 iteration 을 행한 뒤 새로운  $v_s^*$ ,  $v^*$  값을 구할 수 있다. 각  $\theta$  값에 따라서 이러한 iteration 을 반복해서 그때마다의 새로운 값을 구했다.

### 2.2 Wall-bounded flow

벽이 있는 전단유동의 입자의 운동을 조사하기 위해서 앞서 세운 연립방정식의 양력과 항력에 대한 표현을 바꿔주었다. 우선 양력에 대해서는 Cherukat & Mclaughlin 이 썼던 표현을 사용했다. 벽과 평행하게 움직이는 입자에 걸리는 항력에 대해서는 Goldman et. al(1967) 의 표현을 사용했고, 벽으로 다가가거나 멀어지려는 입자에 대한 항력에 대해서는 Brenner(1961) 의 표현을 사용했다. 또한 x, y 방향에 대한 속도방정식과 함께 벽으로부터의 시간에 대한 입자의 운동속도를 고려해서 다시 다음과 같이 연립방정식을 세웠다.

$$\frac{dv_s}{dt} = - \frac{6\pi\mu a}{m} \left(1 + \frac{9}{16} \frac{a}{y}\right) v_s - Gv + (1 - \frac{\rho}{\rho_b}) g \sin\theta \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a\mu Re_s I}{m} v_s - \frac{6\pi\mu a}{m\left(1 - \frac{9}{8} \frac{a}{y}\right)} v - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) g \cos\theta \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \quad (10)$$

여기서, I 는 Cherukat & Mclaughlin 이 제시했던 양력에 대한 표현이고 이것은 다음과 같다.

$$I = \left[ 1.7716 + 0.2160 \frac{1}{x} - 0.7292 \frac{1}{x^2} + 0.4854 \frac{1}{x^3} \right] - \left[ 3.2397x + 1.1450 + 2.0840 \frac{1}{x} - 0.9059 \frac{1}{x^2} \right] A_G + \left[ 2.0069 + 1.0575 \frac{1}{x} - 2.4007 \frac{1}{x^2} + 1.3174 \frac{1}{x^3} \right] A_G^2$$

여기서,  $A_G = Re_G/Re_s$ ,  $x = y/a$  이다.

### 3. Solution

#### 3.1 Analytic solution

입자의 크기가 작다고 가정했기 때문에 입자의 바로 주위에서는 평형을 이루고 있다고 보았다. 따라서 위의 연립방정식들에서 좌변을 0 으로 두고서 steady solution 을 구해보았다. 우선 벽이 없는 전단유동에서 변수들을 다음과 같이 무차원화하고 해를 구해보면 다음과 같다.

$$v_s^* \equiv \frac{v_s G}{g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)} = \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)} \sin\left(\theta + \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2}\right) \quad (11)$$

$$v^* \equiv \frac{vG}{g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)} = \sqrt{C_1^2 + C_3^2} \sin\left(\theta + \tan^{-1} \frac{C_3}{C_1}\right) \quad (12)$$

여기서,

$$C_1 = - \frac{1}{\gamma - 0.3423 Re_G^{1/2}}$$

$$C_2 = \frac{1}{\gamma^2 - 0.3423 \gamma Re_G^{1/2}}$$

$$C_3 = \frac{\gamma}{\gamma - 0.3423 Re_G^{1/2}} + 1$$

$$\gamma = \frac{6\pi\mu a}{Gm} = \frac{\mu}{\rho Ga^2} \frac{6\pi\rho a^3}{m} = \frac{9}{2} \frac{\rho}{\rho_p} Re_G^{1/2}$$

위의 결과를 살펴보면,  $v_s^*$  와  $v^*$  는 상수들로 이루어진 크기와 상을 갖는 sin 함수로 나타낼 수가 있고, 그것들을 이루고 있는 변수들은  $\rho/\rho_p$ ,  $Re_G$  그리고  $\theta$  이다. 또한 마지막 식인  $\gamma$  는 유체와 입자의 밀도비와 전단 Reynolds number 로 새롭게 정의된 무차원수이다.

벽이 있는 경우에는 속도에 대한 무차원화는 똑같이 하였고  $x = y/a$  로 두어서 입자의 반지름과 입자의 중심과 벽으로부터의 거리를 고려한 무차원수를 정의했다.

해의 안정성에 대해서 조사하기 위하여 연립방정식을 선형화한 뒤에 고유치를 고려하고 각 항들의 계수들을 가지고 행렬식을 만들었다. 그 행렬식으로부터 나오는 고유치에 대한 방정식을 풀어서 그 고유치들이 음수가 나오는지 즉, 안정한지에 대해서 조사했다. 벽이 없는 경우에 있어서는 모든  $\rho/\rho_p$ ,  $Re_G$  그리고  $\theta$  의 변화에 대한 범위에 있어서 음수의 고유치해를 얻었다.

#### 3.2 Numerical solution

앞서 세운 연립방정식에 초기값을 주고 일정한 시간의 경과후에 어떠한 값으로 가는지 알아보고 또, 앞서 구한 이론적 해와 안정성에 대한 결과와의 타당성을 확인하기 위하여 수치적인 방법으로 해를 구했다. 연립방정식을 3rd-order Runge - Kutta 방법을 사용해서 적분하였는데, 기본적인 형태는

$$df(t) = a(t)fdt + g(t)dt \quad (13)$$

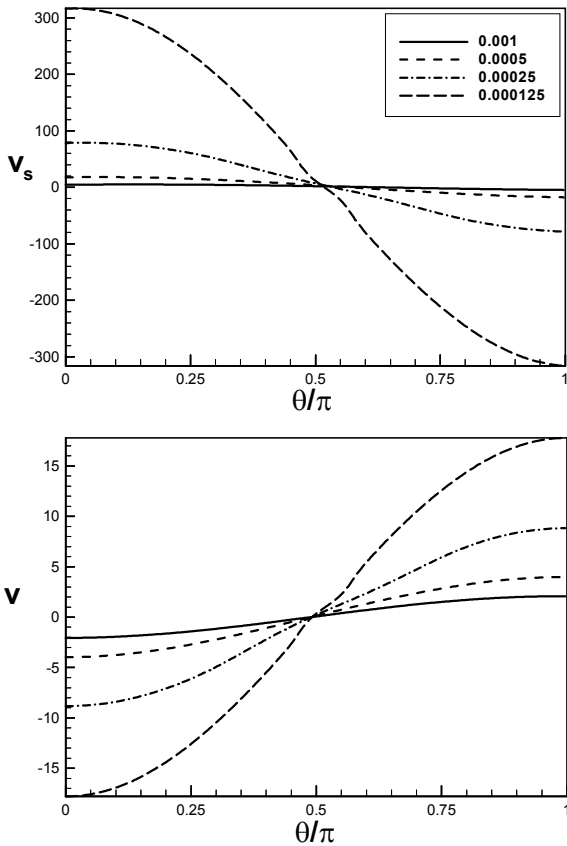
이고 각 하부 단계는 다음과 같다.

$$f^{n+k/3} = \exp((\alpha_k + \beta_k)\Delta t a^{n+(k-1)/3}) \left[ f^{n+(k-1)/3} + \alpha_k \Delta t g^{n+(k-1)/3} + \beta_k \Delta t g^{n+(k-2)/3} \right] \quad (14)$$

여기서, n 은 1,2,3 이고  $\alpha, \beta$  는,

$$\alpha_1 = 8/15, \quad \alpha_2 = 5/12, \quad \alpha_3 = 3/4$$

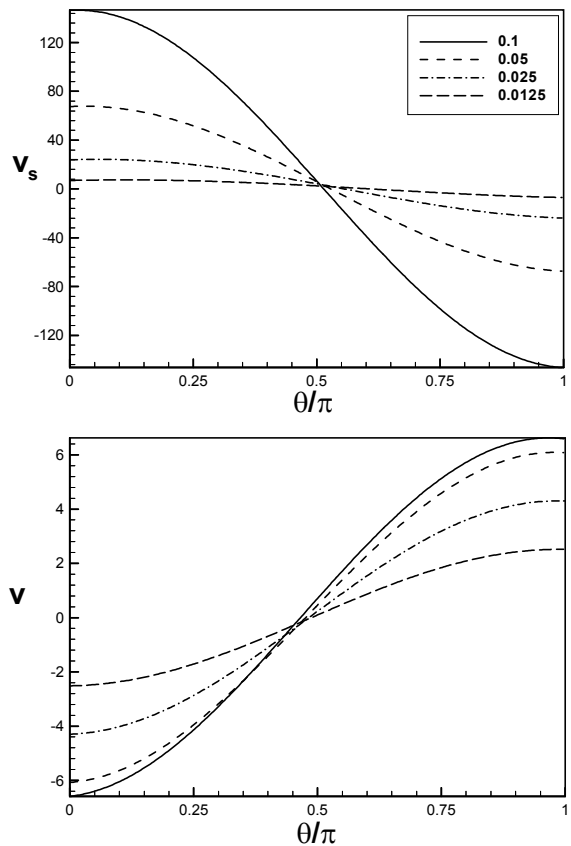
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -17/60, \quad \beta_3 = -5/12$$



**Fig 3 Steady solution  $v_s^*$  and  $v^*$  for various  $\rho/\rho_p$  at  $Re_G=0.01$  without wall**

와 같이 주고 적분을 행하였다. 벽이 없는 전단 유동의 경우, 초기값에 상관없이 안정적으로 수렴하는 것을 확인할 수 있었다.

벽이 없는 전단유동 안에서 입자가 움직일 때  $\rho/\rho_p, Re_G$  그리고  $\theta$  등의 변수를 변화시면서 x 방향의 상대적인 속도인  $v_s^*$  와 y 방향의 속도  $v^*$  의 안정적인 해를 구할 수 있었다. 그 값을 Fig. 3 과 Fig. 4 에 무차원화 된 값,  $v_s^*, v^*$  들을  $\rho/\rho_p, Re_G, \theta$  들의 함수로 나타내었다. 이 값들은  $\theta$  가 변화함에 따라서 각각의 상과 크기를 갖는 sine 함수값을 갖는 것을 볼 수 있었다. 이러한 값들을 통해서 입자의 궤적에 대해서도 알아볼 수 있다. 그림에서 볼 수 있는 바와같이 이론적인 해와 수치적인 해가 전 범위에 있어서 동일한 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 실제 가스유동 내에서의 입자의 운동을 보면 입자와 유체의 밀도비인  $\rho/\rho_p$  가 0.001 정도이거나 더 작은 범위에서 사용되기 때문에 이 논문의 해석에서 그 정도의 범위를 사용하였다.



**Fig 4 Steady solution  $v_s^*$  and  $v^*$  various  $Re_G$  at  $\rho/\rho_p = 0.001$  without wall.**

벽이 있는 경우에는 벽과 입자의 중심사이의 거리가 해를 결정하는데 있어서 중요한 요소이다. 앞서 정의한  $x \equiv y/a$  값은 1보다 큰 수를 가질 때에만 해로 인정할 수 있다. 또한 여기서 사용한 I의 범위가 Cherukat & Mclaughlin의 논문에서 Cox & Hsu의 결과와 비교한 것이  $x$ 가 20 정도까지였으므로 신뢰할 만한 그 정도의 범위에 대해서 관심을 두고 조사하였다. Fig.5는  $\theta=2/\pi$ 로 두고 다른 변수들을 변화시켜가면서 얻은 결과이다.  $\theta=2/\pi$ 라는 것은 벽이 세로로 세워져 있고 전단유동의 방향도 아래쪽인 유동을 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이 해를 갖지 않는 범위인  $x < 1$ 인 부분을 발견할 수 있고,  $\rho/\rho_p$ 와  $Re_G$ 가 모두 큰 값을 가질 때에는 해를 갖는 것을 확인할 수 있었다. 모두 작은 값을 가질 때를 보면, 불규칙하게 해가 얻어지는 부분이 있는데 이것은 수치적 해석을 통해서 더 살펴볼 예정이다.

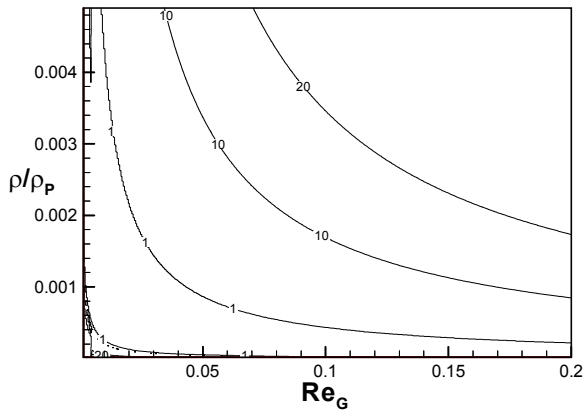


Fig. 5 Contour of  $y/a$  value of a particle on the wall

#### 4. 결 론

벽이 없는 경우에는 Stokes drag force 와 Saffman lift force를 바탕으로 식을 세웠고, Mei의 근사식으로까지 확장을 했다. 입자는 아주 작다고 가정했기 때문에 그 입자 주위에서는 평형상태를 이루고 있다고 보았다. 연립방정식의 좌변을 0 으로 두고 정상상태의 해를 이론적인 방법으로 얻어내었고, 안정성에 대한 분석을 행하여서 연립방정식의 해를 구했다. 벽이 없는 전단유동에 경우에는 모든 범위에 있어서 안정한 결과 즉, 행렬식으로부터 얻은 고유치가 음수가 나오는 것을 확인할 수 있었다. 이론적인 방법에서 얻어진 결과와 안정성에 대한 결과를 확인하기 위하여 초기값을 주고 적당한 시간의 경과 후에 얻어지는 해를 구하는 수치적인 해석도 행하였다. 3rd-order Runge-Kutta 방법을 통해서 적분을 행하였는데 이론적 해석방법과 동일한 결과를 얻어내었다. 이때, 초기값에 상관없이 적당한 시간의 경과 후에 같은 값으로 얻어지는 것을 확인하였다.

벽이 있는 전단유동에서도 입자가 벽에 평행하게 움직일 때 받게되는 양력과 항력에 대해서 식을 세웠고 앞선 해석과 같은 방법으로 이론적 해석을 행하였다.  $\theta=2/\pi$  일 때 해가 얻어지는 부분과 iteration에서 수렴하지 않는 부분 즉, 해를 얻을 수 없는 부분을 찾을 수 있었다. 해를 얻을 수 없는 부분에 대해서는 수치적인 해석을 통해서 어떠한 다른 불규칙한 해로 수렴하는 등의 양상을 살펴볼 필요가 있다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단 특정기초연구사업 (R01-2000-000-00306-0)의 지원으로 이루어졌다.

#### 참고문헌

- (1) Bagchi, P., Balachandar, S., 2002, Effect of free rotation on the motion of a solid in linear shear flow at moderate Re. *Physics of Fluid*, Vol. 14, No. 8.
- (2) Happel, J., Brenner, H., 1973, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Nijhoff.
- (3) Harper, E.Y., Chang, I-Dee., 1968. Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous flow. *J. Fluid Mech.* 33(2), 209-225.
- (4) Lataste, J., Huilier, D., Burnage, H., Bednar, J., 2000. On the shear lift force acting on heavy particles in a turbulent boundary layer. *Atmospheric Environment* 34, 3963-3971
- (5) Maxey, M.R., Riley, J.J., 1983. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluid* 26, 1211-1224.
- (6) Mclaughlin, J.B., 1991. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *J. Fluid Mech.* 224, 262-274.
- (7) Cherukat P., Mclaughlin, J.B, 1994. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall. *J. Fluid Mech.* 263, 1-18.
- (8) Mei, R., 1992. An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number. *Int. J. Multiphase Flow* Vol. 18, No. 1, 145-147.
- (9) Pozrikidis, C., 1997, *Introduction to theoretical and computational fluid dynamics*, Oxford University Press.
- (10) Saffman, P.G., 1965. The lift force on a small sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* 22(2), 385-400.
- (11) Ziskind, G., Fichman, M., Gutfinger, C., 1998. Effects of shear on particle motion near a surface - application to resuspension. *J. Aerosol Sci.* Vol. 29, No. 3, 323-338.