

비선형 $k-\epsilon$ 난류모델에 따른 정사각형 덕트내 난류유동 예측

명 현 국[†]

Prediction of Turbulent Flow in a Square Duct with Nonlinear $k-\epsilon$ Models

Hyon Kook, Myong

Key Words: Nonlinear $k-\epsilon$ model(비선형 $k-\epsilon$ 모델), Turbulence-driven secondary flow (난류로 야기되는 이차유동), Anisotropy (비등방성), Simulation(수치해석)

Abstract

Two nonlinear $k-\epsilon$ models with the wall function method are applied to the fully developed turbulent flow in a square duct. Typical predicted quantities such as axial and secondary velocities, turbulent kinetic energy and Reynolds stresses are compared in details both qualitatively and quantitatively with each other. A nonlinear $k-\epsilon$ model with the wall function method capable of predicting accurately duct flows involving turbulence-driven secondary motion is presented in the present paper. The nonlinear $k-\epsilon$ model adopted in a commercial code is found to be unable to predict accurately duct flows with the prediction level of secondary flows one order less than that of the experiment.

1. 서 론

비원형 단면(noncircular duct)을 가지는 덕트내 난류유동의 주된 특징은 충분히 발달된 유동의 경우에도 횡단면상에 이차유동(secondary flow)이 존재한다는 것이다. 이 이차유동은 난류의 비등방성에 의해 야기되며 축방향 주류속도에 비해 1% 이하로 상대적으로 매우 작으나, 난류에너지를 재분배시키고, 주류속도에 영향을 주어 결과적으로 벽면전단응력 분포를 변화시키는 등 유동장 전반에 걸쳐 큰 영향을 미친다. 따라서, 비원형 덕트내에서의 난류유동에 관해 많은 실험적 및 수치해석적 연구가 수행되어 왔다⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾.

한편, 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어 공학적

으로 중요한 복잡한 형상을 가지는 물체 주위 및 내부의 난류유동예측을 위해 현재 일반좌표계를 사용하는 상용코드가 널리 사용되고 있다. 그러나, 대부분의 상용코드는 난류의 등방성 가정에 기초한 선형(linear) 난류모델을 채택하고 있어 비원형 단면을 가지는 덕트내에서의 난류유동과 같은 난류의 비등방성에 기인하여 발생하는 난류유동을 제대로 예측하지 못하고 있다. 최근, 난류의 비등방성을 고려한 비선형(nonlinear) 난류모델을 도입시킨 상용코드(STAR-CD)⁽⁷⁾가 개발되어, 비원형 단면을 가지는 복잡한 난류유동 해석에 사용되고 있으나, 이 비선형 난류모델에 대한 정확한 평가가 아직 이루어지지 않은 상태이다.

저자⁽⁸⁾는 최근 정사각형 형상을 가지는 덕트내의 유동을 대상으로 하여, 현재 상용코드에 도입된 저레이놀즈수형 비선형난류모델이 정성적으로 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 실험결과에 비해 한 차수 이상 작게 예측하여 이

[†] 국민대학교 기계자동차공학부

E-mail : myong@kookmin.ac.kr

TEL : (02)910-4714 FAX : (02)910-4839

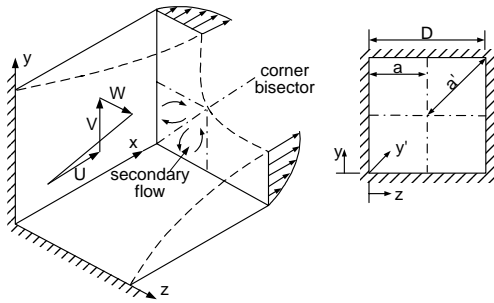


Fig. 1 Schematic diagram and coordinate system.

차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음을 명확하게 규명하였다. 그러나, 일반적으로 공학적인 문제는 고레이놀즈수 유동이고, 이러한 유동해석에 경제적인 벽함수 방법을 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델에 대한 정확한 평가는 아직 이루어지지 않은 상태로 이에 대한 정립이 필요하다.

본 연구에서는 이러한 배경하에 상용코드에 도입된 공학적으로 사용하기 편리한 벽함수를 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델의 예측성을 정량적으로 평가하고, 상용코드에 사용될 수 있는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델을 제안하고자 한다. 또한 향후 고레이놀즈수형 비선형 난류모델의 개선방향을 위한 데이터베이스를 구축한다.

2. 수치해석방법

2.1 해석모델 및 비선형난류모델

본 연구에서 대상으로 하는 해석모델은 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 정사각형 단면을 가지는 덕트내의 난류유동으로, 형상이 단순하고 실험결과가 많이 있어 비선형 난류모델을 정량적으로 평가하기에 적절하다. 또한, 본 연구에서는 해석의 편의상 완전히 발달된 난류유동의 경우만을 고려하기로 한다.

본 연구에서는 상호비교를 위한 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델로 현재 상용코드⁽⁷⁾에서 유일하게 채용하고 있는 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델과 저자⁽⁹⁾에 의해 제안된 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델을 대상으로 한다. 이 두 모델에 대한 보다 상세한 사항은 참

고문헌^{(7), (9)-(10)}에 나와 있으므로, 여기서는 간략하게 두 모델의 특징만을 기술한다.

일반적으로 벽함수를 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델은 고레이놀즈수형 선형 $k-\epsilon$ 난류모델과 기본적으로는 똑같은 모델방정식 및 모델상수를 사용하고 있으나, 레이놀즈응력과 변형율 사이의 관계가 다음과 같이 비선형으로 표현된다⁽¹¹⁾.

$$\rho \overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t S_{ij} + C_1 \mu_t \frac{k}{\epsilon} (S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) \quad (1)$$

$$+ C_2 \mu_t \frac{k}{\epsilon} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki})$$

$$+ C_3 \mu_t \frac{k}{\epsilon} (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij})$$

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon} \quad (2)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

위의 식(1)에서 선형 난류모델은 우변의 처음 두 항만을 사용한다. 상용코드에서는 비선형 난류모델의 모델상수에 대해서 Shih 등⁽¹¹⁾의 모델(이하 SZL 모델)형태를 채용하고 있다.

$$C_1 = \frac{0.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4a)$$

$$C_2 = \frac{3.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4b)$$

$$C_3 = \frac{4.75}{(1000 + S^3) C_\mu} \quad (4c)$$

$$C_\mu = \frac{2/3}{1.25 + S + 0.9\Omega} \quad (5)$$

$$S = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \Omega = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (6)$$

반면, Myong-Kasagi 모델^{(7), (9)}은 원래 저레이놀즈수형 난류모델로 모델방정식의 모델 상수 및 비선형 모형에 대한 원래의 식 형태도 다르나, 고레이놀즈수형에 대해서는 벽면 근처의 영향을 고려한 벽감쇄함수 및 추가항들을 제외시키고 식 형태를 변형시키면 식(1)로 표현되며, 다음과 같은 모델상수 값을 가진다.

$$C_1 = 0.275, \quad C_2 = 0.2375, \quad C_3 = 0.05 \quad (7)$$

본 논문에서는 표준 $k-\epsilon$ 난류모델의 모델방정식 및 모델상수를 가지고, 비선형 모델상수로 식(7)의 값을 가지는 모델을 이하 MK 모델이라고 명명한다.

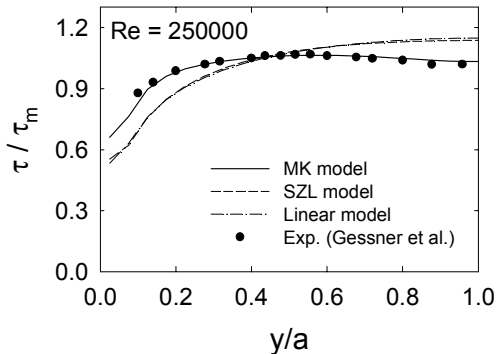


Fig. 2 Local wall shear stress distributions for fully-developed flow in a square duct.

2.2 수치해석방법

수치해석은 자체 개발한 MOSA3D코드⁽¹²⁾를 사용하여 수행하였다. 이 코드는 유한체적법과 SIMPLE 해법에 기초하고 일반좌표계(경계밀착좌표계)와 정렬격자계를 채택하고 있다. 본 연구에서는 완전히 발달된 유동을 경제적으로 처리하기 위해 축(주유동) 방향으로 1~3개의 셀층만이 요구되는 수치해석방법, 즉 입구면에 압력경계조건을, 출구면에 명시된 유동출구조건을 부과시키는 방법을 코드에 도입하였다.

본 연구에서는 대칭성을 고려하여 Fig. 1에 나타난 정사각형 단면의 1/4만을 대상으로, y 및 z 축 방향으로 각각 20개의 등간격 격자를 사용하고, 벽면경계에 대해서는 선형 난류모델에서 사용하는 벽함수를 그대로 사용하였다. 또한, 대류항에 대한 도식으로는 하이브리드 도식(hybrid scheme)을 사용하였다. 참고로, 본 논문에서 이하 비교·고찰하는 덕트 폭 및 축방향 평균속도에 기초한 레이놀즈수 Re 가 250,000인 경우, 벽면으로부터 첫 번째 격자에서의 y^+ (또는 z^+)는 약 130 정도이다.

3. 결과 및 고찰

Fig. 2는 완전히 발달된 난류유동에 대한 덕트 주변길이에 따른 국소 벽면전단응력의 예측결과를 실험결과^{(5), (13)}와 함께 나타내고 있다. 참고로 선형모델 결과도 함께 나타냈다. 실험결과는 벽면 부근에서 코너쪽으로 향하는 이차유동에 기인하여 벽면전단응력이 대칭면(양쪽 벽면의 중심)

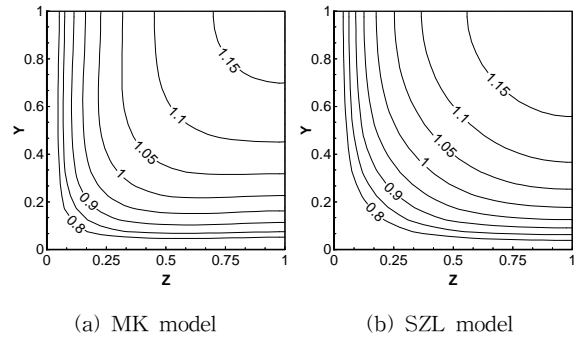


Fig. 3 Contours of axial velocity U/U_b

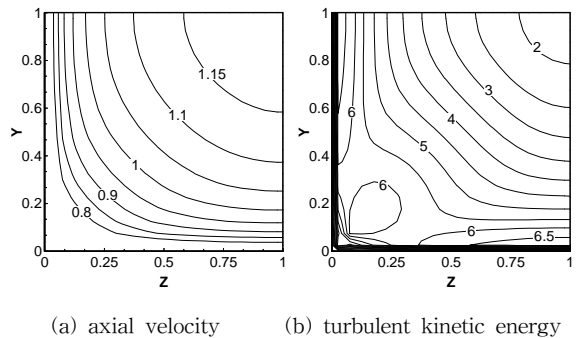


Fig. 4 Contours of axial velocity U/U_b and turbulent kinetic energy k/U_b^2 ($\times 10^3$) by linear model.

으로부터 코너쪽을 향해 상승하여 코너와 대칭면 중간 지점에서 최대값을 가진 후, 코너부근에서 급격히 떨어짐을 보여주고 있다. 예측결과를 보면 MK 모델은 실험적으로 알려진 특징을 정확하게 예측하고 있으며, 정량적으로도 실험결과와 매우 잘 일치하고 있다. 이 결과로부터 벽함수를 사용하는 MK 모델이 이차유동을 잘 예측하고 있음을 예상할 수 있다. 반면, SZL 모델은 비등방성 효과를 전혀 고려하지 않는 선형모델과 유사하게 코너에서부터 상승하여 양쪽 벽면의 중심인 대칭면에서 최대가 되는 예측결과를 보여주고 있어, 이러한 실험적 결과를 전혀 반영시키지 못하고 있다.

Fig. 3은 축방향 속도의 등고선을 보여주고 있다. 예측 결과를 보면 MK 모델은 코너쪽으로 향한 이차유동에 기인하여 등고선이 코너쪽을 향해 만곡된 형상 및 속도구배가 가장 심한 부분이 코너와 대칭면 사이에 나타나는 실험적으로 잘 알려진 사실^{(1), (3), (5), (13)}을 명확하게 보여 주고 있다. 반면, SZL 모델은 이러한 경향을 전혀 나타내고 있지 않으며, 난류의 비등방성을 전혀 고려

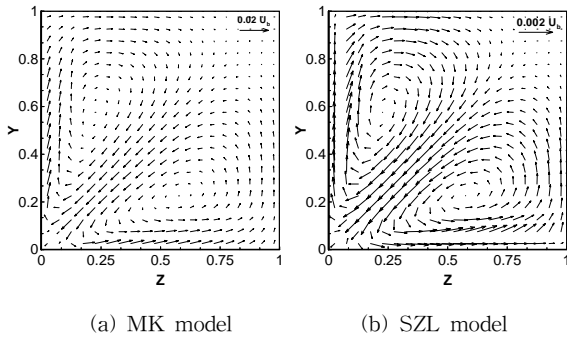


Fig. 5 Secondary flow vectors.

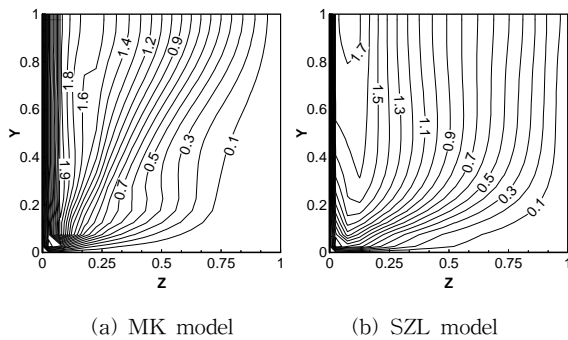


Fig. 6 Contours of turbulent shear stress $-\overline{wv}/U_b^2$ ($\times 103$).

하지 않는 선형(등방) 모델의 결과(Fig. 4(a))와 거의 유사한 분포를 나타내고 있다.

Fig. 5는 예측된 이차유동 속도벡터를 나타내고 있다. 예측결과를 보면 두 모델이 정성적으로 유사한 이차유동의 분포 형태를 보여 주고 있으나, 정량적으로는 크게 차이를 나타내고 있다. 즉, MK 모델이 이차유동 속도크기의 최대값을 측방향 평균속도의 약 1.2 % 정도로 실험결과^{(5), (13)}인 약 1.8 % 보다 다소 작게 예측하고 있으나, SZL 모델은 0.15 %로 실험결과 및 MK 모델에 비해 한 차수 작게 이차유동을 예측하고 있음을 나타내고 있다.

Fig. 6은 난류 전단응력 \overline{wv} 의 분포를 나타내고 있다. MK 모델은 이차유동으로 인해 코너와 대칭면 사이에서 심하게 만곡되고, 최대 전단응력이 대칭면에서 나타나지 않고 코너쪽으로 이동하는 실험적으로 알려진 사실^{(1), (5), (13)}을 비교적 잘 보여주고 있다. 반면, SZL 모델은 전반적으로 선형모델과 유사하게 대칭면에서 최대 전단응력을 가지며, 이차유동에 기인되어 변화하는 전단응력 분포를 제대로 예측하고 있지 못하다.

Fig. 7은 예측된 난류에너지의 등고선을 나타내

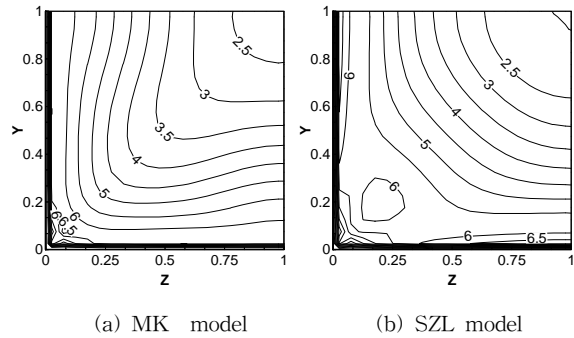


Fig. 7 Contours of turbulent kinetic energy k/U_b^2 ($\times 10^3$).

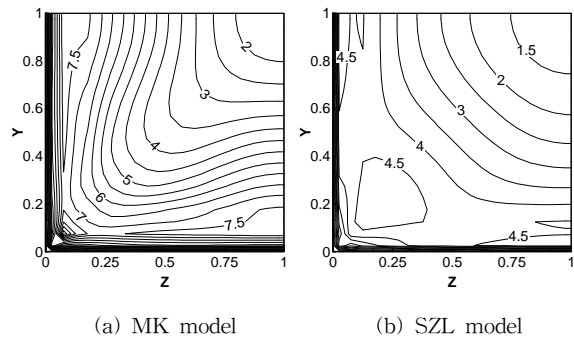


Fig. 8 Contours of turbulent normal stress $\overline{u^2}/U_b^2$ ($\times 103$).

고 있다. 실험결과^{(1), (3), (5), (13)}에 따르면 난류에너지 등고선이 코너쪽을 향해 심하게 만곡된 형상을 보인다고 보고 되어 있는데, 예측결과를 보면 MK 모델은 등고선이 코너쪽을 향해 만곡된 형상을 비교적 잘 나타내고 있다. 반면, SZL 모델은 실험적 사실을 전혀 반영시키고 있지 못하며, 선형 모델의 결과(Fig. 4(b))와 매우 유사한 결과를 나타내고 있다. 이것은 식(1)의 비선형 항들에 의한 수직응력의 비등방성 효과가 SZL 모델에서는 제대로 반영되지 않았음을 의미한다.

이러한 사실은 Fig. 8 및 Fig. 9에 각각 나타난 측방향 및 y 방향의 수직응력 등고선 예측결과로부터 확인할 수 있다. 먼저, Fig. 10에 나타난 측방향 수직응력에 대해 실험결과^{(1), (3), (5), (13)}에 따르면 이 수직응력 등고선이 난류에너지와 유사하지만 코너쪽을 향해 더욱 심하게 만곡된 형상을 나타내고 있다고 보고 되어있는데, 예측결과를 보면 MK 모델은 특히 코너 및 벽면 근방에서 상대적으로 수직응력이 높게 나타나는 실험적 사실을 명확하게 보여주고 있으나, SZL 모델은 실험적 사실을 전혀 반영시키고 있지 못하며, 난류

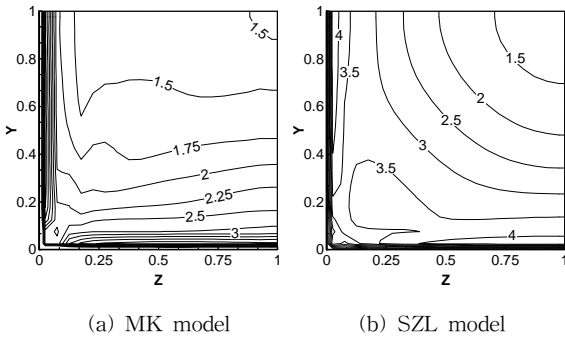


Fig. 9 Contours of secondary turbulent normal stress $\overline{v^2}/U_b^2$ ($\times 103$).

에너지 및 선형 모델의 결과(그림 생략)와 유사한 결과를 나타내고 있다.

한편, Fig. 9에 나타낸 y 방향의 수직응력 분포에 대한 실험결과^{(3), (5), (13)}에 따르면 이 수직 응력은 이차유동으로 인해 상당히 비대칭적인 형상을 나타내고 있으며, 난류강도도 축방향 수직응력에 비해 상대적으로 크게 작아진다고 보고 되어 있다. 예측결과를 보면 MK 모델은 이러한 실험적 사실을 비교적 잘 반영하고 있는데 비해, SZL 모델은 비대칭성이 매우 약하고 선형모델에서 얻어지는 대칭에 가까운 분포를 보여주고 있으며, 난류강도도 상대적으로 크게 떨어지지 않고 있다. 따라서, 이 결과로부터 SZL 모델은 이 수직응력의 비대칭성에 기인하여 나타나는 이차유동을 제대로 예측할 수 없을 것을 예상할 수 있다.

마지막으로, 이차유동을 발생시키는 데 중요한 역할을 하는 것으로 알려진 정사각형 단면상의 수직응력의 차, $\overline{w^2} - \overline{v^2}$ 및 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 을 Fig. 10 및 Fig. 11에 각각 나타냈다. 먼저, Fig. 10에 나타낸 단면상의 수직응력의 차, $\overline{w^2} - \overline{v^2}$ 에 대한 예측결과를 보면 두 모델이 정성적으로는 유사한 형상을 예측하고 있으나, 정량적으로는 MK 모델에 비해 SZL 모델은 한 차수 작게 예측하고 있다. 이 결과로부터 SZL 모델은 이차유동을 발생시키는 주된 역할을 하는 수직응력의 차를 상대적으로 작게 예측하여 결과적으로 이차유동을 정량적으로 정확히 예측하지 못함을 알 수 있다.

또한, Fig. 11에 나타낸 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 의 등고선에 대한 결과를 보면 두 모델이 정성적

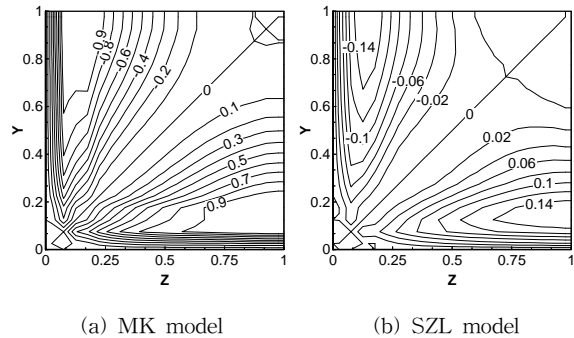


Fig. 10 Anisotropy between turbulent normal stress components $(\overline{w^2} - \overline{v^2})/U_b^2$ ($\times 10^3$).

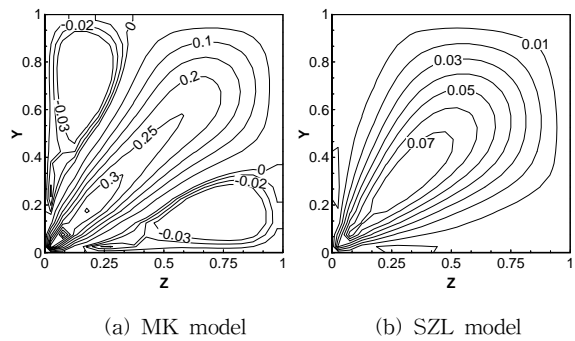


Fig. 11 Contours of turbulent shear stress $-\overline{vw}/U_b^2$ ($\times 10^3$).

으로 실험적 사실^{(1), (3)}과 유사한 형상을 예측하고 있으나, 정량적으로는 MK 모델에 비해 SZL 모델은 약 1/5 정도 작게 예측하고 있다. 따라서, SZL 모델은 이차유동을 발생시키는 주된 역할을 하는 레이놀즈 전단응력 및 앞에서 기술한 난류 수직응력의 차를 상대적으로 작게 예측하여, 결과적으로 난류에 기인하여 발생하는 이차유동을 정량적으로 정확히 예측하지 못하며, 또한 벽면 전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음을 알 수 있다.

4. 결 론

정사각형 형상을 가지는 덕트내의 완전히 발달된 난류유동을 대상으로 하여, 현재 상용코드에 도입된 벽함수를 사용하는 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델(SZL 모델)과 Myong-Kasagi⁽⁹⁾의 저레이놀즈수형 비선형 $k-\epsilon$ 난류모델의 고레이놀즈수형 모델(MK 모델)의 예측성능을 정량적으로 상호비교

분석을 통해 평가하였다. 본 연구결과,

(1) 본 연구에서 제안한 Myong-Kasagi의 코레이놀즈수형 난류모델은 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 잘 예측하고 있음이 확인되었다.

(2) 상용코드에 도입된 비선형난류모델은 정성적으로 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 Myong-Kasagi 모델 및 실험결과에 비해 한 차수 이상 작게 예측하여 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음이 명확하게 확인되었다.

(3) 축방향 속도, 단면상의 이차속도, 레이놀즈응력 등에 대한 등고선 결과를 상세히 제시하여 향후 비선형 난류모델의 모형개선을 위한 데이터 베이스를 구축하였다.

참고문헌

- (1) Brundrett, E. and Baines, W.D., 1964, "The Production and Diffusion of Vorticity in Duct Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol.19, pp.375~394.
- (2) Launder, B.E. and Ying, W.M., 1973, "Prediction of Flow and Heat Transfer in Ducts of Square Cross Section," *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol.187, pp.455~461.
- (3) Melling, A. and Whitelaw, J.H., 1976, "Turbulent Flow in a Rectangular Duct," *J. Fluid Mech.*, Vol.78, pp.289~315.
- (4) Demuren, A.O. and Rodi, W., 1984, "Calculation of Turbulent Driven Secondary Motion in Non-Circular Ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol.140, pp.189~222.
- (5) Gessner, F.B., 1982, "Corner Flow (Secondary Flow of the Second Kind)," in Kline et al. (eds.), *Proc. 1980-1981 AFORS-HTTM Stanford Conf. on Complex Turbulent Flows*, Stanford University.
- (6) Myong, H.K. and Kobayashi, T., 1991, "Prediction of Three-Dimensional Developing Turbulent Flow in a Square Duct with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Model," *Trans. ASME J. Fluids Engineering*, Vol.113, pp.608~615.
- (7) STAR-CD, 1999, Methodology Manual, Version 3.10, Computational Dynamics Ltd., pp.2.1~2.14.
- (8) Myong, H.K., 2002, "Prediction of Fully Developed Turbulent Flow in a Square Duct with Nonlinear Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Models," submitted to *Trans. KSME*.
- (9) Myong, H.K. and Kasagi, N., 1990, "Prediction of Anisotropy of the Near-Wall Turbulence with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Turbulence Model," *Trans. ASME J. Fluids Engineering*, Vol.112, pp.521~524.
- (10) Craft, T.J., Launder, B.E. and Suga, K., 1996, "Development and Application of a Cubic Eddy-Viscosity Model of Turbulence," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.17, pp.108-115.
- (11) Shih, T.H., Zhu, J. and Lumley, J.L., 1993, "A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model," *NASA TM-105993*.
- (12) Myong, H.K., 2002, "Development of 3-D Convective Heat Transfer Analysis Program using Structured Grid System," (in Korean) Proc. KAMES 2002 Joint Symp. (KSME part), pp.2614~2619.
- (13) Gessner, F.B. and Emery, A.F., 1981, "The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts," *Trans. ASME. J. Fluids Engineering*, Vol.103, pp.445~455.