

2-유체 모델을 위한 “개선된 Semi-Implicit 기법”

이 성 재* · 정 문 선*

Advanced Semi-Implicit Method (ASIM) for Hyperbolic Two-Fluid Model

Sung-Jae Lee*, Moon-Sun Chung*

Key Words : 2-유체모델, 표면장력, 수치적 안정성, 개선된 Semi-Implicit 기법

Abstract

Introducing the interfacial pressure jump terms based on the surface tension into the momentum equations of two-phase two-fluid model, the system of governing equations is turned mathematically into the hyperbolic system. The eigenvalues of the equation system become always real representing the void wave and the pressure wave propagation speeds as shown in the previous manuscript. To solve the interfacial pressure jump terms with void fraction gradients implicitly, the conventional semi-implicit method should be modified as an intermediate iteration method for void fraction at fractional time step. This advanced semi-implicit method (ASIM) then becomes stable without conventional additive terms. As a consequence, including the interfacial pressure jump terms with the advanced semi-implicit method, the numerical solutions of typical two-phase problems can be more stable and sound than those calculated exclusively by using any other terms like virtual mass, or artificial viscosity.

기호 설명

A, B	Coefficient matrices
C	Wave speed
g	Gravity acceleration
L	Fluid bulk modulus
m	Void fraction wave coefficient
M	Momentum source
p	Pressure
r	Ratio of bulk moduli
R	Radius of curvature
t	Time
v	Flow velocity
U	Primitive variable vector
α	Void fraction
Γ	Mass source

λ	Eigenvalue
ρ	Fluid density
σ	Surface tension coefficient

1. 서론

이상유동을 기술함에 있어서, 표면장력효과는 기포의 생성과정 및 운동을 지배하는 중요한 인자 중의 하나이다. 통상적으로 표면장력효과는 특정 조건에 대하여 Young-Laplace 방정식으로써 기술되어 왔으며, 일반적으로 별도의 방정식으로써 취급되어 왔다. 혹은, 상간의 상대속도가 큰 경우나 기포류가 아닌 경우에는 표면장력항이 여타의 항에 비해 상대적으로 적은 효과를 가지므로 무시하여 왔다. 그러나 아무리 표면장력효과가 운동량방정식의 다른 항들에 비해 작은 값을 갖는다고 할 지라도 이를 배제하면 상간의 압력차를 적절히 고려할 수 없고, 이에 따라 지배방정식의 비 물리성

* 한국원자력연구소 열수력안전연구부

및 수치적 불안정성 등의 문제를 완전히 해결할 수 없다.

한편, 상 간의 비평형적 질량, 운동량 및 에너지 교환은 2-유체 (Two-fluid) 모델을 써서 효과적으로 기술할 수 있다. 그러나, 대부분의 전통적인 2-유체 모델들은 두 상의 수력학적 압력이 일정함을 가정하고 있으며, 따라서 이상유동을 기술하는 2-유체 모델이 복소수의 고유치 (Eigenvalue) 를 가짐으로써 발생하는 수치적 불안정성을 수반한다: Stewart⁽¹⁾ 참고. 반면에 Ransom 및 Hicks⁽²⁾ 에 의하여 제안된 것과 같은 2-압력 (Two-pressure) 모델은 실수의 고유치를 가지긴 하지만, 성층유동과 같은 특정 유동양식을 전제로 유도된 것이어서 기포류, 슬러그류와 같은 형태의 이상유동 현상을 기술하기엔 부적절한 단점이 있다.

또한, 물리적인 항들을 추가하여 지배방정식의 수학적 특성을 개선시키려는 많은 연구가 수행되어 왔는데, 예를 들면, Travis⁽³⁾는 운동량방정식에 점성응력항 (Viscous stress) 을 추가하여 수치적 불안정성을 제거할 수 있었다. 그리고 Stuhmiller⁽⁴⁾는 계면압력항 (Interfacial pressure)을 고려할 경우, 유동의 기포파 (Void fraction wave) 를 나타내는 고유치가 부분적으로 실수로 바뀔 수 있음을 지적하였으며, 결국 각 상의 속도 차에 기인하는 계면압력의 차이를 고려하면 지배방정식을 쌍곡형방정식 (Hyperbolic equation) 으로 변화시킬 수 있음을 보였다. 그 밖에 Rousseau 와 Ferch⁽⁵⁾ 는 상간의 정압차를 써서 지배방정식을 쌍곡형으로 만들기 위한 특정조건을 제시하였다.

이밖에도, Ardron⁽⁶⁾은 점성을 무시하고 중력과 표면장력효과를 포함시킨 2-유체 모델을 성층류 해석에 사용함으로써 현실적인 유동조건에서 안정적인 해를 얻었고 실험결과와 잘 일치하는 파의 전파속도를 얻을 수 있었다. Ransom 과 Scofield⁽⁷⁾ 는 상간의 압력차를 기술함에 있어서 계면관성 (Interfacial inertia) 효과를 고려함으로써 성층류방정식을 쌍곡형으로 변화시킬 수 있었고, Biesheuvel 과 Wijngaarden⁽⁸⁾은 이 개념을 액체속에 기포들이 균일하게 분포하는 이상유동영역으로 확대하여 적용하였다.

최근에, 2-유체 모델에 내재하는 비물리적인 불안정성을 제거하고 물리적인 파의 전파속도를 나타내는 고유치를 갖게 하기 위하여, 표면장력효과를 반영한 새로운 쌍곡형 2-유체 모델이 Lee 등^(9, 10) 에 의하여 제안되었다. 이 모델은 가상질량 (Virtual mass) 및 인공점성 (Artificial viscosity) 항을 사용하지 않고도 2-유체 방정식을 쌍곡형으로 바

꾸어 줌과 동시에 그 고유치들이 기포파 및 압력파의 속도를 나타내는 등의 많은 장점을 가지고 있음이 판명되었다. 이때 기포파의 속도는 Boure⁽¹¹⁾ 등의 실험에 의해 단순한 형태로 표현된 실험식이 이미 알려져 있으므로 고유치와의 직접적인 비교가 가능하다.

본 논문에서는 이와 같은 연구결과를 바탕으로 제안된 쌍곡형 2-유체 모델에 Semi-implicit scheme 을 적용할 경우 계면압력도약 (Interfacial pressure jump) 항을 내재적으로 풀기 위한 방법을 제시하고, 이상유동 표준모사문제를 계산함으로써 계면압력도약항 및 기존의 가상질량항이 계산 결과의 정확성과 수치적 안정성에 미치는 영향을 비교/분석하고자 한다.

2. 지배방정식

일반적으로, 기본적인 이상유동 방정식은 공간에 대하여 평균한 상태변수들과 유동인자들에 기초하여 유도된다. 여기에 표면장력효과에 의한 계면압력도약항을 고려하면, 비점성 2-유체 모델에 대한 1차원 질량 및 운동량 방정식은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g)}{\partial x} = \Gamma_g \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l)}{\partial x} = -\Gamma_g \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g^2)}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial p_g}{\partial x} \quad (3)$$

$$+ (p_g - p_l) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \alpha_g \rho_g g_x + M_g$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l^2)}{\partial x} + \alpha_l \frac{\partial p_g}{\partial x} \quad (4)$$

$$+ (p_l - p_i) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = \alpha_l \rho_l g_x - M_g$$

여기서 α, ρ, v, p 와 g 는 각각 기공률, 밀도, 유동 속도, 압력 그리고 중력가속도를 나타낸다. 또한, Γ_g 는 질량 원천항을, M_g 운동량 원천항을 나타내며 하첨자 g, l 및 i 는 기체, 액체 및 계면에서의 값을 가리킨다. 여기서 가상적인 계면압력, p_i , 에 의하여, 식 (1)-(4) 는 스스로 닫히지 않는 방정식계를 이룬다. 따라서 계면압력도약을 나타내는 $(p_k - p_i)$ 항을 얻기 위한 추가적인 방정식이 요구된다.

계면압력도약항을 풀기 위하여, 유한한 계면의 두께를 Delta function 의 형태로 가정하여 유도한 수학적 모델이 Lee 등^(9, 10) 에 의하여 다음과 같은

형태로 유도되었다.

$$\Delta p_g \equiv p_g - p_i = \frac{2\sigma}{R} \frac{r}{r+1} \quad (5)$$

$$\Delta p_l \equiv p_l - p_i = \frac{2\sigma}{R} \frac{1}{r+1} \quad (6)$$

여기서 r 은 유동형태에 따라 정의되는 Bulk modulus 의 비, L_g/L_l , 이며 기포류의 경우 1.0 을 사용한다⁽¹¹⁾. 선행연구결과^(9, 10)에서 알 수 있듯이, 유동형태에 따라 Bulk modulus 의 조합은 세가지로 나뉘고 이에 따라 각 상에서의 음속(Sound speed) 도 방정식계의 실수 고유치들로서 각각 다르게 표현된다. 그럼에도 불구하고 평균기포반경을 나타내는 계면곡률반경 (Radius of curvature) R 을 구하기 위한 추가적인 관계식이 요구되는데 이를 얻기 위한 과정은 다음과 같다.

먼저, 음속의 정의, $[\partial \rho_k / \partial p_k]_{s_k} = 1/C_k^2$, 을 사용하고, σ 와 R 을 일정하다고 가정하고 Young-Laplace 식을 미분함으로써 $\partial p_g / \partial x = \partial p_l / \partial x$ 의 관계를 얻는다. 이를 네 개의 Primitive variable α_g , p_g , v_g 및 v_l 들을 써서 지배방정식에 대입하면 방정식 (1)-(4) 는 다음과 같이 전개된다.

$$\rho_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \frac{\alpha_g}{C_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \rho_g v_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \quad (7)$$

$$+ \frac{\alpha_g v_g}{C_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \rho_g \alpha_g \frac{\partial v_g}{\partial x} = \Gamma_g$$

$$\rho_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \frac{\alpha_l}{C_l^2} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \rho_l v_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} \quad (8)$$

$$+ \frac{\alpha_l v_l}{C_l^2} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \rho_l \alpha_l \frac{\partial v_l}{\partial x} = -\Gamma_g$$

$$\alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial t} + \alpha_g \frac{\partial p_g}{\partial x} + \alpha_g \rho_g v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \quad (9)$$

$$+ \frac{2\sigma}{R} \frac{r}{r+1} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \alpha_g \rho_g g_x + M_g$$

$$\alpha_l \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} + \alpha_l \frac{\partial p_g}{\partial x} + \alpha_l \rho_l v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \quad (10)$$

$$+ \frac{2\sigma}{R} \frac{1}{r+1} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = \alpha_l \rho_l g_x - M_g$$

이것을 행렬식으로 표현하면

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = C \quad (11)$$

와 같고 이때 A 와 B 는 각각 시간 및 공간 미분항에 대한 계수 행렬이며, U 는 Primitive variable들에 대한 State vector, C 는 실험식으로 이루어진 Source vector 이다.

이와 같이 유도된 지배방정식으로 몇 가지 검증문제를 풀기 위하여 Staggered spatial mesh⁽¹²⁾. 를 이용한 Advanced Semi-Implicit Method (ASIM) 를 개발하였다. 또한, 수치안정성을 개선하기 위하여 운동량방정식의 압력도약항을 내재적으로 풀고, 수치안정성에 대한 영향을 종합적으로 분석하기 위하여 Drew 등⁽¹³⁾ 이 제안한 다음과 같은 형태의 가상질량항도 함께 사용하였다.

$$M_g = C \alpha_g \alpha_l \rho_m \left(\frac{\partial (v_g - v_l)}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \quad (12)$$

이때 C 는 기공률의 함수로 경험에 의존하는 계수이고, 일반적으로 이상적인 구형의 기포를 가정할 경우 $C=0.5$ 를 사용한다.

3. 개선된 Semi-Implicit 기법 (ASIM)

지배방정식 (7) 로부터 (10) 까지는 압력과 기공률에 대하여 $(2n \times 2n)$ 행렬로 표현된다. 혹은, $n \times n$ 행렬을 기공률에 대한 중간시간의 값을 Iteration method로 구할 수 있다. 이때, 그림 1 에서 보여주는 것과 같이, 스칼라양인 압력, 밀도 및 기공률 들은 셀 중앙에서 정의되고 벡터양인 속도성분들은 셀의 경계에서 정의된다. 각 셀들에 대한 차분방정식들은 Liles & Reed⁽¹²⁾ 에 의한 방법에 따라 다음과 같이 차분할 수 있다.

우선, 질량방정식은 다음과 같은 Sum & difference mass equation 들로 표현된다.

Sum Mass:

$$V_L \left[\begin{array}{l} \alpha_{g,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) + \alpha_{l,L}^n (\tilde{\rho}_{l,L}^{n+1} - \rho_{l,L}^n) \\ + (\rho_{g,L}^n - \rho_{l,L}^n) (\alpha_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) \end{array} \right] + \left(\begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{g,j+1} & \rho_{g,j+1} v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} \end{array} - \begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{g,j} & \rho_{g,j} v_{g,j}^{n+1} A_j \end{array} \right) \Delta t \quad (13)$$

$$+ \left(\begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{l,j+1} & \rho_{l,j+1} v_{l,j+1}^{n+1} A_{j+1} \end{array} - \begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{l,j} & \rho_{l,j} v_{l,j}^{n+1} A_j \end{array} \right) = 0$$

Difference Mass:

$$V_L \left[\begin{array}{l} \alpha_{g,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) - \alpha_{l,L}^n (\tilde{\rho}_{l,L}^{n+1} - \rho_{l,L}^n) \\ + (\rho_{g,L}^n - \rho_{l,L}^n) (\alpha_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) \end{array} \right] + \left(\begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{g,j+1} & \rho_{g,j+1} v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} \end{array} - \begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{g,j} & \rho_{g,j} v_{g,j}^{n+1} A_j \end{array} \right) \Delta t \quad (14)$$

$$- \left(\begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{l,j+1} & \rho_{l,j+1} v_{l,j+1}^{n+1} A_{j+1} \end{array} - \begin{array}{cc} \cdot^n & \cdot^n \\ \alpha_{l,j} & \rho_{l,j} v_{l,j}^{n+1} A_j \end{array} \right) = 0$$

여기서 등온과정의 경우, 각 상의 밀도의 중간시간 값은 n 시간대의 밀도로부터 선형화 된 상태관계식을 써서 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\dot{\rho}_{k,L}^{n+1} = \rho_{k,L}^n + \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p} \right)_L^n (p_L^{n+1} - p_L^n) \quad (15)$$

점을 표시한 값들은 각 상의 유속, $v_{g,j}$ 와 $v_{l,j}$ 에 따른 상류의 값을 나타낸다. 이러한 Upwind 값 ϕ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\phi}_{k,j} = \frac{1}{2}(\phi_K + \phi_L) + \frac{1}{2} \frac{|v_{k,j}|}{v_{k,j}} (\phi_K - \phi_L) \quad (16)$$

결국, 방정식계는 다음의 형태를 가지게 되고, 여기서 행렬 A 와 벡터 B, F, 및 G 는 전 시간대의 변수들만을 포함한다.

$$A \cdot \begin{bmatrix} \Delta \alpha_{g,L} \\ \Delta p_L \end{bmatrix} = B + F \cdot \begin{bmatrix} v_{g,j}^{n+1} \\ v_{l,j}^{n+1} \end{bmatrix} + G \cdot \begin{bmatrix} v_{g,j+1}^{n+1} \\ v_{l,j+1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

그리고 Δ 는 계산시간간격 내에서의 물성치 변화를 나타낸다. 즉, $\Delta \phi = \phi^{n+1} - \phi^n$. 마찬가지로 운동량 방정식의 경우도 질량방정식과 같이 Sum and difference momentum equation 들로 다음과 같이 표현할 수 있다.

Sum Momentum:

$$\begin{aligned} & (\alpha_g \rho_g)_j^n (v_g^{n+1} - v_g^n)_j \Delta x_j + (\alpha_l \rho_l)_j^n (v_l^{n+1} - v_l^n)_j \Delta x_j \\ & + \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g \right)_j^n \left[(v_g^2)_L^n - (v_g^2)_K^n \right] \Delta t \\ & + \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}_l \dot{\rho}_l \right)_j^n \left[(v_l^2)_L^n - (v_l^2)_K^n \right] \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g \right)_j^n VIS_{g,j}^n + \left(\dot{\alpha}_l \dot{\rho}_l \right)_j^n VIS_{l,j}^n \right] \Delta t \\ & = - \left[(p_L - p_K) + (\Delta p_g - \Delta p_l)(\alpha_L - \alpha_K) \right]^{n+1} \Delta t \\ & + (\rho_m)_j^n g_x \Delta x_j \Delta t \end{aligned} \quad (18)$$

Difference Momentum:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{C \rho_m^2}{\rho_g \rho_l} \right]_j^n \left[(v_g^{n+1} - v_g^n)_j \Delta x_j - (v_l^{n+1} - v_l^n)_j \right] \Delta x_j \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g}{\alpha_g \rho_g} \right]_j^n \left[\left(\dot{v}_g v_g \right)_L^n - \left(\dot{v}_g v_g \right)_K^n \right] \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{\alpha}_l \dot{\rho}_l}{\alpha_l \rho_l} \right]_j^n \left[\left(\dot{v}_l v_l \right)_L^n - \left(\dot{v}_l v_l \right)_K^n \right] \Delta t \\ & + \left[\left(\frac{C \rho_m^2 v_l}{\rho_g \rho_l} \right) (v_{g,L}^n - v_{g,K}^n) - \left(\frac{C \rho_m^2 v_g}{\rho_g \rho_f} \right) (v_{l,L}^n - v_{l,K}^n) \right] \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = - \left[(\rho_l - \rho_g) / (\rho_g \rho_l) \right]_j^n (p_L - p_K)^{n+1} \Delta t \\ & + (\rho_m FI)_j^n (v_g^{n+1} - v_l^{n+1})_j \Delta x_j \Delta t \\ & - \left[\left(\frac{\alpha_l \rho_l \Delta p_g + \alpha_g \rho_g \Delta p_l}{\alpha_g \rho_g \alpha_l \rho_l} \right)_j^n (\alpha_{g,L} - \alpha_{g,K})^{n+1} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

이때,

$$VIS_{k,j}^n = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & |v_{k,L}^n| \left[(v_k^n)_{j+1} - (v_k^n)_j \right] \\ & - |v_{k,K}^n| \left[(v_k^n)_j - (v_k^n)_{j-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$F_l = K_l \frac{1}{\alpha_l \rho_g} |v_g - v_l| \quad (21)$$

위의 식 (20) 의 VIS 항은 인공감쇄항으로서 수치적인 안정성의 개선을 위하여 사용되어 왔으나 해의 정확도를 감소시키는 경향이 있다.

유한차분화된 운동량방정식 (18), (19) 는 다음과 같은 간단한 행렬식으로 정리할 수 있다.

$$C \cdot \begin{bmatrix} v_{g,j}^{n+1} \\ v_{l,j}^{n+1} \end{bmatrix} = D - E \cdot \begin{bmatrix} \Delta \alpha_L - \Delta \alpha_K \\ \Delta p_L - \Delta p_K \end{bmatrix} \quad (22)$$

이때, 식 (22) 를 식 (17) 에 대입하면, 압력과 기공률이 포함된 단일의 방정식을 얻게 된다. 이것을 각 체적에 적용하면 n 개의 체적을 포함하는 $n+1$ 시간대의 압력과 기공률에 대한 $(2n \times 2n)$ 의 선형방정식계를 얻을 수 있다. 다음으로, (2×2) Block tri-diagonal matrix solver 를 사용하여 각 체적에 대한 Δp 와 $\Delta \alpha_g$ 를 구한다. 이 값들을 식 (22) 에 대입하면 $n+1$ 시간대의 각 상들의 속도를 구할 수 있다.

현재의 수치해법은 식(17), (22) 에서 기공률의 중간시간값을 사용하여 반복적으로 구하는 방법에 기초를 두고 있다. 만일 기공률을 n 시간대의 값을 취할 경우, 식 (17) 및 (22) 는 $n+1$ 시간대의 압력만으로 구성되는 $n \times n$ Tridiagonal 행렬로 정리된다. 이때 수렴조건을 만족하기 위하여 한번 혹은, 두 번의 반복계산만이 요구되므로 기존의 Fully implicit method 에 비하여 계산효율이 개선됨을 알 수 있다. 결과적으로, 본 수치해법을 사용한 ASIM (Advanced Semi-Implicit Method) 코드의 특징은, 해의 물리적인 성질 및 수치적인 안정성을 개선시키기 위하여, 기공률을 Sub-iteration 에 의하여 속도 및 압력과 함께 내재적으로 연계한 것이라고 할 수 있다. 만약, 계면압력도약항을 무시할 경우, 기존과 같이 질량 및 운동량방정식을 압력과 속도에 대하여 내재적으로, 기공률에 대하여는 외재적으로 처리하게 된다.

4. 계산 결과

계면압력도약항 및 가상질량항의 미분항들 모두는 수치적인 안정성을 증가시키는 데에 중요한 역할을 한다. 그러나, 선행연구에 의하면 그들의 조합은 음파를 산란시키고 음속을 저하시키는 부정적인 결과를 초래하기도 하는 것으로 알려져 있다. 이에 본 연구에서는, 이러한 운동량교환 및 원천항들이 수치적 안정성이나 해의 정확성에 미치는 영향을 몇 가지 계산을 통하여 고찰하고자 한다.

첫번째 예로서, 초기에 0.01 정도의 기공률의 불연속이 대기압, $\alpha_g = 0.1$, $v_g = 5m/s$, 그리고 $v_l = 0.5m/s$ 의 조건에서 수평관을 따라 전파하는 문제를 가상해 보았다. 이때의 시간간격 및 한 노드의 길이는 각각 0.005s 및 0.1m이다. 그림 2는 계면압력도약항 및 가상질량항을 고려하지 않았을 경우, 기본방정식들으로써 관내 기공률 교란의 전파를 계산한 결과를 보여준다. 즉, 시간 전진에 따라 진폭이 커지면서 수치적 불안정성이 나타남을 알 수 있다.

각 상의 운동량방정식에 가상질량항들을 사용할 경우, 그림 3에서 보여주는 바와 같이, 팽창파 (Expansion wave) 만이 오른쪽으로 전파할 뿐 왼쪽으로 전파하여야 할 압축파 (Compression wave)는 나타나지 않는다. 더구나, 아무런 기공률의 파동도 나타나지 않는 파이프 왼쪽 끝에서 압력의 진동이 나타나고 있으나 그 진폭은 점차 줄어들고 있다: 그림 4 참고. 한편, 운동량방정식에 계면압력도약항만을 사용할 경우에는 그림 5가 보여주듯이 안정적인 압축 및 팽창파들이 진동없이 서로 반대방향으로 전파함을 알 수 있다. 그들의 전파속도는 식 (15)에 의하여 예측된 결과와 잘 일치하며 이는 식 (5, 6)에 나타나는 기포의 크기에 의존한다.

두 번째 예는, 해석적인 해와 비교할 수 있는 water faucet 문제이다. 물은 수도꼭지로부터 다음의 조건으로 흘러내린다: $v_g = 10$, $v_l = 0m/s$, 및 $\alpha_g = 0.2$. 이때 계산 격자는 98개의 노드들로 이루어지고, 계산 시 계면에서의 마찰이나 계면을 통한 열전달은 고려하지 않는다. 그림 6은 인공점성, 가상 질량 및 계면압력도약 등이 고려되지 않았을 경우의 기공률의 변화를 보여준다. 이 경우, 시간이 지날수록 해는 불안정해지고 부정확해짐을 알 수 있다.

계면압력도약항과 인공점성항을 함께 사용하였

을 경우, 그림 7에서 보여주는 것과 같이, 얻어진 해들은 안정되고 그 정확도가 향상되는 것을 볼 수 있다. 또한, 계면압력도약항 만을 사용하였을 경우 해의 점성소산이 매우 적음을 알 수 있다.

5. 결론

2-유체모델을 쌍곡형 방정식계로 변환시키기 위하여 계면압력도약항이 사용되었고, 이 항은 수치적 안정성 및 계산의 효율 증대를 위하여 개선된 Semi-Implicit 기법 (ASIM) 을 써서 내재적으로 계산되었다. 이에 따라 2-유체모델은 기존의 첨가항들을 사용하지 않고도 쌍곡형으로 변환되었고 고 유체들은 기공률 및 압력파의 전파속도를 나타냄으로써 물리적 의미를 갖게 되었다.

ASIM 코드를 사용할 경우, 기공률 교란의 전파 및 Water Faucet 문제를 계산함으로써, 계산결과의 안정성이 증가하고 해의 수치적 소산이 감소함을 알 수 있었다. 또한 기존의 Fully implicit 기법에 의한 계산보다, 개선된 Semi-Implicit 기법에 의한 계산이 더욱 빠르고 효율적임을 알 수 있었다. 아울러 계면압력도약항은 그 자체만으로 물리적인 의미를 가질 뿐만 아니라 수치스킵의 안정성을 증가시키는 장점을 가지고 있음을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- (1) H. B. Stewart, Stability of two-phase flow calculation using two-fluid models, *Journal of Computational Physics*, vol. 33, pp. 259-270, 1979.
- (2) V. H. Ransom and D. L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, vol. 53, pp. 124-151, 1984.
- (3) J. R. Travis et al., Numerical calculation of two-phase flows, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 61, pp. 1-10, 1976.
- (4) J. H. Stuhmiller, The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 551-560, 1977.
- (5) J. C. Rousseau and R. L. Ferch, A note on two-phase separated flow models, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 5, pp. 489-493, 1979.
- (6) K. H. Ardron, One-dimensional two-fluid equations for horizontal stratified two-phase flow, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 6, pp. 295-304, 1980.
- (7) V. H. Ransom and M. P. Scofield, Two-pressure hydrodynamic model for two-phase separated flow, *INEL Report SRD-50-76*, 1976.
- (8) A. Biesheuvel and L. Van Wijngaarden, Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 148, pp. 301-318, 1984.

- (9) S. J. Lee, K. S. Chang, and K. Kim, Pressure wave speeds from the characteristics of two fluid two-phase hyperbolic equation system, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 24, pp. 855-866, 1998.
- (10) S. J. Lee, K. S. Chang, and S. J. Kim, Surface tension effect in the two-fluid equation system, *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol. 41, pp. 2821-2826, 1998.
- (11) J. A. Boure, Properties of kinematic waves in two-phase flow; consequences on the modelling strategy. *Proc. Euro. Two-Phase Flow Group Meeting, Brussels, May 30-June 1, 1988.*
- (12) D. R. Liles and W. H. Reed, A Semi-Implicit Method for Two-Phase Fluid Dynamics, *Journal of Computational Physics*, vol. 26, pp. 390-407, 1978.
- (13) D. A. Drew, L. Y. Cheng, R. T. Lahey Jr., The analysis of virtual mass effects in two-phase flow, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 5, pp. 233-242, 1979.

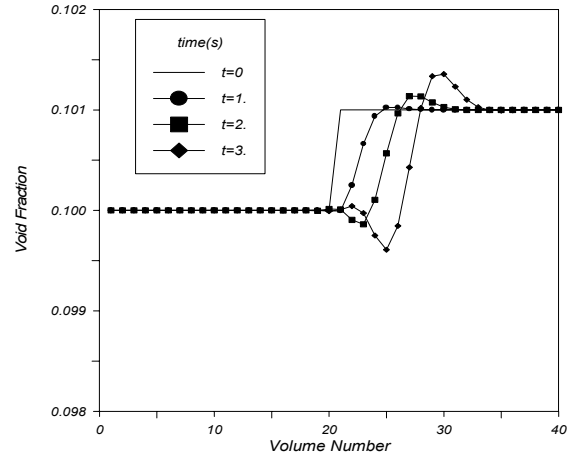


Fig. 2 Void fraction wave calculated by using the basic two-phase equations

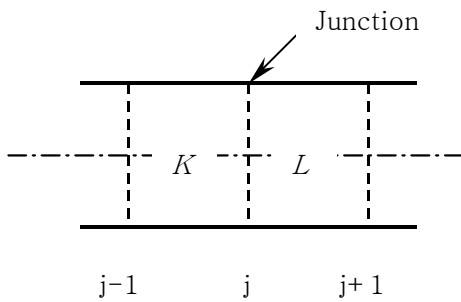


Fig. 1 Nodes for the semi-implicit scheme

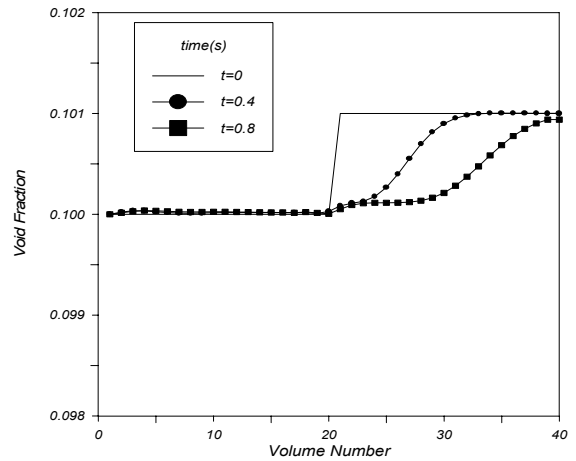


Fig. 3 Void fraction wave calculated by using the virtual mass terms

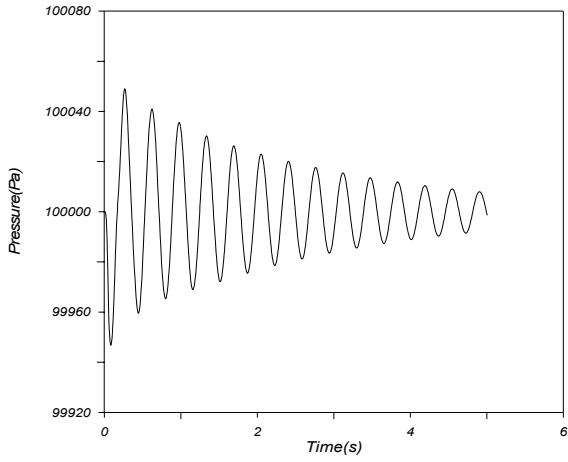


Fig. 4 Pressure oscillation at the inlet of the pipe with the virtual mass terms

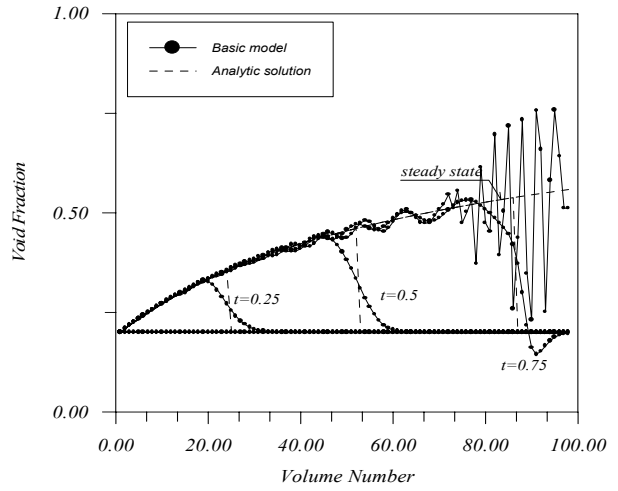


Fig. 6 Water faucet problem calculated by using the basic two-phase equations

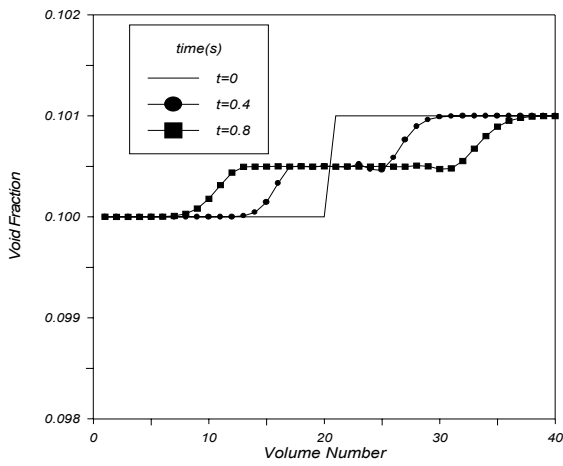


Fig. 5 Void fraction wave calculated by using the interfacial pressure jump terms

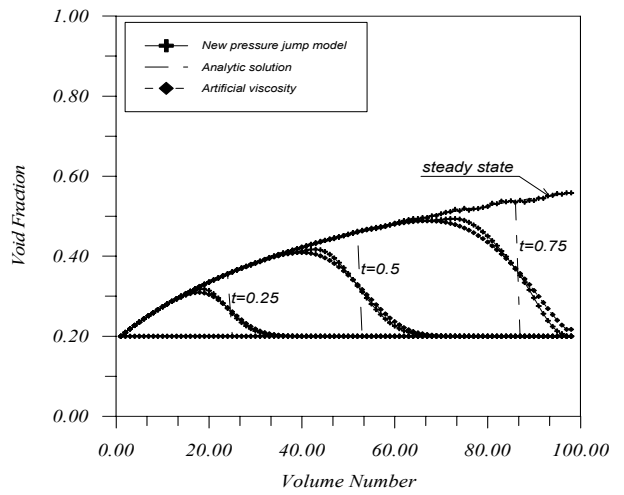


Fig. 7 Water faucet problem calculated by using the interfacial pressure jump terms and those terms with artificial viscosity