

탄성 변형 영역을 고려한 비정상 평면 변형 이상 공정 이론

이원오* · 정관수** · Owen Richmond ***

Nonsteady Plane-strain ideal forming with elastic dead zone

W. Lee, K. Chung and O. Richmond

Abstract

Ever since the ideal forming theory has been developed for process design purposes, application has been limited to sheet forming and, for bulk forming, to two-dimensional steady flow. Here, application for the non-steady case was performed under the plane-strain condition based on the theory previously developed. In the ideal flow, material elements deform following the minimum plastic work path (or mostly proportional true strain path) so that the ideal plane-strain flow can be effectively described using the two-dimensional orthogonal convective coordinate system. Besides kinematics, for a prescribed final part shape, schemes to optimize a preform shape out of a class of initial configurations and also to define the evolution of shapes and boundary tractions were developed. Discussions include the two problematic issues on internal tractions and the non-monotonous straining. For demonstration purposes, numerical calculations were made for a bulk part under forging.

Key Words : Rigid-perfect plasticity, Nonsteady ideal bulk forming, Method of characteristics, Orthogonal convective coordinate system, Elastic dead zone, Non-monotonous straining

1. 서 론

공정 시 에너지 소비 면에서 가장 최적의 변형 조건을 제시하기 위한 이상 공정 이론(ideal forming theory)에서는 매순간에서의 주 인장 변형 선(principal stretch lines)들이 공정 내내 지정된 물체선(material lines)을 따라야 하고, 모든 물질점에서의 주 변형율(principal strain rates)의 부호가 고정되어야 한다^(1,2). 이러한 변형 조건을 만족시키는 평면 변형 하에서의 등방 강 완전 소성체(isotropic rigid-perfect plastic materials)의 변형은 균일한 면적 분포를 갖는 직교 이상 유동 좌표계(orthogonal convective coordinate system)를 이용하여

표현할 수 있다⁽³⁾. 이러한 이상 유동 좌표계를 이용한 이상 공정을 구현하기 위해 특성선에 의한 해법(method of characteristics)에 기초를 둔 수치 해석 코드가 개발되었고, 아울러 주어진 최종 형상에 대하여 가장 적합한 초기 형상을 얻기 위한 최적화 이론과 중간 형상 및 각 형상에서의 응력 분포와 경계 외력에 대한 이론이 마련되었다.

응용 예로서 단조 공정 부품에 대한 이상 유동 좌표계를 구현하고, 최적의 초기 형상과 각각의 중간 형상에서의 응력 분포와 경계 외력을 구해보고 중간 형상 구현 시 발생하는 탄성 변형 영역(elastic dead zone)과 비단조 변형(non-monotonous straining) 문제에 대하여 논하여 보았다.

* 서울대학교 재료공학부

** 서울대학교 신소재공동연구소

*** Deceased (1928-2001), late Director of ALCOA Technical Center

2. 이상 유동 좌표계와 평형 방정식

평면 변형 하에서 균일한 면적 분포를 갖는 이상 유동 좌표계는 두 개의 기하변수 (h, ψ) 로 표현이 가능하고 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$hh_{,\eta} + \psi_{,\xi} = 0 \quad h^3\psi_{,\eta} + h_{,\xi} = 0. \quad (1)$$

여기서 (ξ, η) 는 물체선에 고정되어 있는 주변형선으로 이루어진 이상 유동 좌표계의 변수이고 h 와 ψ 는 각각 ξ -기저 벡터의 크기와 x -축에 대한 사이각이다. 식(1)은 특성선에 의한 해법에 의해

$$\begin{aligned} d \ln h - d\psi &= 0 \text{ for which } \eta_{,\xi} = -h^2 \text{ } (\alpha\text{-line}) \\ d \ln h + d\psi &= 0 \text{ for which } \eta_{,\xi} = h^2 \text{ } (\beta\text{-line}) \end{aligned} \quad (2)$$

이 되고, 평면 변형 하에서의 평형 방정식은

$$\begin{aligned} p/2k + \ln h &= C^+ \text{ for the region with } \dot{h} \geq 0 \\ p/2k - \ln h &= C^- \text{ for the region with } \dot{h} \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

이 된다. 여기서 p 는 등방응력, k 는 전단항복응력, C^+ 와 C^- 는 경계 응력 조건에 의해 결정되는 임의의 상수이다.

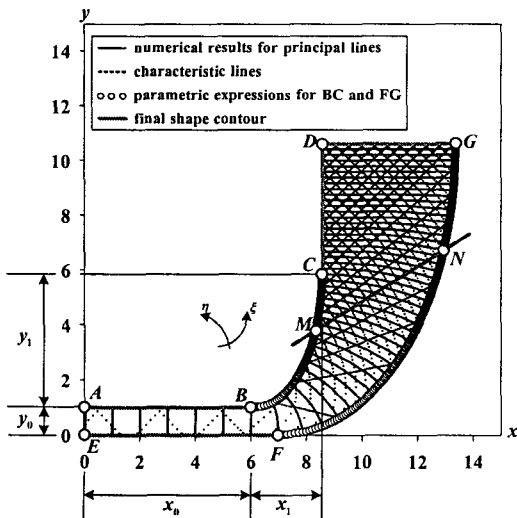


Fig. 1 The final part configuration analytically and numerically obtained

3. 응용 및 결과

3.1 이상 유동 좌표계-해석해와 수치해

Fig. 1 에 y 축에 대칭을 이루는 주어진 최종형상의 모습을 나타내었고, 각각의 경계선을 매개변수화하여 나타내면 AE 는 $x=0$, EF 는 $y=0$, AB 는 $y=y_0$, CD 는 $x=x_0+x_1$, DG 는 $y=y_1+y_0(1+e^{\pi/2})$ 으로 표현할 수 있고

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + x_1 \frac{\tan \theta}{y_1 d(\theta)} \\ y(\theta) &= y_0 + y_1 (1 - d(\theta)^{-1}) \end{aligned} \right\} \text{ for BC} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + x_1 \frac{\tan \theta}{y_1 d(\theta)} \\ &\quad + e^{\theta-r_0} \sqrt{y_0} (\cos \theta + \sin \theta) \\ y(\theta) &= y_0 + y_1 (1 - d(\theta)^{-1}) \\ &\quad - e^{\theta-r_0} \sqrt{y_0} (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned} \right\} \text{ for FG} \quad (5)$$

이다. 여기서 매개 함수 $d(\theta) = \sqrt{1 + (x_1 \tan \theta / y_1)^2}$ 이고, θ 의 범위는 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 이다. 사용한 상수는 $x_0 = 6.0$, $x_1 = 2.4117$, $y_0 = 1.0$, $y_1 = 4.8373$, 그리고 $r_0 = -(\ln y_0)/2$ 이다. 또한 경계선 ABCD 와 EFG 에서의 h 의 분포는 다음과 같다.

$$h^{ABCD} = h^{EFG} = e^{-\theta} / y_0. \quad (6)$$

식(6)으로부터 식(2)를 계산하는 수치 코드에 의한 결과 또한 Fig. 1 에 나타내었는데 해석해(매개변수)에 의한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

3.2 최적 초기 형상

초기 형상을 얻는 방법은 여러 가지가 있지만, 여기서는 균일한 $h(h^0)$ 값을 갖는 직각 사각형을 초기 형상으로 가정한다. 또한 초기 형상의 최적화를 위한 이론으로 절대 변형율의 평균값 K 을 정의하면

$$K = \frac{\int |\epsilon| dA}{A} \quad (7)$$

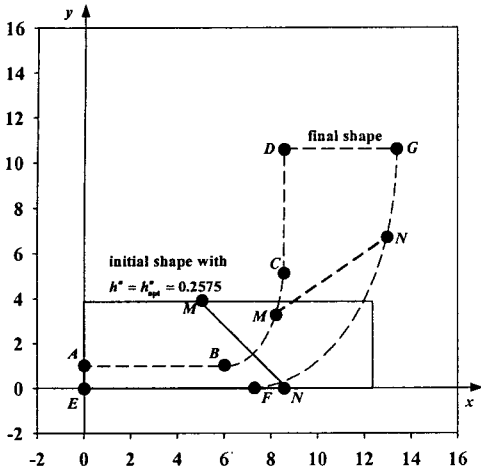


Fig. 2 The optimized initial and final shapes

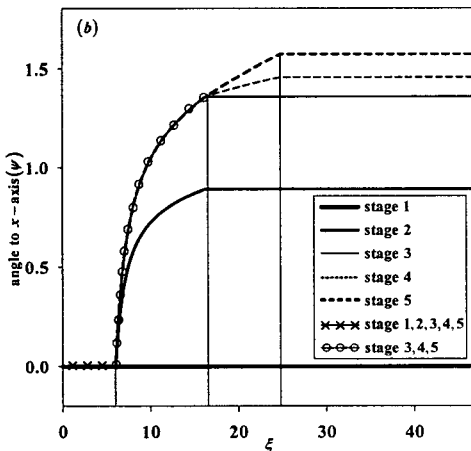
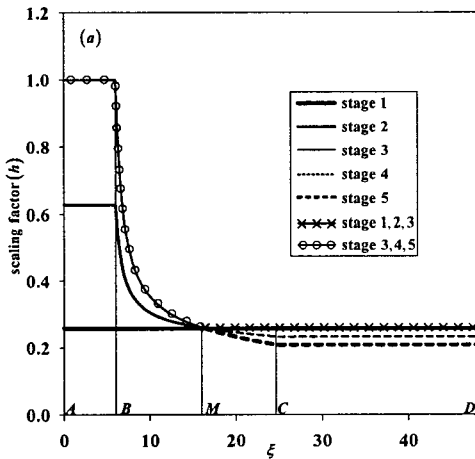


Fig. 3 Distribution of the (a) h and (b) ψ values along the boundary line

이 되고 여기서 $\varepsilon = \ln(h^f/h^o)$, A 는 물체의 면적을 나타내고 위 첨자 f 와 o 는 각각 최종 형상과 초기 형상을 뜻한다. 식(7)에서 최적의 h^o 는 $dK/dh^o = 0$ 를 통해 K 를 최소화하여 얻을 수 있으며 그 값은 $h^o (= h_{opt}^o) = 0.2575$ 가 되고 Fig. 2에 최적의 초기 형상을 나타내었다. Fig. 2에서 MN 은 $h = h_{opt}^o$ 인 직선 특성선으로 탄성 변형선(elastic dead line)이 되며 물체는 MN 을 기준으로 증가 변형을 영역(positive straining zone)인 $ABMNF$ 와 감소 변형을 영역(negative straining zone)인 $DCMNG$ 로 나뉜다.

3.3 탄성 변형 영역과 비단조 변형을 고려한 중간 형상

최적 초기 형상을 얻은 뒤 중간 형상을 얻는 과정에서 탄성 변형 영역에서의 내부 마찰력(internal frictional force)과 비단조 변형에 의한 잉여 에너지의 발생을 없애야 한다. 한가지 방법으로는 h^o 를 최종형상의 최대값 혹은 최소값으로 선택하고 h 와 ψ 를 선형 변형시키면 전 영역에 걸쳐서 탄성 변형 영역이 없는 중간 형상을 얻을 수 있다⁽⁴⁾.

여기서는 Fig. 3과 같이 2단계 변형을 고려한다. $h = c \exp(\pm\psi)$ 의 관계를 가지고, 1단계(stage 1,2,3) 변형에서는 경계선 MD 는 고정시킨 채 AM 에서만 h 와 ψ 를 변형시킨 후, 2단계(stage 3,4,5)에서 MD 를 변형시키는 것이다. 이러한 과정에 의한 중간 형상들을 Fig. 4에 나타내었다.

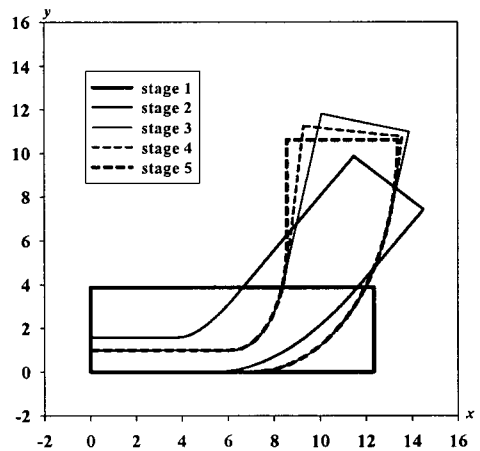


Fig. 4 Evolution of the part shapes

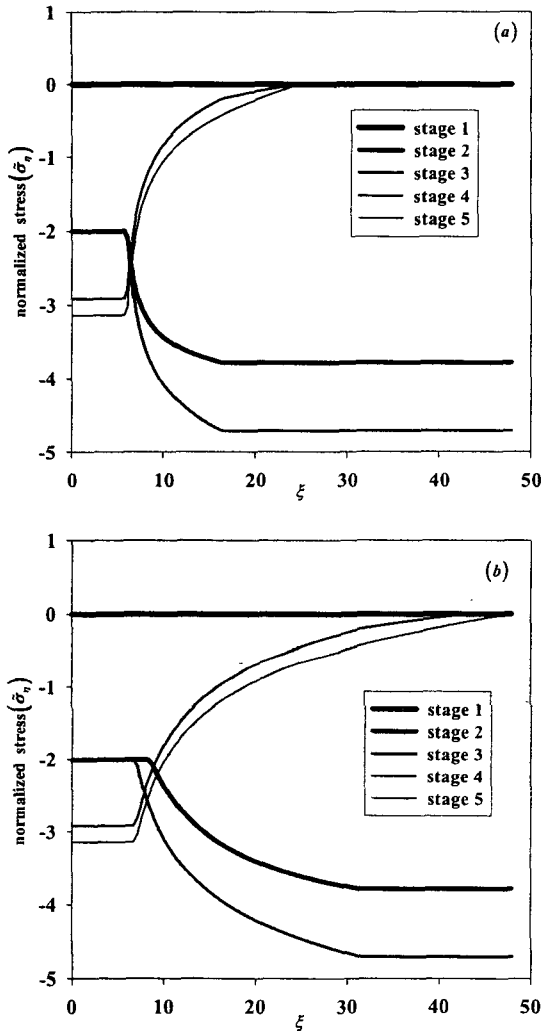


Fig. 5 Evolution of the normalized stress distribution along the boundary lines (a) ABCD and (b) EFG

3.4 경계 외력 (boundary traction)

모든 중간 형상마다 응력과 경계 외력의 분포는 여러 경계 조건을 통해 식(3)의 C^+ 와 C^- 을 결정하여 구할 수 있다. 여기서는 압축 경계 외력 조건 (compressive boundary tractions condition) 을 고려하면

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^{AE} &= 0 \quad \text{during step I} \\ \sigma_{\eta}^{DG} &= 0 \quad \text{during step II} \end{aligned} \quad (8)$$

이 되어야 하고 여기서 σ_{ξ} 와 σ_{η} 는 이상 유동 좌표계의 응력이다. 식(3)과 (8)에 의해

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= 2k \ln \frac{h}{h^{AE}}, & \sigma_{\eta} &= 2k \left(\ln \frac{h}{h^{AE}} - 1 \right) & \text{during step I} \\ \sigma_{\xi} &= -2k \left(\ln \frac{h}{h^{DG}} + 1 \right), & \sigma_{\eta} &= -2k \ln \frac{h}{h^{DG}} & \text{during step II} \end{aligned} \quad (9)$$

가 되고 경계선 ABCD 와 EFG 에서의 $\bar{\sigma}_{\eta} (= \sigma_{\eta}/k)$ 의 분포를 Fig. 5 에 나타내었다.

4. 요약 및 결론

비정상 평면 변형 이상 공정 이론에 의해 이상 유동 좌표계를 구현하였고, 이를 단조 공정 제품에 응용하여 최적화된 초기 형상과 탄성 변형 영역과 비단조 변형이 없는 중간 형상들을 구하였다. 또한 압축 경계 외력 조건에 대한 경계 외력의 분포를 알 수 있었다. 이러한 시행 착오를 줄이는 직접 설계법인 이상 공정 이론은 실제 단조 공정의 최적 설계에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

후기

본 연구는 철강 연구 센터의 지원을 받아 수행된 것으로 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) K. Chung and O. Richmond, 1993, "A deformation theory of plasticity based on minimum work paths", *Int. J. Plasticity*, Vol. 9, pp. 907~920.
- (2) K. Chung and O. Richmond, 1994, "The mechanics of ideal forming", *J. Appl. Mech.*, Vol. 61, pp. 176~181.
- (3) O. Richmond and S. Alexandrov, 2000, "Nonsteady planar ideal plastic flow: general and special analytic solution", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 1735~1759.
- (4) K. Chung, W. Lee, T.J. Kang and J.R. Youn, 2002, "Nonsteady plane-strain ideal forming without elastic dead zone", *Fiber Polym.*, Vol. 3, pp. 120~127.