

구조물의 고유특성 제어를 통한 방사소음 저감

Reduction of radiated noise by eigen-property control

최성훈*
Sunghoon Choi

ABSTRACT

The interaction between a vibrating structure and a surrounding acoustic medium determines the acoustic power propagating into the far-field. A straightforward method to reduce the radiated power is to reduce the vibration of the structure. However it is more efficient to control the modes of the structure separately since each vibration mode of the structure has different radiation efficiency. An efficient method to reduce the sound radiation in the low frequency region is proposed by reducing the radiation efficiency of the structure.

1. 서론

전통적인 능동소음 제어에서는 소음원이 아닌 외부 제어음원을 이용하여 제어하고자 하는 음장 내에서 특정한 부분의 소음을 최소화 하는 것이 일반적인 방법이다. 이와 반면에 능동 구조음향제어(Active Structural Acoustic Control)는 구조물의 방사소음을 최소화하기 위하여 구조물의 진동을 제어하는 것으로, 단순히 구조물의 진동을 최소화 하는 것이 아니라 구조물의 진동 형상에 따른 음향방사 특성, 즉 고유모드의 음향방사 효율을 고려하여 방사소음이 최소가 되도록 진동을 제어하는 것이다. 본 연구에서는 구조물의 고유 진동모드와 고유진동수 등의 고유특성을 제어하여 방사소음을 최소화 할 수 있는 방법을 제안하며 빔 구조물에 대한 시뮬레이션을 통해 검증한다.

2. 비방사모드의 개념

빔이나 판과 같은 평면 구조물에서의 저주파 음향 방사는 구조물 표면에서의 속도분포와 직접적으로 연관이 있다. 비방사모드는 평판 구조물 위의 속도분포를 적분한 값, 즉 체적속도(volume velocity)가 0이 되는 모드로, 이 모드는 $k_0 a \ll 1$ 일 때 방사효율이 매우 낮다.¹ 이 식에서 k_0 는 공기 중의 파수(wavenumber), a 는 구조물의 특성 치수를 나타낸다. 저주파영역에서 이들 모드는 쌍극자(dipole)나 사극자(quadrapole)처럼 고차의 방사패턴을 보이기 때문에 방사효율이 낮게 된다. 만약 구조물의 고유특성을 이러한 비방사모드의 특성을 갖도록 제어할 수 있다면 저주파 영역에서의 방사소음을 효율적으로 저감할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 참고문헌 [1]의 원통형 좌표계(cylindrical coordinates)의 파수변환(wavenumber domain transformation) 식을 이용한다. 비방사모드의 특성을 살펴보기위해 파수영역에서 구조물의 진동분포와 원거리 음장(far-field pressure)에서의 음압과의 관계를 보면 다음과 같다.

*한국철도기술연구원 선임연구원

$$p(R, \theta, \phi) = \frac{j\rho_0\omega e^{jkR}}{2\pi R} \mathbb{W}(\overline{k_x}, \overline{k_y}) \quad (1)$$

이 식에서 $\overline{k_x} = k_0 \sin \theta \cos \phi$, $\overline{k_y} = k_0 \sin \theta \sin \phi$ 이며 $\mathbb{W}(\overline{k_x}, \overline{k_y})$ 는 $w(x, y)$ 의 파수변환, 즉 공간 푸리에 변환(Spatial Fourier transform)이다. 체적속도는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V = j\omega \int \int_{\Omega} w(x, y) dx dy \quad (2)$$

이 식에서 Ω 는 평면 구조물의 표면을 나타낸다. 구조물이 배플(baffle)위에 위치한다고 가정하면 Ω 밖의 위치에서의 속도는 0이 되므로 식 (2)에 파수변환을 적용하고, $k_x=0$, $k_y=0$ 을 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\mathbb{W}(k_x=0, k_y=0) = j\omega \int \int_{\Omega} w(x, y) dx dy \quad (3)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이 식 (3)은 체적속도를 나타내는 것이며, 식 (1)에서 $k_x=0$, $k_y=0$ 인 경우에는 원거리 음장에서의 음압은 체적속도에 비례한다는 것을 알 수 있다. 이 경우는 $\theta=0$, 즉 평면 구조물에 수직방향으로의 소음 방사에 해당하는 것이다. 따라서 구조물의 모든 진동모드가 비방사모드 특성을 가지도록 제어할 수 있다면 그 구조물에서 수직 방향으로 방사되는 소음의 크기는 이론적으로 0이 될 것이다. 따라서 구조물의 진동모드가 비방사모드의 형태가 되도록 함으로써 방사소음을 최소화 할 수 있다.

본 논문에서는 제어 방법으로 피드포워드(feed-forward) 제어를 이용한다. 피드포워드 제어된 시스템은 새로운 고유모드와 고유진동수를 가지게 되며 이는 제어가진과 에러센서에 의해 결정된다.² 제어된 시스템의 고유함수(eigenfunction)를 $\phi_{cl}(x)$ 라고 하면 이는 제어되지 않은 시스템의 고유함수 $\phi_n(x)$ 의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_{cl}(x) = \sum_{n=1}^N \Gamma_{nl} \phi_n(x), \quad \text{for } l=1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

이 식에서 Γ_{nl} 은 다음과 같이 주어진다.²

$$\Gamma_{nl} = \frac{\mu_n}{\omega_{cl}^2 - \omega_n^2} \left\{ \sum_{m=1}^N [\mu_m / (\omega_{cl}^2 - \omega_m^2)]^2 \right\}^{-1/2} \quad (5)$$

이 식에서 μ_n 은 제어되지 않은 시스템의 n 번째 모드에 상응하는 제어입력의 공간 모드분포를 나타내며 ω_n 과 ω_{cn} 는 각각 제어 전 후의 n 번째 고유주파수이다.

3. 모드영역에서의 비방사시스템 설계

1차원 구조물의 변위 $w(x, \omega)$ 를 고유모드의 선형조합이라 가정하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(x, \omega) = \sum_{n=1}^N q_n(\omega) \phi_n(x) = \mathbf{q}^T \cdot \boldsymbol{\phi}(x) \quad (6)$$

이 식에서 $\mathbf{q} = [q_1(\omega), q_2(\omega), \dots, q_N(\omega)]^T$, $\boldsymbol{\phi}(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)]^T$ 는 각각 일반좌표계(generalized coordinates)와 고유함수(eigenfunction)의 벡터이다. 외부가진 $F(\omega)$ 가 x_d 의 위치에 가해지고 제어입력을 $f_c(x)U(\omega)$ 라고 가정하면 일반좌표계에서의 변위는 다음과 같다.³

$$q_n(\omega) = [\nu_n F(\omega) + \mu_n U(\omega)] H_n(\omega) \quad (7)$$

이 식에서 $\nu_n = \phi_n(x_d)$, $\mu_n = \int_{\Omega} \phi_n(x) f_c(x) dx$, $H_n(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n\omega_n\omega)^{-1}$ 이며, ω_n 과 ξ_n 은 각각 고유주파수(natural frequency)와 모달(modal) 댐핑계수이다. 제어입력의 크기 $U(\omega)$ 는 에러센서 신호의 제곱을 최소화 하도록 결정되는데 x_e 의 위치에 있는 에러센서 신호 $\varepsilon(\omega)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_n = \sum_{n=1}^N q_n(\omega) \xi_n \quad (8)$$

이 식에서 $\xi_n = \phi_n(x_e)$ 이다. 식 (8)을 최소화 하는 제어입력은 다음과 같다.⁴

$$U(\omega) = -G(\omega)F(\omega) = -\frac{\sum_{n=1}^N \xi_n \nu_n H_n(\omega)}{\sum_{n=1}^N \xi_n \mu_n H_n(\omega)} F(\omega) \quad (9)$$

제어 후의 l 번째 모드가 처음 $l+1$ 개의 제어 전 모드들의 선형조합이라고 가정하면,

$$\phi_{cl}(x) = \sum_{n=1}^{l+1} \bar{\Gamma}_{nl} \phi_n(x) \quad (10)$$

라고 쓸 수 있다. 제어 후 모드는 직교성과 함께 비방사모드의 형태를 가지므로 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \phi_{cl}(x) dx = 0 \\ \int_{\Omega} \phi_{cl}(x) m(x) \phi_{cl}(x) dx = \delta_{ll} \quad \text{for } l \leq l, \end{cases} \quad (11)$$

식 (10)을 식 (11)에 대입하면 $\bar{\Gamma}_{nl}$ 에 대한 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\Gamma}_{nl} = \begin{cases} \gamma_n \gamma_{l+1} \left[\sum_{j=1}^l \gamma_j^2 \cdot \sum_{i=1}^{l+1} \gamma_i^2 \right]^{-1/2}, & \text{for } 1 \leq n \leq l \\ \left(\sum_{j=1}^l \gamma_j^2 \right) \left[\sum_{j=1}^l \gamma_j^2 \cdot \sum_{i=1}^{l+1} \gamma_i^2 \right]^{-1/2} & \text{for } n = l+1 \\ 0 & \text{for } l+1 \leq n \leq N \end{cases} \quad (12)$$

이 식에서 $\gamma_n = \int_{\Omega} \phi_n(x) dx$ 이다. 식 (12)를 만족하는 $\bar{\Gamma}_{nl}$ 을 구하고 이들 계수를 식 (5)의 계수와 비교하여 N 개의 제어가진변수 μ_n 과 $N-1$ 개의 고유진동수 ω_{cl}^2 를 구할 수 있는데, 이 값들이 비방사 특성을 가지는 구조물의 고유특성인 것이다. 제어모드의 변수는 $(N-1) \times N$ 개이며 구하고자 하는 미지수는 $N+(N+1)$ 개 이므로 최소자승 방법(least square) 등을 적용하여 문제를 해결해야 한다. 즉, μ_n 과 ω_{cl}^2 는 다음의 비선형 최소자승 최적화 문제를 이용하여 구할 수 있다.

$$\text{Minimize : } F(\mu_n, \omega_{cl}^2) = \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{n=1}^N [\bar{\Gamma}_{nl} - \Gamma_{nl}]^2 \quad (13)$$

$$\text{Constraint : } \begin{cases} \sum_{n=1}^N \mu_n^2 = 1 \\ \omega_1^2 \leq \omega_{cl}^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_{c2}^2 \leq \dots \leq \omega_{c, N-1}^2 \leq \omega_N^2 \end{cases} \quad (14)$$

위 식을 이용하여 μ_n 과 ω_{cl}^2 을 구하면 에러센서의 변수인 ξ_n 은 다음의 선형 방정식을 이용하

여 구할 수 있다.⁴

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1,N-1} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{N1} & \eta_{N2} & \cdots & \eta_{N,N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{1,N} \\ \eta_{2,N} \\ \vdots \\ \eta_{N-1,N} \end{pmatrix} \quad (15)$$

이 식에서

$$\eta_{ln} = \mu_n \prod_{m=1, (\neq n)}^N (\omega_m^2 - \omega_{cl}^2) \quad (16)$$

에러센서의 변수 ξ_n 를 구함으로써 제어가진의 위치 및 크기를 결정할 수 있다.

4. 빔 구조물의 비방사 제어

본 절에서는 3절에서 기술한 설계 절차를 검증하기 위해 길이가 a 이고 선밀도가 m 인 단순지지 빔에 대하여 수치해석을 수행한다. 빔의 길이, 폭, 두께는 각각 0.38m, 0.038m, 그리고 0.0048m 이고, 영률은 $2.0 \times 10^{11} N/m$, 포아송비는 0.3, 밀도는 $7860 kg/m^3$, 댐핑계수 ζ_n 는 0.01 이라고 가정한다. 이 빔은 $x_d = 0.1m$ 위치에서 1 N 크기의 조화가진을 받는다고 가정한다. 단순지지 빔의 경우 고유모드 및 고유진동수는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_n(x) = \sqrt{2/ma} \sin k_n x, \quad \omega_n^2 = k_n^4 (EI/m) \quad (17)$$

이 식에서 $k_n = n\pi/a$ 이다. 식 (17)과 식 (2)를 이용하면 단순지지 빔의 체적속도를 다음으로부터 얻는다.

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{2}{ma} \left[\frac{1 - (-1)^n}{k_n} \right]}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

식 (18)을 보면 차수가 짝수인 모드는 $\gamma_n = 0$ 이 되어 비방사모드라는 것을 알 수 있다. 따라서 짝수 차수 모드의 특성은 제어할 필요가 없다는 것을 알 수 있다. 식 (10)과 (12)로부터 제어된 비방사모드를 구할 수 있는데 그림 1에 제어 전후의 단순지지 빔의 모드를 보여주고 있다.

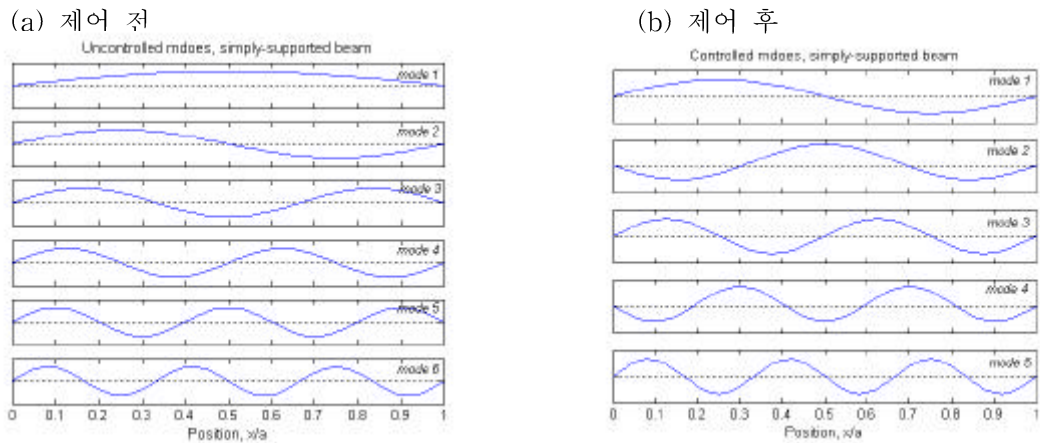


그림 1. 단순지지 빔의 제어 전후 모드 형상

최적 제어된 시스템의 고유치 ω_{cl}^2 와 제어가진변수 μ_n 는 식 (13)과 (14)로 주어진 최적화 문

제로부터 구할 수 있으며, 에러센서의 변수 ξ_n 은 식 (15)와 (16)으로부터 구한다. 이러한 방법으로 단순지지 빔에 대하여 구한 변수는 표 1과 같다. 비교를 위하여 제어 전의 고유주파수도 같이 보여주고 있다. 그림 1에서 알 수 있듯이 제어 후의 홀수 차수의 고유주파수가 제어 전의 짝수 차수 고유주파수와 같다는 것을 알 수 있으며 홀수 차수의 모드들만 제어하면 된다는 것을 알 수 있다. 이는 짝수 차수 모드의 경우에는 이미 비방사 특성을 가지고 있기 때문이다. 표 1에 주어진 변수들은 모드영역에서의 변수들이고 이들 값을 이용하여 실제 물리적 영역(physical domain)에서의 변수를 결정할 수 있다.

표 1 단순지지 빔의 최적제어 변수

Mode #	(Hz)		가	μ_n	ξ_n
1	76.0	304.1	0.594		0.932
2	304.1	653.6	-0.012		0.
3	684.3	1216.5	0.279		0.310
4	1216.5	1883.0	0.006		-0.001
5	1900.8	2737.2	0.100		0.186
6	2737.2		0.034		0.

방사소음 비교를 위하여 공간상의 위치 $r(5a, \theta=0, \phi=0)$ 에서의 제어 전후의 음압(dB ref. $20 \mu\text{Pa}$)을 그림 2에 비교 하였다. 두 경우 모두 제어 후 음압이 상당히 큰 폭으로 감소한다는 것을 알 수 있다. 특히 저주파 영역에서의 감소 폭이 크다는 것을 알 수 있다. 이는 비방사모드의 방사특성이 쌍극자음원의 특성과 유사하며, 평면에 수직방향으로의 방사효과가 상대적으로 매우 작기 때문이다. 그림 3에서는 빔으로부터 $x-z$ 평면으로의 음향방사 방향성을 76.0Hz 와 653.6Hz 의 가진 주파수에 대하여 각각 보여주고 있다. 이 때 음압은 $R=5a$ 거리에서의 값이며 $\theta=0$ 은 빔에 수직방향이다. 빔의 제어 전 첫 번째 고유주파수에 해당하는 76.0Hz 의 경우에는 제어 효과가 가장 크게 나타나며, 제어 전 단극자(monopole) 형태의 방사특성이 제어 후에는 쌍극자(dipole) 형태가 된다는 것을 알 수 있다. 제어 후의 첫 번째 고유주파수에 해당하는 653.6Hz 의 경우에는 빔에 수직인 방향으로의 음향 방사는 감소하였지만 일부 방향으로서는 증가하는 경우도 있다는 것을 알 수 있다.

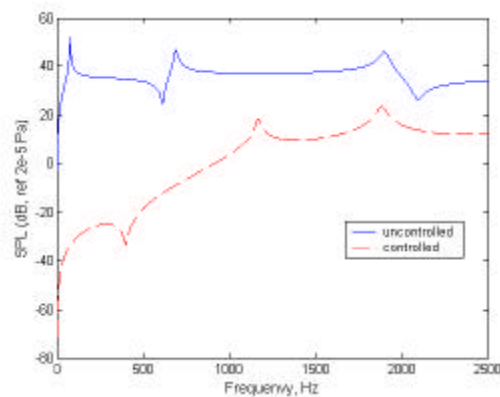


그림 2. 단순지지 빔에서 수직 방향의 원거리 음압

(a)

(b)

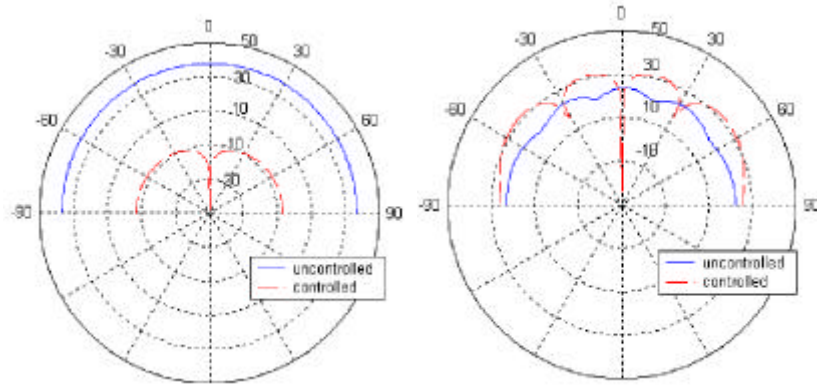


그림 3. 단순지지 빔으로부터의 음향 방사 방향성: (a) 76.0 Hz, (b) 653.6 Hz.

5. 결론

본 연구에서는 평면 구조물의 체적속도가 0이 되는 비방사모드의 개념을 이용하여 빔 구조물의 방사소음을 효율적으로 제어하는 방법을 제안하였다. 수치해석의 예로 단순지지 빔의 모드 특성이 최대한 비방사모드에 가깝도록 제어하여 빔에 수직인 방향으로의 소음 방사를 최소화 할 수 있다는 것을 보여주었다. 이 방법은 파수영역 또는 모드영역에서의 구조음향 특성을 이용하는 것으로 실제 물리적 영역(physical domain)에서의 제어보다 효율적이다. 유사한 방법으로는 구조물로부터 방사되는 총 음향파워를 가격함수로 하고 이를 최소화하도록 변수를 최적화 할 수 있는데 이 경우에도 마찬가지로 본 연구에서의 설계 절차를 적용할 수 있다.

후기

본 연구는 한국철도기술연구원 자체연구개발사업(BS03102)의 지원으로 이루어졌습니다.

참고문헌

1. Earl G. Williams, *Fourier Acoustics*, Academic Press, 1999.
2. R. A. Burdisso and C. R. Fuller, "Theory of feedforward controlled system eigenproperties," *Journal of Sound and Vibration*, **153**(3) 437~452 (1992).
3. L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibration*, The MacMillan Company, New York, 1967.
4. R. A. Burdisso and C. R. Fuller, "Design of active structural acoustic control systems by eigenproperty assignment," *Journal of Acoustical Society of America*, **96**(3) 1582~1591 (1994).