임의의 충격이 있는 시스템의 최적 점검주기

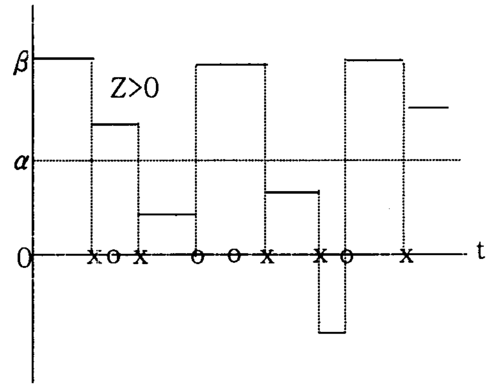
김 성 순, 박 정 훈, 최 승 경, 이 의 용
숙명여자대학교 통계학과, eylee@sookmyung.ac.kr

Abstract. 본 논문에서는 임의의 충격이 있는 시스템 모형에서, 두 가지 시스템 관리정책인 임의점검정책과 주기점검정책을 채택 한다. 시스템의 상태와 수리에 관련된 비용들을 고려한 후, 각 관리정책 하에서 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 최소화하는 최적 점검주기를 구하고, 두 관리정책의 비교연구를 수행한다.

1. 서 론

임의의 충격을 받는 시스템에 대한 마르코프 확률 모형은 Lee와 Lee(1993, 1994)에 의해 소개되었는데, 이 모형은 시스템의 초기상태를 $\beta>0$로 하고, 발생률 $\nu>0$인 포아송 확률과정을 따라 발생하는 임의의 충격에 의해 시스템 상태는 양의 확률변수 Z만큼 떨어진다고 가정한다. 또한 시스템은 수리공에 의해 점검되는데, 만약 수리공이 도착했을 때, 시스템의 상태가 적정수준 α이하이면 즉시 시스템을 수리해서 시스템의 상태를 초기상태 β로 올려놓고, 그렇지 않으면 시스템을 그냥 떠난다. 이 모형에 대한 표본경로는 그림 1과 같다.

본 논문에서는 Z가 평균 μ를 갖는 지수확률변수라는 가정하에, 수리공이 도착률 $\lambda>0$인 포아송 확률과정을 따라 시스템을 점검(random inspections)하는 경우와 수리공이 일정한 상수 τ의 간격을 따라 시스템을 점검 (periodic inspections)하는 두 점검 정책이 고려된다. 각 정책 하에서 시스템의 비용함수를 구하고, 그 비용함수를 최소화하는 유일한 α와 λ또는 τ가 존재함을 보이며, 두 점검 정책의 비용함수를 비교하여 주기점검의 경우가 임의점검의 경우보다 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용이 더 작음을 보인다.



<그림 1> (x : shock , o : repairman)

2. 임의점검에서 최적화

수리공이 올 때마다 드는 비용을 C_1, 시스템의 상태를 단위 양 올리는 수리비용을 C_2, 시스템 상태가 α이하에 있는 동안 단위기간 당 드는 비용을 C_3라고 하자. T^*를 재생과 재생 사이의 시간, N을 T^*동안 수리공이 도착하는 횟수, Z'을 수리공이 오기 직전에 α이하로 떨어진 양이라 하면, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은 재생보상정리[Ross (1996, p.133)]에 의해 식(2.1)과 같다.

$$C(\alpha,\lambda) = \frac{E(N)C_1 + \frac{1}{\lambda}C_3}{E(T^*)} + \frac{[\beta-\alpha+E(Z')]C_2}{E(T^*)} \tag{2.1}$$

여기서, $E(T^*)$는 한번 재생이 일어나는데 걸리는 평균시간으로 시스템의 상

태가 α보다 좋은 기간 T_α와 α이하인 기간 E^λ에 대한 합으로 나타낼 수 있다. 여기서 E^λ는 평균이 $\frac{1}{\lambda}$인 지수확률변수이다. 따라서,

$$
\begin{aligned}
E(T^*) &= E(T_\alpha) + E(E^\lambda) \\
&= E[\sum_{i=1}^{N(\beta-\alpha)+1} E_i^\nu] + \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\nu}[1+\frac{1}{\mu}(\beta-\alpha)] + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

여기서, E_i^ν는 평균이 $\frac{1}{\nu}$인 지수확률변이고, $N(t)$는 발생률 $\frac{1}{\mu}$인 포아송과정다.

$E(N)$은 T^*동안 수리공이 도착하는 횟수에 대한 기대값이고, 수리공은 λ의 비율로 도착하므로 단위시간당 수리공은 평균적으로 $\lambda E(T^*)$번 오게 된다. 따라서 식(2.2)를 이용하면 $E(N)$은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \lambda E(T^*) \\
&= \frac{\lambda}{\nu}[1+\frac{1}{\mu}(\beta-\alpha)]+1
\end{aligned}
$$

$E(Z')$은 수리공이 오기 직전에 시스템의 상태가 α이하로 떨어졌던 양에 대한 기대값이다. 이것은 시스템의 상태가 α이하인 기간 E^λ동안에 온 랜덤 충격 Z들의 합으로 나타낼 수 있으므로 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E(Z') &= E[\sum_{i=1}^{M(E^\lambda)+1} Z_i] \\
&= \mu + \frac{\nu\mu}{\lambda}
\end{aligned}
$$

여기서, $M(t)$는 발생률 ν인 포아송과정이다.

실제 수리비용은 수리 직전의 상태에서 수리 직후의 상태인 β까지 점프되는 양에 비례하며, 점프되는 양은 $\beta-\alpha+E(Z')$이 된다. 따라서 적정수준 α와 수리공이 도착하는 비율 λ에 대한 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은 다음 식(2.3)과 같다.

$$
\begin{aligned}
C(\alpha,\lambda) &= \lambda C_1 + \nu\mu C_2 \\
&+ \frac{\nu\mu}{\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)} C_3
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

2.1 α 에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

적정수준 α 에 대한 최소비용을 구하기 위해서 식(2.3)을 α에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$
C'(\alpha) = \frac{\lambda\nu\mu}{[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2} C_3
$$

$C'(\alpha)>0$이므로 비용함수는 항상 증가함수이고, $0\le\alpha\le\beta$이므로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

<정리 1>

비용함수는 증가함수이고, $\alpha=0$에서 최소비용

$$
\begin{aligned}
C(0,\lambda) &= \lambda C_1 + \nu\mu C_2 \\
&+ \frac{\nu\mu}{\nu\mu+\lambda\mu+\beta\lambda} C_3
\end{aligned}
$$

를 갖는다.

2.2 λ 에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

수리공이 도착하는 비율 λ에 대한 최소비용을 구하기 위해서 식(2.3)을 λ에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
C'(\lambda) &= C_1 \\
&- \frac{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu}{[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2} C_3
\end{aligned}
$$

$C'(\lambda)$의 분자를 $A(\lambda)$로 놓고, $A(\lambda)=0$을 만족하는 λ^*를 구하면 $0\le\lambda<\infty$ 이므로

$$
\lambda^* = \frac{-\nu\mu C_1 + \sqrt{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu C_1 C_3}}{(\beta-\alpha+\mu)C_1}
$$

이고, 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

<정리 2>

(i) $\nu\mu C_1 \geq (\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

비용함수는 증가함수이고, $\lambda=0$에서 최소비용 $C(\alpha, 0)=\nu\mu C_2+C_3$을 갖는다.

(ii) $\nu\mu C_1 < (\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

비용함수는 아래로 볼록한 함수이고, 비용을 최소화하는 유일한 λ^*가 존재하고, 최소비용

$$C(\alpha, \lambda^*) = \frac{-\nu\mu C_1}{\beta-\alpha+\mu} + \nu\mu C_2 + \frac{2\sqrt{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu C_1 C_3}}{\beta-\alpha+\mu}$$

를 갖는다.

3. 주기 점검에서 최적화

주기점검은 시스템의 점검과 점검사이의 간격이 일정한 상수 $\tau>0$로 고정되는 수리정책을 말한다. 시스템의 상태는 수리공의 점검에 의해서만 알 수 있고, 그 상태가 α이하일 때는 수리하여 β상태로 올려놓는다. 수리공이 올 때마다 드는 비용을 C_1, 시스템의 상태를 단위양 올리는 수리비용을 C_2, 시스템 상태가 α이하에 있는 동안 단위기간 당 드는 비용을 C_3라고 하고, T^*_{pe}를 재생과 재생 사이의 시간, N_{pe}을 T^*_{pe}동안 수리공이 도착하는 횟수, Z'을 수리공이 오기 직전에 α이하로 떨어진 양이라 하면, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은 다음 식(3.1)과 같다.

$$C_{pe}(\alpha, \tau) = \frac{E(N_{pe})C_1 + E[T^*_{pe} - T_\alpha]C_3}{E(T^*_{pe})} + \frac{[\beta-\alpha+E(Z')]C_2}{E(T^*_{pe})} \tag{3.1}$$

여기서 $E(T^*_{pe})$는 한번 재생이 일어나는데 걸리는 평균시간으로 시스템의 상태가 α보다 좋은 기간 T_α와 α이하인 기간 $T^*_{pe}-T_\alpha$에 대한 합으로 나타낼 수 있다. equilibrium 분포함수를 이용하여 장시간에 걸친 잔여기간의 기대값은 $E(T^*_{pe}-T_\alpha)=\frac{\tau}{2}$가 되어

$$\begin{aligned} E(T^*_{pe}) &= E(T_\alpha)+\frac{\tau}{2} \\ &= \frac{1}{\nu}[1+\frac{1}{\mu}(\beta-\alpha)]+\frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

이다.

$E(N_{pe})$는 T^*_{pe}동안 수리공이 도착하는 횟수에 대한 기대값이다. 수리공이 τ 간격으로 오므로 단위시간당 수리공은 평균적으로 $\frac{1}{\tau}E(T^*_{pe})$번 오게 되고, $E(N_{pe})$는 다음 식(3.2)와 같다.

$$E(N_{pe}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu\tau}[1+\frac{1}{\mu}(\beta-\alpha)] \tag{3.2}$$

$E(Z')$은 수리공이 오기 직전에 시스템의 상태가 α이하로 떨어졌던 양에 대한 기대값이다. 이것은 시스템의 상태가 α 이하인 기간 $T^*_{pe}-T_\alpha$ 동안에 온 랜덤 충격 Z들의 합으로 나타낼 수 있으므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(Z') &= E[\sum_{i=1}^{M(\frac{\tau}{2})+1} Z_i] \\ &= \mu(1+\frac{\tau}{2}\nu) \end{aligned}$$

실제 수리비용은 수리 직전의 상태에서 수리 직후의 상태인 β까지 점프되는 양에 비례하며, 점프되는 양은 $\beta-\alpha+E(Z)$이 된다. 따라서 적정수준 α와 수리공의 도착간격 τ에 대한 단위시간당 평균비용은 다음 식(3.3)과 같다.

$$C_{pe}(\alpha, \tau) = \frac{1}{\tau}C_1 + \nu\mu C_2 + \frac{\tau\nu\mu}{\tau\nu\mu+2(\beta-\alpha+\mu)}C_3 \tag{3.3}$$

3.1 α 에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

적정수준 α에 대한 최소비용을 구하기 위해서 식(3.3)을 α에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C_{pe}'(\alpha)=\frac{2\tau\nu\mu}{[\tau\nu\mu+2(\beta-\alpha+\mu)]^2}C_3$$

$C_{pe}'(\alpha)>0$이므로 비용함수는 항상 증가함수이고, $0\le\alpha\le\beta$이므로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

<정리 3>

비용함수는 증가함수이고, $\alpha=0$에서 최소비용

$$C_{pe}(0,\tau)=\frac{1}{\tau}C_1+\nu\mu C_2+\frac{\tau\nu\mu}{\tau\nu\mu+2(\beta+\mu)}C_3$$

를 갖는다.

3.2 τ 에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

수리공의 도착간격 τ에 대한 최소비용을 구하기 위해서 식(3.3)을 τ에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C_{pe}'(\tau)=-\frac{1}{\tau^2}C_1+\frac{2\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)}{[\tau\nu\mu+2(\beta-\alpha+\mu)]^2}C_3$$

$C_{pe}'(\tau)$의 분자를 $A_{pe}(\tau)$로 놓고, $0\le\tau<\infty$이므로 $A_{pe}(\tau)=0$을 만족하는 τ^*를 구하면

$$\tau^*=\frac{2\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)C_1}{-\nu^2\mu^2C_1+2\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)C_3}+\frac{\sqrt{8\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)^3C_1C_3}}{-\nu^2\mu^2C_1+2\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)C_3}$$

이고, 다음 정리를 얻을 수 있다.

<정리 4>

(i) $\nu\mu C_1<2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

비용을 최소화하는 유일한 τ^*가 존재하여 최소비용

$$C_{pe}(\alpha,\tau^*)=\frac{\sqrt{\nu\mu C_1C_3}\,C_3}{\sqrt{2(\beta-\alpha+\mu)C_3}+\sqrt{\nu\mu C_1C_3}}-\frac{\nu\mu C_1\sqrt{\nu\mu C_1C_3}}{\sqrt[3]{2(\beta-\alpha+\mu)}C_3+2(\beta-\alpha+\mu)}+\frac{\nu\mu C_1\sqrt{2(\beta-\alpha+\mu)}}{2(\beta-\alpha+\mu)(\sqrt{2(\beta-\alpha+\mu)C_3}+\sqrt{\nu\mu C_1C_3})}+\frac{\sqrt{\nu\mu C_1C_3}}{\sqrt{2(\beta-\alpha+\mu)C_3}+\sqrt{\nu\mu C_1C_3}}+\nu\mu C_2$$

를 갖는다.

(ii) $\nu\mu C_1\ge 2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

$\tau\ge0$인 범위에서 비용함수는 감소함수이고, $\tau=\infty$에서 최소비용 $C_{pe}(\alpha,\infty)=\nu\mu C_2+C_3$ 를 갖는다.

증명: $A_{pe}(\tau)$의 판별식은

$\frac{D}{4}=8\nu\mu(\beta-\alpha+\mu)^3C_1C_3>0$이며, $\lim_{\tau\to0}A_{pe}(\tau)=-4(\beta-\alpha+\mu)^2C_1<0$이다. $\nu\mu C_1<2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우에는 $A_{pe}(\tau)$가 아래로 볼록한 함수가 되어 $A_{pe}(\tau)=0$이 되는 유일한 양의 τ^*가 존재하며, $\nu\mu C_1\ge2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우에는 $A_{pe}(\tau)$가 위로 볼록한 함수가 되어 $A_{pe}(\tau)=0$이 되는 두개의 음의 τ가 존재하고, τ가 커질수록 비용함수는 소한다. 따라서, $\tau=\infty$에서 최소값을 갖는다.

4. 두 점검 정책의 비교

4.1 α 에 대한 두 수리 점검의 최소비용 비교

<정리 1>과 <정리 3>에서 임의점검 정책과 주기점검 정책이 모두 α에 대하여 $\alpha=0$일 때 최소 비용을 갖는다. 임의점검정책에서 도착률 λ는 주기점검정책에서 $\frac{1}{\tau}$에 해당하므로, <정리 1>의

임의점검의 최소비용에서 $\lambda=\frac{1}{\tau}$로 놓으면

$$C(0,\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\tau}C_1+\nu\mu C_2 + \frac{\tau\nu\mu}{(\beta+\mu)+\tau\nu\mu}C_3$$

이 되어, <정리 3>의 주기점검 최소비용 $C_{pe}(0,\tau)$와 비교해 보면

$C(0,\frac{1}{\tau}) > C_{pe}(0,\tau)$ 이다.

4.2 λ와 τ에 관한 두 수리 점검의 최소비용 비교

(i) $\nu\mu C_1 < (\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

두 수리 점검에서 각각의 최소비용을 갖게하는 유일한 λ^*와 τ^*가 존재하는 경우가 된다. <정리 2>에서의 $C(\alpha,\lambda^*)$와 <정리 4>에서의 $C_{pe}(\alpha,\tau^*)$를 비교하기 위해, 일반성을 잃지 않고 $C_3=1$이라 가정하고, $\nu\mu C_1=x$라 놓자.

$C_{pe}(\alpha,\tau^*)-C(\alpha,\lambda^*)$의 분자 $f(x)$는

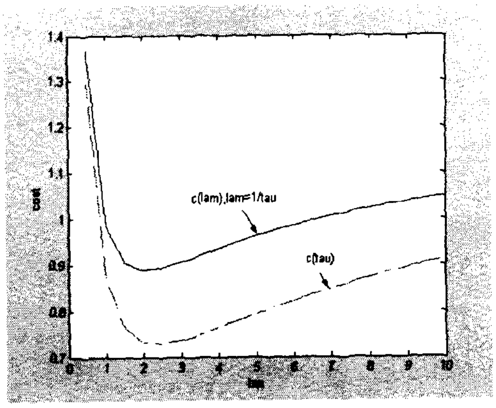
$$f(x) = (4-4\sqrt{2})(\beta-\alpha+\mu)\sqrt{x} + (3\sqrt{2}-4)\sqrt{\beta-\alpha+\mu x} + x\sqrt{x}$$

이고,

$$f'(x)=(2-2\sqrt{2})(\beta-\alpha+\mu)\frac{1}{\sqrt{x}} + (3\sqrt{2}-4)\sqrt{\beta-\alpha+\mu}+\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$=(\sqrt{2}-1)(\beta-\alpha+\mu)x^{-3/2}+\frac{3}{4}x^{-1/2}$$

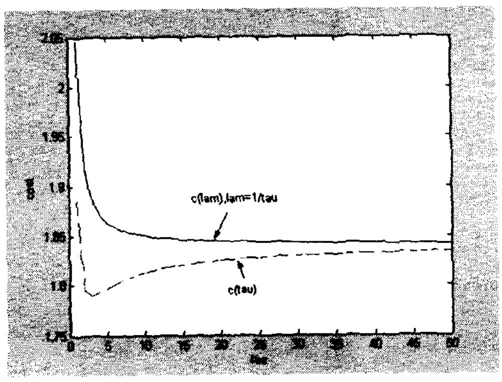
이다. 그리고 $f(0)=0, f(\beta-\alpha+\mu)<0$, $f'(0)<0$, $f'(\beta-\alpha+\mu)>0$ 이다. 여기서 $f''(x)\geq 0$이 되므로 $f(x)$는 convex function이 된다. 그러므로 $0\leq x<\beta-\alpha+\mu$에서 $f(x)\leq 0$가 되어서 $C(\alpha,\lambda^*)\geq C_{pe}(\alpha,\tau^*)$이다.



<그림 2> $\nu\mu C_1 < (\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우 두 수리 점검의 비용함수
($C_1=0.5$, $C_2=0.7$, $C_3=1$, $\nu=1.5$, $\mu=0.2$, $\alpha=0.4$, $\beta=1$)

(ii) $(\beta-\alpha+\mu)C_3\leq\nu\mu C_1<2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

임의점검에서는 <정리 2>에서 $\lambda=0$일 때 최소비용 $C(\alpha,0)$이고, 주기점검에서는 <정리4>에서 최소비용을 갖게하는 유일한 τ^*가 존재하는 경우로 최소비용은 $C_{pe}(\alpha,\tau^*)$이다. 여기서도 $C_3=1$로 가정하면, $C(\alpha,0)>C_{pe}(\alpha,\tau^*)$이다.

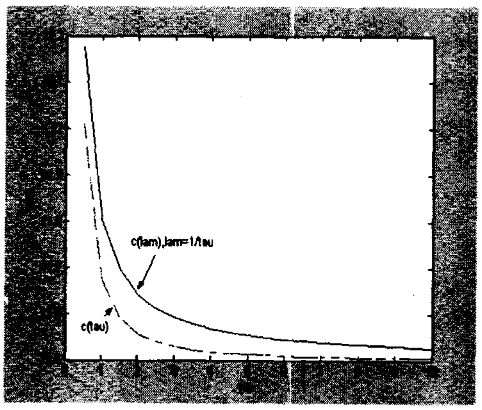


<그림 3>
$(\beta-\alpha+\mu)C_3\leq\nu\mu C_1<2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우 두 수리 점검의 비용함수
($C_1=0.5$, $C_2=0.7$, $C_3=1$, $\nu=6$, $\mu=0.2$, $\tau=0.7$, $\beta=1$)

(iii) $\nu\mu C_1\geq 2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우

임의점검에서는 <정리 2>에서 $\lambda=0$일

때 최소비용 $C(\alpha, 0)$이고, 주기점검에서는 <정리 4>에서 $\tau=\infty$일때 최소비용 $C_{pe}(\alpha, \infty)$이 된다. 이 경우도 $C(\alpha, 0) \geq C_{pe}(\alpha, \infty)$가 됨을 알 수 있다.



<그림 4> $\nu\mu C_1 \geq 2(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우 두 수리 점검의 비용함수 ($C_1=0.5$, $C_2=0.7$, $C_3=1$, $\nu=5$, $\mu=3$, $\alpha=0.4$, $\beta=1$)

참 고 문 헌

[1] Lee, E.Y. and Lee, J.Y. (1993), A Model for a System Subject to Random Shocks, *J. Appl. Prob.*, **30**, 979-984.

[2] Lee, E.Y. and Lee. J. (1994). Optimal Control of a Model for a System Subject to Random Shocks, *Oper. Res. Lett.*, **15**, 237-240.

[3] Ross, S.M. (1996). *Stochastic Processes*, 2nd deiton John Wiley, New York.