

## 접착층을 가진 겹층보 끝단 부위의 열응력

### Thermal Stresses near the Edge of Layered Beam with Adhesive Layer

김형남\*, 김영호\*

\* 한국전력공사 전력연구원

**ABSTRACT** An analytical method is developed which focused on the end effects for determining the thermal stress distribution in an laminated beam bonded with adhesive layer. This method gives the stress distribution which satisfy the stress-free boundary condition at edge completely. Numerical example, in which an Al-Cu beam bonded with solder(Pb-Sn) is treated, shows that the shear and peeling stresses at the interfaces are significant near the edge and become negligible in the interior region.

## 1. 서 론

코팅, 클래딩 및 이중 금속의 접합은 하나의 기계 부품에서 필요한 성질을 한가지 물질로부터 얻을 수 없을 때 매우 유용하게 사용되는 방법 중 하나이다. 그러나 이렇게 제작된 부품은 모재와 코팅, 클래딩 혹은 이중 금속 접합 재료의 열팽창계수 차이 때문에 온도 변화에 민감하게 된다.

온도 변화가 있는 경우 서로 다른 열팽창계수 및 탄성계수로 인하여 서로 늘어나거나 줄어드는 길이 차이가 생기는데, 이 차이가 경계면을 따라 분포된 힘으로 작용한다. 이 힘으로 인하여 자유단에서 가까운 경계면에서 응력의 변화가 커지고, 이는 미세 균열이나 박리의 원인이 되어 부품의 신뢰도에 영향을 미친다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러므로 자유단에서 가까운 경계면에서의 응력상태를 안다는 것은 부품의 신뢰성 제고를 위하여 매우 중요한 일이다.

겹층 구조물에 대한 열응력 문제는 PCB(Printed Circuit Board) 및 반도체 가공을 위한 코팅 등 Electronic Packaging 분야와 발전소에서 사용되는 기계 요소를 각종 부식, 침식 및 파모로부터 보호하기 위한 코팅 및 클래딩과 같은 표면처리 분야에서 널리 연구되고 있다.

최초로 겹층 구조물의 서로 다른 물리적 성질에 의한 열응력을 다룬 사람은 Grimado<sup>(1)</sup>이며 Chen과 Nelson<sup>(2)</sup>도 비슷한 문제를 다뤘지만 이들의 연구는 자유단의 응력 조건을 만족시키지 못했다. Chen<sup>(3)</sup>은 축방향 응력을 선형으로, 상대적으로 얇은 층의 축방향 응력 및 전단응력은 상수로 가정하여 변분법을 이용하여 이 문제에 접근하여 자유단에서의 응력 조건을 만족시키는 응력 분포를 구하였다. Williams<sup>(4)</sup>는 변형률을 선

형으로 가정하여 비슷한 방법을 제시했다. 겹층보의 경계면을 따라 작용하는 열응력을 구하기 위하여 Yin<sup>(5, 6)</sup>은 Stress Function을 이용한 변분법을 이용하였다.

Kuo<sup>(7)</sup>는 일정한 온도 변화가 있는 Semi-Infinite 바이메탈 Thermostat를 탄성론에 근거한 평면 응력 문제로 취급하여 열응력을 구하였다.

Chen<sup>(3)</sup>과 Kuo와 Chen<sup>(8)</sup>은 접착층의 두께 변화에 따른 열응력을 계산하였으나 Chen의 연구 결과는 접착층이 얇은 경우에만 응용이 가능하고 Kuo와 Chen의 연구 결과는 끝단에서 경계조건을 만족시키지 못했기 때문에 박리가 일어나는 끝부분에서의 응력해석에는 적합하지 않다.

본 논문에서는 Yin<sup>(5, 6)</sup>의 방법을 일반화하여 열하중을 받는 서로 다른 물질로 이루어진 3층보의 평형 방정식과 자유단에서의 응력조건을 포함한 모든 경계조건을 만족하고 Complementary Energy 법을 통하여 간접적으로 Compatibility Equation을 만족하는 응력분포를 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

## 2. 지배방정식

Figure 1은 양쪽 끝이 자유단이고 폭이 1(unit)인 겹층보의 기하학적 크기 및 물리적 성질을 보여준다. 온도 변화가  $\Delta T$ 인 경우 2-차원 등방성(Isotropic) 탄성체의  $k$ -번째 ( $k = 1, 2, 3$ ) 층에 대한 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

기하학적 적합성은 다음 식에 의해 표현된다.

$$y = 0 \text{에서 } u^1 = u^2, \quad v^1 = v^2 \quad (2)$$

$$y = t_2 \text{에서 } u^2 = u^3, \quad v^2 = v^3 \quad (3)$$

여기서,  $u$ 는  $x$ -축,  $v$ 는  $y$ -축 방향 변위이다.

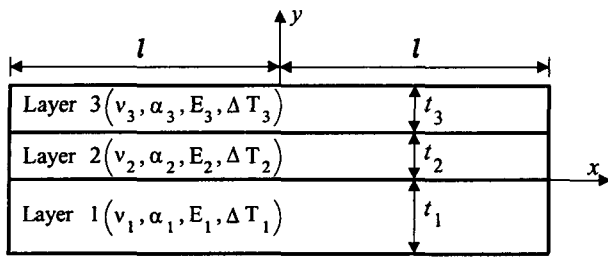


Fig. 1 Geometry of three layered beam

각 층의 물리적 성질이 일정하다는 가정 하에 다음과 같은 관계식을 도입하면 새로운 평형 방정식을 얻는다.

$$\sigma_x^k = \hat{\sigma}_x^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k} \quad (4)$$

$$\sigma_y^k = \hat{\sigma}_y^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k} \quad (5)$$

$$\tau_{xy}^k = \hat{\tau}_{xy}^k \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_y^k}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

식 (7)에 대해서 끝단의 응력이 "0"이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$x = \pm l \text{에서 } \hat{\sigma}_x^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \hat{\tau}_{xy}^k = 0 \quad (8)$$

$$y = (t_2 + t_3) \text{에서 } \hat{\sigma}_y^3 = \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3}, \quad \hat{\tau}_{xy}^3 = 0 \quad (9)$$

$$y = -t_1 \text{에서 } \hat{\sigma}_y^1 = \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1}, \quad \hat{\tau}_{xy}^1 = 0 \quad (10)$$

서로 다른 층이 접하고 있는 경계면에서의 힘 평형에 의한 조건은 다음과 같다.

$$y = 0 \text{에서 } \hat{\sigma}_y^1 = \hat{\sigma}_y^2 + \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} - \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2}, \quad \hat{\tau}_{xy}^1 = \hat{\tau}_{xy}^2 \quad (11)$$

$$y = t_2 \text{에서 } \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y^3 + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2} - \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3}, \quad \hat{\tau}_{xy}^2 = \hat{\tau}_{xy}^3 \quad (12)$$

### 3. 지배방정식의 변환

x-축 방향의 응력을 다음과 같이 가정하자.

$$\hat{\sigma}_x^k(x, y) = \sum_{i=1}^{n_k+1} \sigma_{(i-1)}^k(x) \left(\frac{y}{t_k}\right)^{i-1} \quad (13)$$

여기서,  $n_k (k=1, 2, 3)$ 는 임의로 선택된 다항식의 최대 차수이고  $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 는  $(n_k+1)$ 개의 결정해야 되는 함수이다. 각 층의 자유단에서의 경계조건(식(8))은 다음과 같다.

$$x = \pm l \text{에서 } \sigma_o^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k}, \quad \sigma_m^k = 0 \quad (14)$$

여기서, 위 첨자  $k (k=1, 2, 3)$ 는  $k$ -번째 층을 의미하고  $m = 1, 2, 3, \dots, n_k$  이다.

식 (7), (9), (10), (13)에 의해서 각 층에서 미지의 함수  $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 와  $\hat{\tau}_{xy}^k(x, y)$  및  $\hat{\sigma}_y^k(x, y)$

의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

i) 첫번째층

$$\hat{\tau}_{xy}^1(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{y}{t_1} \left\{ (-1)^i - \left(\frac{y}{t_1}\right)^i \right\} \frac{d\sigma_{(i-1)}^1}{dx} \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_y^1(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1+1} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_1^2 + \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_1 y \right. \\ \left. + \frac{t_1^2}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_1}\right)^{i+1} \right\} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^1}{dx^2} + \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} \quad (16)$$

ii) 두번째층

$$\hat{\tau}_{xy}^2(x, y) = \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{(-1)^i}{i} t_2 \frac{d\sigma_{(i-1)}^2}{dx} \\ - \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{t_2}{i} \left(\frac{y}{t_2}\right)^i \frac{d\sigma_{(i-1)}^2}{dx} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_y^2(x, y) = \sum_{i=1}^{n_2+1} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_2^2 + \frac{(-1)^{i+1}}{i} t_2 y \right\} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^2}{dx^2} \\ + \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_2}\right)^{i+1} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^2}{dx^2} + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2} \quad (18)$$

iii) 세번째층

$$\hat{\tau}_{xy}^3(x, y) = \sum_{i=1}^{n_3+1} \frac{t_3}{i} \left\{ \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^i - \left(\frac{y}{t_3}\right)^i \right\} \frac{d\sigma_{(i-1)}^3}{dx} \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_y^3(x, y) = \sum_{i=1}^{n_3+1} \left\{ \frac{it_3}{i+1} \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^{i+1} - \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^i y \right. \\ \left. + \frac{t_3}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_3}\right)^{i+1} \right\} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^3}{dx^2} + \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3} \quad (20)$$

식 (9), (15), (17), (19)에 의해서 부가적인 경계조건이 다음과 같이 얻어진다.

$$\left. \frac{d\sigma_m^k}{dx} \right|_{x=\pm l} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots, n_k) \quad (21)$$

식 (17)~(19), (21)을 참고하여 경계에서의 힘 평형조건(식 (12))을 경계조건(식 (14), (21))을 이용하여 적분하면 두 번째 층에서의 미지함수 ( $\sigma_o^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{n_2}^2$ ) 중 2개가 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma_o^2 = \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{t_1}{t_2} (-1)^i \left( \frac{4}{i} + \frac{6}{i+1} \frac{t_1}{t_2} \right) \sigma_{(i-1)}^1 \\ + \sum_{i=3}^{n_2+1} \frac{2(i-2)}{i(i+1)} \sigma_{(i-1)}^2 \\ + \sum_{i=1}^{n_2+1} \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{i-1} \left[ \frac{6}{i+1} \left\{ \frac{1}{i} + \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right. \\ \left. - \frac{2}{i} \left\{ 1 + 2 \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^i \right\} \right] \sigma_{(i-1)}^3 \\ + \frac{t_1}{t_2} \left( 4 + 3 \frac{t_1}{t_2} \right) \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2} \\ + \frac{t_3}{t_2} \left( 2 + 3 \frac{t_3}{t_2} \right) \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3} \quad (22)$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{t_1}{t_2} (-1)^{i+1} \left( \frac{6}{i} + \frac{12}{i+1} \frac{t_1}{t_2} \right) \sigma_{(i-1)}^1$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=3}^{n_2+1} \frac{6(i-1)}{i(i+1)} \sigma_{i-1}^2 \\
 & + \sum_{i=1}^{n_3+1} \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{i-1} \left[ \frac{6}{i} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{12}{i(i+1)} \left\{ 1 + i \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right] \sigma_{i-1}^3 \\
 & - \frac{t_1}{t_2} \left(6 + 6 \frac{t_1}{t_2}\right) \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} \\
 & + \frac{t_3}{t_2} \left(6 + 6 \frac{t_3}{t_2}\right) \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3} \quad (23)
 \end{aligned}$$

그러므로 응력분포를 알기 위해서 구해야하는 미지함수는  $(n_1 + n_2 + n_3 + 1)$ 개 이다.

평형방정식과 경계조건을 이용하여 구한 응력장이 유일해가 되기 위해서는 기하학적 적합조건을 만족해야 한다. 이 조건은 Complementary 에너지법에 근거한 변분법에 의해서 우회적으로 만족시킬 수 있다. Plain Stress Problem에서 Complementary Energy는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V^* = \int_{-l}^l \int_{-d}^d \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2E_k} \{ (\sigma_x^k)^2 + (\sigma_y^k)^2 \\
 - 2\nu_k \sigma_x^k \sigma_y^k + 2(1 + \nu_k) (\tau_{xy}^k)^2 \} dy dx \quad (24)
 \end{aligned}$$

식 (24)는 식 (15)~(20), (22) 및 (23)을 참조하여  $y$ 에 대해서 적분을 할 수 있다. 식 (14), (21)에 의해 전체 경계조건이 알려져 있으므로 변분을 취하여 이를 "0"으로 놓으면 다음과 같은 연립 상미분 방정식이 얻어진다.

$$[L]\{\sigma\} = \{a\} \quad (25)$$

여기서,  $[L]$ 은 Square Symmetric 행렬로 이의 성분  $L_{rs}(r, s = 1, 2, 3, \dots, (n_1 + n_2 + n_3 + 1))$ 는 다음의 형태를 취하는 Linear Operator이다.

$$L_{rs} = A_{rs} \frac{d^4}{dx^4} + B_{rs} \frac{d^2}{dx^2} + C_{rs} \quad (26)$$

상수  $A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}$ 는 식 (24)를  $y$ -좌표에 대하여 적분을 하고 변분을 취하는 과정에서 결정되는 상수이다(Column Matrix  $\{a\}$ 의 성분도 이 과정에서 결정됨). Column Matrix  $\{\sigma\}$ 의 성분은 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_{n_3-1}^3, \sigma_{n_3}^3]^T \quad (27)$$

경계조건(식 (14), (21))과 함께 식 (25)에 의해 주어진 지배방정식은 잘 알려진 방법<sup>(9)</sup>을 이용하여 풀 수 있으므로 본 논문에서는 생략하였다.

#### 4. 수치예

Al과 Cu를 Solder(Pb/Sn)를 이용하여 붙인 Beam을 수치예로 들었다. 각 층의 두께 및 기계적 성질은 표 1과 같다. Beam의 길이  $l$ 은 50 mm이고 온도 변화  $\Delta T$ 는 모든 층에 대하여 100 °C를 주었다.

각 층에서의 응력분포는 지면 관계상 생략하였으나, 자유표면(Free-Surface)의 조건을 포함한 모든 만족함을 알 수 있다.

Table 1. Mechanical Properties of Each Layer

Material	$t(mm)$	$E(GPa)$	$\nu$	$\alpha(/^\circ C)$
Cu	1.5	126	0.343	$16.5 \times 10^{-6}$
Pb/Sn	*	20	0.4	$27.9 \times 10^{-6}$
Al	2	70	0.345	$23.1 \times 10^{-6}$

\* 접착층의 두께는 0.1 mm ~ 0.75 mm 사이에서 변화를 주었음.

#### 5. 결론

본 논문에서는 서로 다른 물질로 이루어지고 온도 변화도 서로 다른 3층보의 모든 경계조건(특히, 자유단)을 만족하는 응력분포를 구할 수 있는 방법을 제시하였다. 본 방법을 이용하면 서로 다른 온도를 가진 물질을 접합시키는 클래딩 및 코팅과 같은 제조 공정에서 생기는 잔류응력 및 사용 중에 생기는 온도 변화에 의한 응력분포를 쉽게 구할 수 있다.

Al-Solder-Cu로 구성된 접층보의 수치예에 국한하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1.  $x$ -축 방향의 응력은 접착층의 두께가 두꺼울수록 Al-층 표면에서 큰 인장응력이, 접착층의 두께가 얇을수록 Cu-층 표면에서 큰 압축응력이 작용한다.
2. 접착층의 두께가 얇을수록 Al-층과 접착층의 경계면에서의 최대 전단응력은 커지나 Cu-층과 접착층의 경계면에서의 전단응력은 거의 변화가 없다.
3. 접착층의 두께가 얇을수록 경계면을 따라 작용하는 Al-층의  $y$ -축 방향으로 큰 인장응력이 작용하지만 Cu-층의  $y$ -축 방향으로 큰 압축응력이 작용한다.

#### 참고문헌

- (1) P. B. Grimado : Interlaminar Thermoelastic Stresses in Layered Beams, *Journal of Thermal Stresses*, 1 (1978), 75-86
- (2) W. T. Chen and C. W. Nelson : Thermal Stress in Bonded Joints, *IBM Journal of Research and Development*, 23-2 (1979), 179-188
- (3) D. Chen, S. Cheng and T. D. Gerhardt : Thermal Stresses in Laminated Beams, *Journal of Thermal Stresses*, 5 (1982), 67-84
- (4) H. Williams : Asymptotic Analysis of the Thermal Stresses in a Two-Layer Composite with an Adhesive Layer, *Journal of Thermal Stresses*, 8 (1985), 183-203
- (5) W.-L. Yin : Thermal Stresses and Free-Edge Effects in Laminated Beams: A Variational Approach Using Stress Functions, *ASME Journal of Electronic Packaging*, 113 (1991), 68-75
- (6) W.-L. Yin, : Refined Variational Solutions of the Interfacial Thermal Stresses in a Laminated Beam, *ASME Journal of Electronic Packaging*, 114 (1992), 193-198
- (7) A.-Y. Kuo : Thermal Stresses at the Edge of a Bimetallic Thermostat, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56 (1989), 585-589
- (8) A.-Y. Kuo, : Effects of Thickness on Thermal Stresses in a Thin Solder or Adhesive Layer, *ASME Journal of Electronic Packaging*, 114 (1992), 199-202
- (9) F. B. Hilderbrand : *Advanced Calculus for Application*, 2nd Ed. (1975), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 18-23