

면내/면외변형을 고려한 이송되는 박막의 진동해석

Vibration Analysis of an Axially Moving Membrane with In-Plane/Out-of-Plane Deformations

신창호*·정진태**

Changho Shin and Jintai Chung

Key Words : Axially Moving Material(이송체), Vibration Analysis(진동해석), steady state(평형상태)

ABSTRACT

The vibration analysis of an axially moving membrane are investigated when the membrane has the two sets of in-plane boundary conditions, which are free and fixed constraints in the lateral direction. Since the in-plane stiffness is much higher than the out-of-plane stiffness, it is assumed during deriving the equations of motion that the in-plane motion is in a steady state. Under this assumption, the equation of out-of-plane motion is derived, which is a linear partial differential equation influenced by the in-plane stress distributions. After discretizing the equation by using the Galerkin method, the natural frequencies and mode shapes are computed. In particular, we put a focus on analyzing the effects of the in-plane boundary conditions on the natural frequencies and mode shapes of the moving membrane.

1. 서 론

축방향 이송체의 응용분야는 자기테이프, 벨트, 종이, 웹 등의 여러 공학 분야에서 쉽게 발견할 수 있다. 이러한 이송시스템의 진동문제는 많은 관심의 대상이 되어 연구가 활발하게 진행되어 왔다. Mote와 Wickert⁽¹⁾는 축방향 이송체의 안정성에 관한 확장된 연구를 수행하였으며, 평판의 진동과 안정성에 대한 연구는 판(plate)모델을 이용하여 Ulsoy와 Mote⁽²⁾가 수행하였다. J. Neimi와 A. Pramila⁽³⁾는 FEM을 통해 이송되는 박막의 횡방향 진동을 조사하였다. 위의 연구들은 주로 이송되는 이송체의 면외방향(횡방향) 진동에만 국한하여 연구를 수행해왔다. 하지만, 이송체의 면내변형은 시스템의 동적거동에 중요한 영향을 미치는 기하학적 비선형과 관련되어 있기 때문에 이송시스템의 진동을 연구할 때 반드시 포함되어야 한다.

또한, Thurman과 Mote⁽⁴⁾는 연성된 비선형의 축방향 이송체의 자유진동을 제시하였다. 기하학적 비선형성을 포함하여 비선형의 수치모델과 비선형의 영향을 H. Koivurova와 A. Pramila⁽⁵⁾가 제시하였다. 기하학적 비선형성을 가진 현의 진동에 대한 연구를 J. Chung⁽⁶⁾가 수행하였다. 비선형에 대한

연구를 수행한 위의 논문들은 주로 비선형성의 주요 영향에 대해 지적하였다. 그러나 면내방향의 경계조건의 영향에 대해서는 언급하지 않았다.

본 논문에서는 이송되는 박막이 두 개의 서로 다른 면내 경계조건을 가진 경우에 대해 진동특성을 파악하고자 한다. 기하학적 비선형성을 포함하여 면내변위는 정적 평형상태, 면외변위는 동적 평형상태라 가정한 후, 확장된 Hamilton 원리⁽¹⁰⁾로부터 면내 및 면외 방정식을 유도하여 Galerkin의 방법을 이용하여 이산화한다. 이산화된 행렬-벡터방정식을 통해 고유진동수와 모드형상을 조사하여 서로 다른 면내 경계조건에 따른 박막의 횡방향 진동을 비교하고 영향을 분석하고자 한다.

2. 운동방정식

Fig.1은 축방향(x 방향)으로 이송되는 박막에 대한 개략도이다. 박막은 두 쌍의 롤러에 의해 지지되어 있고, 길이 L , 폭 b , 두께는 h 이다. 축방향의 속도 V 는 일정하고, 양 끝단의장력 T 는 일정하다고 가정한다.

박막의 운동은 고정좌표계인 xyz -좌표계를 사용하여 변위에 의해 표현한다. P 점의 운동은 축방향 변위를 u , 폭방향(y 방향) 변위를 v , 횡방향(z 방향) 변위를 w 로 표시한다.

또한 운동방정식을 구할 때 면내운동은 정상상태(steady state)이며 면외운동은 동적상태(dynamic

* 한양대학교 일반대학원 정밀기계공학과

E-mail : scho@ihanyang.ac.kr

Tel : (031) 501-4590, Fax : (031) 406-6964

** 한양대학교 기계공학과

state)라 가정하였다. 이것은 면내방향의 고유진동수가 면외방향보다 훨씬 크기 때문이다. 이런 가정에 대한 예는 회전원판^(7,8,9)에서도 확인할 수 있다. 언급한 가정에 의해 축방향 및 폭방향 변위는 공간 좌표인 x, y 의 함수이다. 또한 횡방향 변위는 동적 상태이므로 공간 좌표인 x, y 뿐만 아니라 시간 t 의 함수이며 다음과 같다.

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(t, x, y) \quad (1)$$

박막에 대한 운동에너지는 아래의 식과 같다.

$$K = \frac{1}{2} \rho h \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dA \quad (2)$$

여기서, ρ 는 박막의 밀도이다. A 는 $A = bL$ 인 단면적이다. 또 위치에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} h \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dA \quad (3)$$

여기서, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 는 x, y 의 변형률, ε_{xy} 는 전단 변형률이며 각각에 대응하는 응력들은 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 이다. 박막의 큰 변형에 의해 발생하는 기하학적 비선형성을 고려하기 위해서, 변형률은 변위에 대한 비선형 함수로 표현되며, 이것은 von Karman 변형률로 다음과 같다.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

비록 선형화된 응력을 비선형 응력대신에 사용하더라도 박막의 동적 운동을 기술할 수 있다. 왜냐하면 기하학적 비선형성은 큰 변형에 의해 변형률에 주로 영향을 주기 때문이다. 이런 모델링 기법은 다른 회전원판^(7,8,9)에서 찾아볼 수 있다. 선형 응력을 사용하여 위치에너지의 변분을 구해보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta U = \int_A (q_x \delta \varepsilon_x + q_y \delta \varepsilon_y + 2q_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dA \quad (5)$$

여기서 q_x, q_y, q_{xy} 는 박막의 선형 응력이며 다음과 같다.

$$q_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad q_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$q_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

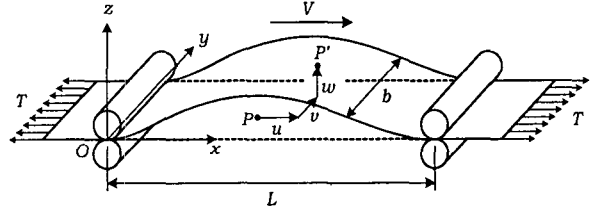


Fig. 1 Model of an axially moving membrane with velocity V

최종 운동방정식은 확장된 Hamilto 원리⁽¹⁰⁾를 사용하여 구한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (7)$$

여기서 t_1, t_2 는 임의의 시간, δ 는 변분 연산기호이다. W_{nc} 는 비보존력에 의한 일이며, M 은 수송운동량(momentum transport)이다. 단위 폭당 장력 T 는 양끝단면에, 압력 $P(t, x, y)$ 가 박막의 표면에 작용되어 비보존력에 의한 일은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = T \int_0^b (\delta u|_{x=L} - \delta u|_{x=0}) dy + \int_A P \delta w dA \quad (8)$$

다른 한편으로, 수송운동량의 변분은

$$\delta M = \rho h V \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{x=0}^L \quad (9)$$

식(2), (5), (8)과 (9)를 식(7)에 대입하여 운동방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\rho h V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\rho h V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(q_x \frac{\partial w}{\partial x} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left(q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = P \quad (12)$$

경계조건의 종류는 참고문헌⁽¹¹⁾처럼 고려하였다. 폭방향 v 의 구속조건만이 다르고 나머지는 동일하다. 경우 I 의 경계조건은

$$q_x = T, \quad q_{xy} = w = 0 \quad \text{at } x=0, L \quad (13)$$

$$q_y = q_{xy} = q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y=0, b \quad (14)$$

반면 경우 II 의 경계조건은

$$q_x = T, \quad v = w = 0, \quad \text{at } x=0, L \quad (15)$$

$$q_y = q_{xy} = q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y=0, b \quad (16)$$

3. 운동방정식의 이산화

모든 경계조건을 만족하는 비교함수(comparison function)을 사용하기 어려워 허용함수(admissible function)를 사용할 수 있는 weak form 으로 변형하여 사용하였다.

면내운동에 대한 weak form 은 식(10), (11)과 (12)에 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 를 각각 곱하고, 합하여 전체면적에 대해 적분을 한 후, 부분적분을 이용하여 전개하고 weak form 을 구한 다음 u , v , w 에 대한 시도함수 및 비중함수를 대입하여 \bar{T}_{mn}^u , \bar{T}_{mn}^v , $\bar{T}_{rs}^w(t)$ 에 대해 정리하면

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (k_{mni}^{uu} T_{ij}^u + k_{mni}^{uv} T_{ij}^v) = f_{mn}^{uv} \quad (17)$$

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (k_{mni}^{vu} T_{ij}^u + k_{mni}^{vv} T_{ij}^v) = 0$$

$$\text{for } m = 0, 1, \dots, N_x \text{ and } n = 0, 1, \dots, N_y \quad (18)$$

$$\sum_{p=0}^{M_x} \sum_{q=0}^{M_y} (m_{rspq}^w \ddot{T}_{pq}^w + 2VG_{rspq}^w \dot{T}_{pq}^w + V^2 h_{rspq}^w T_{pq}^w + k_{rspq}^w T_{pq}^w) = f_{rs}^w$$

$$\text{for } r = 0, 1, \dots, M_x \text{ and } s = 0, 1, \dots, M_y \quad (19)$$

여기서, w 의 시도함수는

$$w = \sum_{p=0}^{M_x} \sum_{q=0}^{M_y} T_{pq}^w(t) \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_q(y) \quad (20)$$

w 에 해당하는 비중함수는 다음과 같다.

$$\bar{w} = \sum_{r=0}^{M_x} \sum_{s=0}^{M_y} \bar{T}_{rs}^w(t) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} Y_s(y) \quad (21)$$

또한 k_{mni}^{uu} , k_{mni}^{uv} , k_{mni}^{vu} , k_{mni}^{vv} , f_{mn}^{uv} 은 참고문헌⁽¹¹⁾와 동일하다. 그리고 식(19)에 보인 계수들은

$$m_{rspq}^w = \rho h \delta_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy,$$

$$g_{rspq}^w = \rho h \alpha_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy$$

$$h_{rspq}^w = -\frac{(p+1)^2 \pi^2}{2} \frac{\rho h}{L} \delta_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy$$

$$f_{rs}^w = \int_A P(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} Y_s(y) dA$$

$$k_{rspq}^w = \frac{(r+1)(p+1)\pi^2}{L^2} \int_A q_x(x, y) \cos \frac{(r+1)\pi x}{L} \cos \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_s(y) Y_q(y) dA$$

$$+ \int_A q_y(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} \frac{dY_s(y)}{dy} \frac{dY_q(y)}{dy} dA$$

$$+ \frac{(r+1)\pi}{L} \int_A q_{xy}(x, y) \cos \frac{(r+1)\pi x}{L} \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_s(y) \frac{dY_q(y)}{dy} dA$$

$$+ \frac{(p+1)\pi}{L} \int_A q_{xy}(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} \cos \frac{(p+1)\pi x}{L} \frac{dY_s(y)}{dy} Y_q(y) dA, \quad (22)$$

여기서

$$\delta_{rp} = \begin{cases} 1 & \text{for } r = p, \\ 0 & \text{for } r \neq p, \end{cases}$$

$$\alpha_{rp} = \begin{cases} 0 & \text{for } r = p, \\ \frac{[1 - (-1)^{r+p}](r+1)(p+1)}{(r-p)(r+p+2)} & \text{for } r \neq p. \end{cases} \quad (23)$$

이산화된 운동방정식은 두개의 행렬-벡터방정식으로 구성된다. 하나는 정상상태의 면내평형방정식이며, 다른 하나는 면외방정식이다. 식(17)와 (18)은 아래와 같이 된다.

$$\mathbf{K}^{uv} \mathbf{T}^{uv} = \mathbf{F}^{uv} \quad (24)$$

여기서,

$$\mathbf{T}^{uv} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^u \\ \mathbf{T}^v \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{T}^u = \{T_{00}^u, T_{10}^u, \dots, T_{N_x,0}^u, T_{01}^u, T_{11}^u, \dots, T_{N_x,1}^u, \dots, T_{0N_y}^u, T_{1N_y}^u, \dots, T_{N_x,N_y}^u\}^T$$

$$\mathbf{T}^v = \{T_{00}^v, T_{10}^v, \dots, T_{N_x,0}^v, T_{01}^v, T_{11}^v, \dots, T_{N_x,1}^v, \dots, T_{0N_y}^v, T_{1N_y}^v, \dots, T_{N_x,N_y}^v\}^T \quad (26)$$

식(24)는 강제운동을 제거하기 위해 다른 행과 열에 종속되는 0 값을 갖는 행과 열을 제거하여야 한다. 식(24)로부터 T_{ij}^u, T_{ij}^v 의 계수를 계산하면 면내변위 뿐만 아니라 면내응력을 구할 수 있다. 이산화된 면외운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}^w \ddot{\mathbf{T}}^w + 2VG^w \dot{\mathbf{T}}^w + (V^2 \mathbf{H}^w + \mathbf{K}^w) \mathbf{T}^w = \mathbf{F}^w \quad (27)$$

여기서, \mathbf{M}^w 는 면외 질량행렬, \mathbf{G}^w 은 자이로스코프 힘에 관련된 행렬, \mathbf{H}^w 원심력에 의한 행렬, \mathbf{K}^w 구조강성행렬, \mathbf{F}^w 횡방향의 힘벡터이며, \mathbf{T}^w 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}^w = \{T_{00}^w, T_{10}^w, \dots, T_{M_x,0}^w, T_{01}^w, T_{11}^w, \dots, T_{M_x,1}^w, \dots, T_{0M_y}^w, T_{1M_y}^w, \dots, T_{M_x,M_y}^w\}^T \quad (28)$$

축방향으로 이송되는 박막의 면외방향의 고유진동수와 모드형상을 얻기 위해서는 아래 식

$$\mathbf{T}^w = \mathbf{T}_0 e^{i\omega t} \quad (29)$$

을 이용하여 식(27)에 대입하여 정리하여 고유치 문제를 푼다. 또한 물성치는 $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$, $E = 3.8 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $L = 420 \text{ mm}$, $h = 25 \text{ }\mu\text{m}$ and $T = 25 \text{ N/m}$ 이다. 단순화 하기 위해 무차원화된 $\tilde{\omega}$ 과 \tilde{V} 을 사용하였다.

$$\tilde{\omega} = \omega_n \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{T}}, \quad \tilde{V} = V \sqrt{\frac{\rho h}{T}} \quad (30)$$

4. 고유진동수

정지상태의 박막의 면외방정식이 경우 I의 경우 타당함을 보이기 위해 x 방향만 응력이 존재함을 이용하여 식(12)는 다음과 같이 축소될 수 있다.

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = Ph \quad (31)$$

그러므로 경우 I의 박막의 경우 유연 현(string)의 고유진동수와 같음을 알 수 있다. Tabel 1은 정적인 박막의 특성을 나타낸다. Tabel 1에서 보는 것처럼 기저함수의 개수에 관계없이 수렴함을 알 수 있으며 유연 현의 값과 동일하게 수렴한다. 또한 Table 1의 모드(k, l)에서 k, l 은 각각 x 방향과 y 방향의 nodal line을 나타낸다.

경우 I에 대한 정적 모드형상은 Fig. 2와 같다. 동일한 x 의 방향의 nodal line에서 같은 고유진동수를 갖지만 모드형상은 서로 다름을 알 수 있다. 경우 II에 대한 수렴성은 Table 2에 나타내었다. 기저함수의 수가 증가함에 따라 수렴함을 알 수 있으며, 특히 경우 I과 다르게 동일한 x 의 방향의 nodal line에서 고유진동수가 서로 다른 값을 갖게 되며, 경우 I에 비해 낮은 값을 갖는다. 또한 Fig. 3은 경우 II에 대한 정적 모드형상을 나타내며 각각 서로 다르다. 경우 I과 II의 모드형상은 서로 다른 형태로 차이가 발생함을 볼 수 있다. 이것은 면내방향의 경계조건에 따라 고유진동수와 모드형상이 서로 달라짐을 알 수 있다.

한편 속도의 증가에 따른 위험속도(critical speed)에 대해서 경우 I과 II에 대해 Fig. 4과 5에 각각 나타내었다. Fig. 4는 경우 I에 대한 속도의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸다. 고유진동수는 속도에 따라 감소하며, 유연 현처럼 위험속도가 1임을 알 수 있다. 반면 Fig. 5는 속도의 증가에 따라 고유진동수는 감소하며, 위험속도는 경우 I보다 작은 0.95임을 알 수 있다. 즉 면내 경계조건에 의해 위험속도가 영향을 받음을 알 수 있다.

5. 결론

두개의 서로 다른 경계조건을 갖고 기하학적 비선형성을 갖는 이송되는 박막의 운동방정식을 구하였다. 면내운동은 정상상태, 면외방향은 동적상태라 가정하고, 확장된 Hamilton 원리를 적용하여 면내 및 면외 방정식을 구하였다. 면내방정식은 선형으로 오직 면내방향만으로 연성되고, 면외 방정식은 비선형으로 구성된다. Galerkin 방법을 사용하여 운동방정식을 이산화 하고 고유진동수와 모드형상에 관해 조사하였다. 위의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 모드형상 및 고유진동수는 면내 경계조건에 의해 영향을 받는다.

(2) 위험속도는 면내 경계조건에 따라 변화될 수 있다.

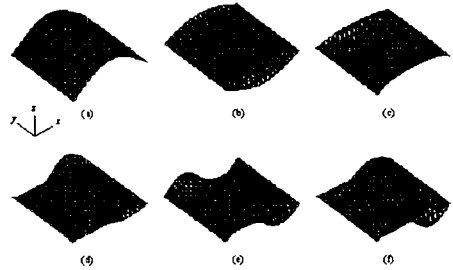


Fig. 2 Mode shapes of the stationary membrane with the boundary conditions of Case I: (a) the (0, 1) mode; (b) the (0, 2) mode; (c) the (0, 3) mode; (d) the (1, 1) mode; (e) the (1, 2) mode and (f) the (1, 3) mode

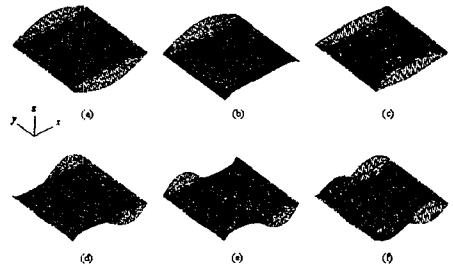


Fig. 3 Mode shapes of the stationary membrane with the boundary conditions of Case II: (a) the (0, 1) mode; (b) the (0, 2) mode; (c) the (0, 3) mode; (d) the (1, 1) mode; (e) the (1, 2) mode and (f) the (1, 3) mode.

Table 1 Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies $\tilde{\omega}$ for the stationary membrane with the boundary conditions of Case I

M_x	M_y	Mode			
		(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
2	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
3	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
4	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
5	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000

Table 2 Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies $\tilde{\omega}$ for the stationary membrane with the boundary conditions of Case II

M_x	M_y	Mode			
		(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
2	5	0.9274	0.9353	1.8596	1.8738
	6	0.9274	0.9206	1.8596	1.8479
	7	0.9144	0.9206	1.8380	1.8479
	8	0.9144	0.9086	1.8380	1.8293
3	5	0.9274	0.9353	1.8595	1.8737
	6	0.9274	0.9206	1.8596	1.8477
	7	0.9144	0.9206	1.8374	1.8477
	8	0.9144	0.9086	1.8374	1.8283
4	5	0.9272	0.9351	1.8595	1.8737
	6	0.9272	0.9205	1.8595	1.8477
	7	0.9143	0.9205	1.8374	1.8477
	8	0.9143	0.9084	1.8374	1.8283
5	5	0.9272	0.9351	1.8592	1.8734
	6	0.9272	0.9205	1.8592	1.8474
	7	0.9143	0.9205	1.8370	1.8474
	8	0.9143	0.9084	1.8370	1.8273
	9	0.9024	0.9084	1.8168	1.8273

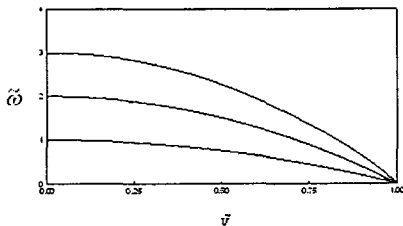


Fig. 4 Variation of the natural frequencies for the dimensionless velocity with the boundary conditions of Case I

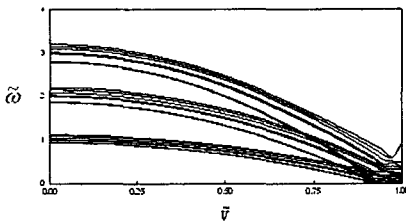


Fig. 5 Variation of the natural frequencies for the dimensionless velocity with the boundary conditions of Case II

- (1) Wickert, J. A. and Mote, Jr, C. D., 1988, "Current research on the vibration and stability of axially moving materials", Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 3-13.
- (2) Ulsoy, A. G. and Mote, Jr, C. D., 1982, "Vibration of wide band saw blades", Journal of Engineering for industry Vol. 104, pp. 71-78.
- (3) Niemi, J. and Pramila, A., 1987, "FEM-analysis of transverse vibrations of an axially moving membrane immersed in ideal fluid", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 2301-2313.
- (4) Thurman, A. L. and Mote, Jr, C. D., 1969, "Free, periodic, nonlinear, oscillation of an axially moving strip", Journal of Applied Mechanics, Vol. 36 pp. 83-91.
- (5) Koivurava, H. and Pramila, A., 1997, "Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method", Computational Mechanics, Vol. 20 pp. 573-581.
- (6) Chung, J., Han, C. S. and Yi, K., 2001, "Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration", Journal of Sound and Vibration, Vol. 240 pp. 733-746.
- (7) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., 1976, "The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system", American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 485-490.
- (8) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehmann, B. F., 1987, "Dynamic response of a guided circular saw", Journal of Sound and Vibration, Vol. 112, pp. 527-539.
- (9) Chung, J., Heo, J. W. and Han, C. S., 2003 "Natural frequencies of a flexible spinning disk misaligned with the axis of rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 260 pp. 763-775.
- (10) McIver, D. B., 1972, "Hamilton's principle for systems of changing mass", Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7, pp. 249-261.
- (11) Shin, C., Kim, W. Chung, J., 2003 "Free in-plane vibration of an axially moving membrane", Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, pp. 137-154.