

# 대형수직펌프의 자유진동 해석

。 배 춘 희\*

## Free Vibration of Vertica Pump

Chun-Hee Bae,

### ABSTRACT

Vertical pump are widely used owing to the fact that they occupy small floor space. In this type of pumps, however, the vibrational problems are very important, since, in many cases, they have less stiffness in comparison with later pumps. This study presents a simple solution method for calculating the natural frequencies and modes of vertical pumps. In this study, a model of a vertical pump was developed and the nondimensional parameters for the vibrational characteristics of it were determined. Added mass was calculated for the effects of water and the transfer matrix method was used.

### 1. 개론

유체내에서, 또는 유체와 접한 상태로 진동하는 구조물 요소는 유체의 저항에 의하여 고유진동수와 댐핑등 동적인 특성이 현저히 변하게 된다.

유체속에서 진동하는 구조물 요소에 대한 유체의 영향으로는 관성효과와 감쇠효과를 생각할 수 있으며 관성효과는 부가질량(added mass)의 개념을 도입하여 연구하는 것이 보통이다. 이전에는 미세한 간격을 갖는 구조물을 제외하고는 댐핑은 일반적으로 중요하지 않다고 생각했으며 따라서 이러한 경우의 문제는 주로 운할분야의 연구에 국한되었다. 유체와 연관된 구조물에 관한 연구는 유동 및 지진에 의한 손상으로부터 각종 용기와 파이프등을 보호하기

위한 연구로써 석유화학산업과 발전소 분야에서 흥미있는 주제가 되었다. 그 후, 터어빈 블레이드 및 수직펌프와 같은 회전체 기계류, 내압용기, 열교환기, 핵반응기 요소 등에 대한 기술의 진보에 따라 많은 연구가 이루어졌다. 액체에 잠겨 있는 고체의 운동에 관한 연구[1], 점성유체내에서 진동하는 막대의 부가질량과 감쇠계수에 대한 이론적 연구[2], 그리고 유한요소법을 이용한 부가질량해석에 관한 연구[3] 등 유체-고체 시스템에 관한 연구가 활발히 이루어졌다. 이러한 연구결과를 토대로 하여 Shimogo[4]는 물에 의한 압력효과를 부가질량으로 대체하여 수직펌프의 진동에 대한 시험과 해석을 하였으며, 파이프에 물이 채워진 경우에는 공진주파수가 10%정도 작아지나 축의 회전과 파이프내의 물의 유동은 공진주파수에 거의 영향을 미치지 않음을 보고하였다. 또한 Yang[5]은

\* 정회원 한전 전력연구원

Fritz[1]가 제안한 식을 이용하여 물의 부가질량을 계산하고 집중질량법(lumped mass method)을 이용하여 수직펌프의 고유치와 주기적인 외력에 대한 시간응답해석을 수행한 바 있다. 최근에는 액체 저장용기의 진동과 관련하여 이 분야의 연구가 진행되고 있다[6-8]. 오늘날까지 빔의 진동특성에 관한 연구는 많이 수행되어 왔으나 대부분 비교적 단순한 형상의 보에 관한 연구에 국한되었으며, 실제적인 구조물 요소의 진동특성과 오차가 너무 크거나 계산시간이 너무 많이 소요되어 빔의 설계단계에는 이용하기 곤란한 경우가 많았다. 또한 해석모델을 약간만 수정하여도 기존의 해석방법이 효율적이지 못한 경우가 많으며 실제의 구조물은 빔의 중간에서도 지지되어 있는 경우가 많다. 이러한 더블 스패น(double-span) 형상의 빔에서는 중간 지지점 양쪽의 빔이 서로 진동특성에 영향을 미치게 된다. 본 연구에서는 수직펌프를 더블-스팬 빔으로 이상화하였으며 부가질량을 고려한 전달수행렬을 유도하여 수직펌프 모델의 고유진동을 해석하기로 한다.

## 2. 이론적 배경 및 해석

### 2.1 해석모델

수직펌프는 상부의 모터부와 하부의 임펠러부, 그리고 중간의 칼럼부로 구성되어 있으며 수직펌프 구조의 진동을 해석하기 위한 모델로 그림 1과 같이 일부가 유체에 잠겨있는 더블-스팬 빔을 가상할 수 있다. 여기에서  $M_1$ 과  $M_2$ 는 각각 모터와 임펠러의 질량을 의미한다. Fig1의 모델에서 칼럼부는 직경이 그 길이가 직경에 비하여 매우 크므로 빔으로 가정하며 빔의 전단 효과와 회전관성효과는 무시하기로 한다.

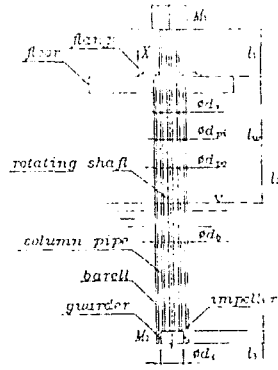


Fig. 1 Vertical pump model

### 2.2 운동방정식과 전달함수행렬

스테이션(station)  $i$ 에 병진스프링 ( $k_i$ ), 회전스프링 ( $t_i$ ), 집중질량 ( $M_i$ ), 그리고 집중회전관성 ( $J_i$ )이 결합되어 있으며 필드(field)  $i$  (스테이션  $i$ 와 스테이션  $i+1$  사이의 구간)의 길이, 굽힘강성, 그리고 단위길이당의 질량이 각각  $l_i, EI_i$ , 그리고  $m_i$ 인 멀티-스팬 빔을 고려하기로 한다. 이 빔의  $i$ 번째 필드에서의 굽힘진동에 대한 식은

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x_i \leq l_i \quad (1)$$

로 되며 단순조화운동을 가정하여

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \sin \omega t \quad (2)$$

라고 하면 변위  $W_i(x_i)$ 는

$$W_i(x_i) = c_1 \cos p_i x_i + c_2 \sin p_i x_i + c_3 \cosh p_i x_i + c_4 \sinh p_i x_i \quad (3)$$

$$p_i^4 = \frac{m_i}{EI_i} \omega^2 \quad (4)$$

으로 구해진다.

$i$ 번째 필드의 양단을 각각 스테이션  $i$ 와 스테이션  $(i+1)$ 로 나타내고  $i$ 번째

필드에서 가장 오른쪽과 가장 왼쪽 점에서의 변위 및 그의 미분계수를 각각

$$W_{(i+1)L}^{(n)} = \lim_{x_i \rightarrow l} \frac{d^{(n)}W_i}{dx_i^{(n)}}, \quad (5-a)$$

$$W_{iR}^{(n)} = \lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{d^{(n)}W_i}{dx_i^{(n)}}, \quad n=0,1,2,3 \quad (5-b)$$

으로 정의하기로 한다.

여기에서  $W_{(i+1)L}^{(n)}$ 은 스테이션  $(i+1)$ 의 바로 왼쪽에서 변위의  $n$ 차 미분계수를 의미한다. 그리고 무차원화 된 식을 유도하기 위하여 무차원 고유진동수 계수와 무차원 변위 및 그의 미분계수를 각각

$$\Omega_i = p_i l_i, \quad (6)$$

$$y_{(i+1)L}^{(n)} = \frac{1}{p_i^n} W_{(i+1)L}^{(n)}, \quad (7-a)$$

$$y_{iR}^{(n)} = \frac{1}{p_i^n} W_{iR}^{(n)}, \quad n=0,1,2,3 \quad (7-b)$$

으로 정의하기로 한다.

### 2.3 스펙사이의 결합조건

스테이션  $i$  전후에 걸쳐서 빔의 변위와 경사각이 같아야 하므로

$$W_{iL} = W_{iR}, \quad (8-a)$$

$$\Theta_{iL} = \Theta_{iR} \quad (8-b)$$

이 성립하여야 한다. 또한 빔의 단면에서의 굽힘모멘트를  $M_b$ , 그리고 전단력을  $V$ 라고하면 스테이트  $i$ 에 대한 전단력과 모멘트의 평형조건은 다음의 식으로 된다.

$$-k_i W_{iR} + V_{iR} - V_{iL} = -M_i \omega^2 W_{iR} \quad (9-a)$$

$$-t_i \Theta_{iR} + (M_b)_{iR} - (M_b)_{iL} = -J_i \omega^2 \Theta_{iR} \quad (9-b)$$

빔의 변위, 경사각, 굽힘모멘트, 그리고

전단력사이의 관계식을 적용하고 식 (7-a)와 (7-b)를 이용하여 위의 식을 정리하면 다음과 같은 무차원 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$Y_{iR} = S_i Y_{iL}, \quad i=2,3,\dots,n \quad (10)$$

### 2.4 부가질량

유체내에서 진동하는 빔에 작용하는 물의 반력을 결정하기 위해서는 우선 빔 주위의 압력분포를 구해야 한다. 이 압력분포는 Navier-Stokes의 식과 연속조건으로부터 구할 수 있다. 빔의 진폭이 작은 경우에는 Navier-Stokes의 식에서 비선형항을 무시할 수 있으며 비점성 유체의 경우, 압력분포는 라플라스(Laplace)의 식으로 된다.

본 연구에서는 빔의 길이가 단면의 치수에 비하여 매우 크므로 2차원 문제로 생각할 수 있으며 압력분포에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_n \quad (12)$$

여기에서  $n$ 은 고체의 표면에 대하여

수직으로 유체를 향하는 방향이며  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 축이  $n$ 방향과 이루는 항여현을 의미한다.

### 3. 경계조건과 고유치 문제

스테이션 1에서 전단력과 모멘트의 평형조건은 다음의 식으로 된다.

$$-k_1 W_{1R} + V_{1R} = -M_1 \omega^2 W_{1R}, \quad (13-a)$$

$$-t_1 \Theta_{1R} + (M_b)_{1R} = -J_1 \omega^2 \Theta_{1R} \quad (13-b)$$

빔의 변위, 경사각, 굽힘모멘트, 그리고 전단력사이의 관계식을 적용하고

정리하면 스테이션  $n$ 에서의  
평형조건식을 다음과 같은 무차원  
식으로 나타낼 수 있다.

$$y_{(n+1)L}'' = \left( -\frac{t_{n+1}}{EI_n} \frac{1}{p_n} + \frac{J_{n+1}}{m_n} p_n^3 \right) y_{(n+1)L}' \quad (14-c)$$

$$y_{(n+1)L}''' = \left( \frac{k_{n+1}}{EI_n} \frac{1}{p_n^3} - \frac{M_{n+1}}{m_n} p_n \right) y_{(n+1)L} \quad (14-d)$$

지금까지 유도한 식들을 이용하면  
스테이션 1과 스테이션  $(n+1)$ 에서의  
변위 및 그의 미분계수들 사이의  
관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y_{(n+1)L} = F_n S_n \cdots F_2 S_2 F_1 Y_{1R} \quad (15)$$

여기에 식 (14)의 경계조건을 적용하면  
 $\Omega_1$ 을 계산해 낼 수 있다. 그리고  $EI_1$ 과  
 $m_1$ , 그리고 보의 전체길이  $l$ 을 기준으로  
한 무차원 고유진동수 계수  $\Omega$ 를

$$\Omega = \frac{l}{l_1} \Omega_1 \quad (16)$$

으로 정의하면 고유진동수는 다음의 식에  
의하여 구할 수 있다.

$$\omega = \left( \frac{\Omega}{l} \right)^2 \left( \frac{EI_1}{m_1} \right)^{1/2} \quad (17)$$

#### 4. 수치해석결과 및 검토

앞에서 유도한 식에 따라 부가질량행렬  
을 구하고 필드행렬, 스테이트행렬, 그  
리고 경계조건식을 조합하여 고유치 문  
제를 해결할 수 있는 컴퓨터 프로그램을  
작성하였으며 수치계산의 결과는 다  
음과 같다.

##### 4.1 Kovats의 모델

그림 2는 Kovats[10]가 수직축류펌프 상부  
구조물의 진동해석에 적용했던 모델로서  
외팔보의 중간에 병진스프링이 있고 자유  
단에 집중질량이 결합된 형태이며

$l_2/l_1=1$ ,  $EI_2/EI_1=1$ ,  $m_2/m_1=1$ ,  
 $M/m_1l_1=1$ , 그리고  $kl_1^3/EI_1=80$ 이다.  
Pak[11]은 이 모델을 두 개의 보로 나누어  
두 개의 운동방정식에 여덟 개의 경계조건  
을 적용하여 고유진동수를

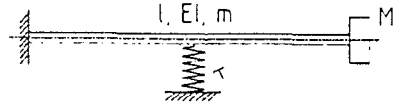


Fig. 2 Kovats' model for vertical pump

계산한 바 있다. 표 1은 본 해석방법을 이  
용하여 구한 고유진동수 계수  $\Omega$ 와 Pak의  
결과를 보여주고 있으며 서로 일치하고 있  
다는 것을 확인할 수 있다.

Table 1 Nondimensional natural  
frequency coefficient  $\Omega$  of Kovats' Model

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Pak	1.587	4.54	7.15	10.289	
해석	1.587	4.54	7.15	10.2887	13.39

##### 4.2 더블스팬 빔 모델

그림 1의 더블-스팬 빔 모델에 대한 제원  
은 다음과 같다.

$M_1=120\text{kg}$  ; 모터의 질량  
 $M_2=25\text{kg}$  ; 임펠러의 질량  
 $d_s=50\text{mm}$  ; 회전축의 직경  
 $d_{pi}=200\text{mm}$  ; 칼럼파이프의 내경  
 $d_{po}=215\text{mm}$  ; 칼럼파이프의 외경  
 $d_b=450\text{mm}$  ; 배럴의 내경  
 $d_i=300\text{mm}$  ; 임펠러의 외경  
 $t=40\text{mm}$  ; 지지부 플랜지의 두께  
 $\rho=7790\text{kg/m}^3$  ; 밀도  
 $E=2 \times 10^{11}\text{N/m}^2$  ; 영률  
 $l_1=1000\text{mm}$ ,  $l_2=3600\text{mm}$   
 $l_3=100\text{mm}$ ,  $l_w=1600\text{mm}$

모터와 임펠러는 집중질량으로  
가정하였으며 배럴은 칼럼파이프 또는  
회전축에 비하여 굽힘강성이 매우 크므로

강체로 가정하였다. 직경  $d_0$ 인 원판의 외경이 완전고정되어 있으며 원판의 중앙에 직경  $d_i$ 인 강체의 원주가 고정되어 있는 경우에 상당회전강성은 다음과 같이 된다는 것이 알려져 있다[12].

$$k_\theta = \frac{Et^3}{\alpha} \quad (18)$$

여기에서  $t$ 는 원판의 두께이며  $\alpha$ 는 표 2와 같다.

Table 2 Values of  $\alpha$

$d_i/d_0$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$\alpha$	0.595	0.320	0.167	0.081	0.035

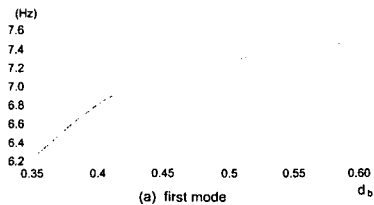
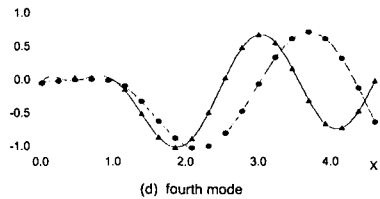
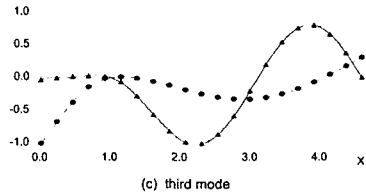
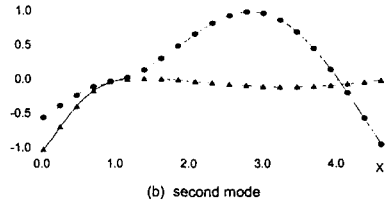
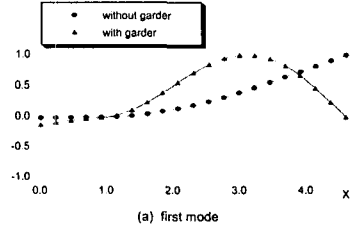
따라서 본 연구에서는 지지부의 플랜지를 상수가  $1.279 \times 10^8 \text{ Nm}$ 인 비틀림 스프링으로 가정하였다. 이 모델에 대한 해석결과 부가질량행렬의 값은

$$m_{ad} = \begin{bmatrix} 57.39 & 0.00 & -93.65 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -93.65 & 0.00 & 252.49 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

으로 구해졌으며 여기에서의 단위는  $\text{kg/m}$ 이다. 보호장치(guarder)의 유무에 따른 고유진동수는 표 3과 같으며 그림 3은 고유모우드를 보여 주고 있다. 그림 4는 보호장치가 없는 경우에 배럴의 내경변화에 따른 1차 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 배럴의 내경이 임펠러 외경의 크기(0.30m)로 접근함에 따라 부가질량의 크기가 급격히 커지며 따라서 고유진동수가 급격히 감소하게 되는 것을 알 수 있다.

Table 3 Natural frequencies of the model of Fig.

Mode	Without guarder	With guarder
1st	7.137 Hz	37.92 Hz
2nd	48.33 Hz	52.33 Hz
3rd	52.86 Hz	133.61 Hz
4th	149.58 Hz	272.91 Hz
5th	290.26 Hz	469.38 Hz



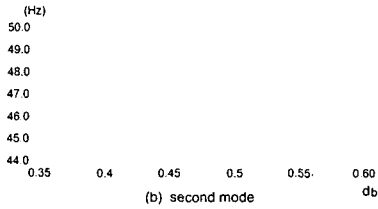


Fig. 4 Natural frequency of first mode as diameter of barrel varies

## 5. 결론

본 연구에서는 수직펌프를, 제한된 유체에 잠겨져 있는 더블-스팬 빔으로 모델링하여 수직펌프 구조의 굽힘진동을 해석하였다. 빔의 진동에 따른 유체의 반력은 부가질량으로 대체하여 펌프모델의 고유진동수와 고유모드를 해석할 수 있는 프로그램을 작성하였다. 빔을 이용한 연속계로 펌프의 구조를 가정하여 전달행렬을 이용하였으므로 매우 적은 계산량으로 펌프모델에 대한 정확한 결과치를 계산해 낼 수 있으며 또한 펌프구조의 고유진동에 관련된 무차원 설계변수를 도출할 수 있었다.

## 참고문헌

[1] Fritz, R.J., 1972, "The Effects of Liquids on the Dynamic Motions of Immersed Solids," J. Engineering for Industry, Trans. ASME, pp. 167-173.  
 [2] Chen, S.S., Wambsganss, M.W., and Jendrzejczyk, J.A., 1976, "Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluids," J. Applied Mechanics, Trans. ASME, pp.325-329.  
 [3] Yang, C.J. and Moran, T.J., 1979, "Finite-Element Solution of Added Mass and Damping of Oscillation Rods in Viscous Fluids," J. Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 46, pp.519-523.  
 [4] Shimogo, T., et al., 1980, "Vibration of Vertical Shaft Pump," Presented at the

Pressure Vessels and Piping Technology Conferences, reprinted from Recent Advances in Lifeline Earthquake Engineering in Japan : PVP-43, pp.143-150.

[5] Yang, B.S., et al., 1988, "Dynamic Response Analysis of Vertical Pumps," Trans. KSME, pp.362-372.

[6] Jorgensen, J.C., 1993, "Rotor Whirl Measurements on a Long Rotating Cylinder Partially Filled with Liquid," J. Vibration and Acoustics, Trans. ASME. Vol.115, pp.141-144.

[7] Mistry, J. and Menezes, J.C., 1995, "Vibration of Cylinders Partially-Filled with Liquids," J. Vibration and Acoustics, Trans. ASME Vol.117, pp.87-93.

[8] Amabili, M. and Dalpiaz, G., 1995, "Breathing Vibrations of a Horizontal Circular Cylindrical Tank Shell, Partially Filled with Liquid," J. Vibration and Acoustics, Trans. ASME, Vol.117, pp.187-191.

[9] Levy, S. and Wilkinson, J., 1976, The Component Element Method in Dynamics, McGraw-Hill, Inc.

[10] Kovats, A., 1962, "Vibration of Vertical Pumps", Journal of Engineering for Power, Trans. ASME Vol.84,pp.195-203.

[11] Pak, C.G., 1982, "Free Lateral Vibration Analysis of Double-Span Beam", Master Thesis, S.N.U.

[12] Roark, R.C. and Young, W.C., 1975, Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, Inc.