

# 유동유체에 의한 불연속 외팔 파이프의 플러터 불안정 Flutter Instability of a Discontinuous Cantilevered Pipe Conveying Fluid

류 봉 조\* · 류 시 용\*\* · 임 경 빈\*\*\*

B. J. Ryu, S. U. Ryu and K. B. Yim

**Key Words** : Discontinuous Pipe Conveying Fluid(유체이송 불연속 파이프), Critical Flow Velocity(임계유속), Vibrational Modes(진동 모드)

## ABSTRACT

This paper deals with the dynamic stability and vibration of a non-uniform cantilevered pipe conveying fluid. The present model consists of two segments with different cross-sections. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the numerical scheme using finite element method is applied to obtain the discretized equations. The critical flow velocities and stability maps of the pipe are obtained by changing step ratios, mass ratios and internal damping parameters of the pipe. Finally, the vibrational modes associated with flutter are shown graphically.

## 1. 서 론

내부 유동유체가 흐르는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동에 관한 연구는 열교환기 튜브, 핵반응 연료 요소 등에서 그 예를 찾아볼 수 있다. 초기 연구는 Ashley와 Haviland<sup>(1)</sup>에 의해 이루어졌는데, 이들은 Trans-Arabian 송유관의 진동문제를 규명하려는 시도를 하였다. Benjamin<sup>(2,3)</sup>은 분절된 2자유도계 송수관의 동적 안정성 문제를 실험과 병행한 연구를 하였다. 그 후, Gregory와 Paidoussis<sup>(4,5)</sup>는 외팔 파이프의 동적안정성에 관한 이론 및 실험적 연구를 행하였다. Sugiyama 등<sup>(6)</sup>은 복수 탄성 스프링 지지되고 집중질량을 갖는 파이프의 동적안정성에 미치는 집중질량과 스프링의 복합효과에 대하여 연구하였고, Sugiyama와 그의 공동연구자들<sup>(7-9)</sup>은 복수의 탄성스프링으로 지지된 수평 파이프의 동적안정성에 미치는 부가 질량과 감쇠의 영향 또는 수평파이프에 부착된 부가질량과 스프링의 복합효과에 대한 이론 및 실험적 연구를 하였다. 최근 류시용 등<sup>(10)</sup>은 내부 유동 유체가 흐르는 외팔 파이프의 불안정 현상을 조사하고 파이프가 불안정일 때의 모드형상과 고유치 분기에 대한 상세한 연구를 하였다. 그러나 위의 연구들의 대부분은 균일 파이프에 대한 동적안정성 및 진동에 관한 연구들이었다. 본 논문의 목적은 불연속 단을 갖는 외팔 수평파이프 내부를 유동 유

체가 흐르는 경우 파이프의 임계유속을 불연속 단면의 2차 모멘트 비와 파이프의 질량비의 변화에 따라 연구하고, 고유치 분기의 안정성 지도와 불안정에 따른 진동모드를 조사하는데 있다.

## 2. 이론해석

### 2.1 수학적 모델

불연속 단을 갖고 내부 유동유체에 의한 파이프의 수학적 모델은 Fig. 1과 같고,  $L$ 은 보의 길이,  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 불연속 단을 중심으로 파이프의 좌측과 우측의 단면의 2차 모멘트를 의미하며  $v$ 는 내부 유동유체의 유속을 나타낸다.

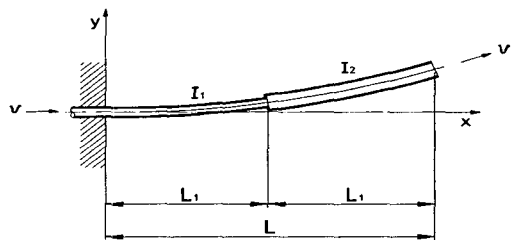


Fig. 1 A mathematical model of a discontinuous cantilevered pipe conveying fluid.

### 2.2 운동방정식

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위해 확장된 해밀톤 원리를 이용하면 다음과 같다.

\* 정회원, 한밭대학교 기계공학부

E-mail : bjrnu701@hanbat.ac.kr

Tel : (042)821-1159, Fax: (042)821-1587

\*\* 한밭대학교 생산융합기술연구소

\*\*\* 동양공업대학 기계과

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서,  $T$ 는 운동에너지,  $W_c$ 는 유체력의 보존성분에 의한 일,  $U$ 는 탄성 포텐셜 에너지,  $\delta W_{id}$ 는 내부감쇠에 의한 가상일, 그리고  $\delta W_{nc}$ 는 비 보존성분에 의한 가상일을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$T = \int_0^L \left[ \frac{m_p}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_p}{2} \left\{ v^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{m_f}{2} v^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \int_0^{L_1} \frac{EI_1}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_{L_1}^L \frac{EI_2}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{id} = & - \int_0^{L_1} E^* I_1 \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \\ & - \int_{L_1}^L E^* I_2 \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = -m_f v \left( \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} \delta y \quad (6)$$

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 무차원화 된 좌표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_f + m_p}}, \quad d = \frac{L_2}{L_1}$$

$$\beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_f + m_p}}, \quad u = vL \sqrt{\frac{m_f}{EI_1}} \quad (7)$$

식 (7)에서  $\xi$ 와  $\eta$ 는 각각 무차원화 된  $x$ 와  $y$ 의 좌표를 나타내고,  $\tau$ 와  $d$ 는 각각 무차원화 된 시간과 불연속 단면의 2차모멘트 비를 나타낸다. 또한,  $\beta$ 는 파이프의 질량비,  $\gamma$ 는 내부감쇠 파라미터,  $u$ 는 무차원화 된 유속을 나타낸다.

식 (7)을 이용하여 지배방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \int_0^1 \left[ \eta_{\tau} \delta \eta_{\tau} + \beta^{\frac{1}{2}} u (\eta_{\tau} \delta \eta_{\xi} + \eta_{\xi} \delta \eta_{\tau}) + u^2 \eta_{\xi} \delta \eta_{\xi} \right] d\xi \right. \\ \left. - \gamma \left[ \int_0^{\xi_1} \eta_{\xi\xi\tau} \delta \eta_{\xi\xi} d\xi + d \int_{\xi_1}^1 \eta_{\xi\xi\tau} \delta \eta_{\xi\xi} d\xi \right] \right] d\tau \\ - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \int_0^{\xi_1} \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - d \int_{\xi_1}^1 \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} \right] d\xi d\tau$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \beta^{\frac{1}{2}} u \eta_{\tau} \delta \eta - u^2 \eta_{\xi} \delta \eta \right]_{\xi=1} d\tau = 0 \quad (8)$$

### 2.3 유한요소법의 적용

식 (8)의 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하며, 외팔 파이프를  $N$ 개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

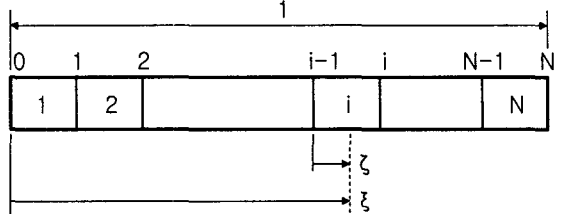


Fig. 2 Finite element model of the pipe.

Fig. 2의 국부좌표 ( $\zeta = N\xi - i + 1$ ;  $0 \leq \zeta \leq 1$ )를 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^1 \eta_{\tau}^{(i)} \delta \eta_{\tau}^{(i)} + \beta^{\frac{1}{2}} u N (\eta_{\tau}^{(i)} \delta \eta_{\tau}^{(i)}) + u^2 N^2 \eta_{\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi}^{(i)} \right] d\xi \right. \\ & \left. - \gamma N^4 \left[ \sum_{i=1}^{\xi_1} \int_0^1 \eta_{\xi\xi\tau}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} + d \sum_{i=\xi_1}^N \int_0^1 \eta_{\xi\xi\tau}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} \right] d\xi \right. \\ & \left. - N^4 \left[ \sum_{i=1}^{\xi_1} \int_0^1 \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} + d \sum_{i=\xi_1}^N \int_0^1 \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} \right] d\xi \right. \\ & \left. - \left[ \beta^{\frac{1}{2}} u N \eta_{\tau}^{(N)} \delta \eta^{(N)} + u^2 N^2 \eta_{\xi}^{(N)} \delta \eta^{(N)} \right]_{\xi=1} \right\} d\tau = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

이제 변위함수  $\eta^{(i)}(\xi, \tau) = \{e^{(i)}(\xi)\} \cdot \{W^{(i)}(\tau)\}$ 를 도입하여 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻는다.

$$[M]\{W_n\} + [C]\{W_n\} + [K]\{W_n\} = \{0\} \quad (10)$$

여기서  $[M]$ 은 조합 질량행렬,  $[C]$ 는 조합 감쇠행렬,  $[K]$ 는 조합 강성행렬을 나타낸다.

### 2.4 모드형상

식 (10)에 있어서 변위벡터  $\{W(\tau)\}$ 를 식 (11)과 같이

$$\{W(\tau)\} = \{X\} \exp(\lambda\tau) \quad (11)$$

가정하면 식 (10)은 식 (12)의 표준 고유치문제로 된다.

$$\lambda [L]\{Z\} = [A]\{Z\} \quad (12)$$

$$\text{여기서, } \{Z\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \{0\} & \{I\} \\ \{-M^{-1}K\} & \{-M^{-1}C\} \end{bmatrix}$$

계의 안정성은 특성근 ( $\lambda = \sigma \pm i\omega$ )의 실수부분인  $\sigma$ 의 부호에 의해 판별된다. 즉,  $\sigma > 0$ 일 때, 계는 불안정하게 되고,  $\sigma < 0$ 일 때 계는 안정하게 된다. 따라서,  $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건으로 이 때의 유속이 임계유속 ( $u_{cr}$ )이 된다. 플러터가 발생하는 임계유속 ( $u_{cr} = u_*$ )에서 고유벡터  $\{X\}$ 에 의해서 다음 식의 횡방향의 변위  $\{W(t)\}$ 를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

$$\{W(t)\} = \{|X_i\} \cos(\omega_* t + \phi_i) \quad (13)$$

여기서, 위상각  $\phi_i$ 는 다음과 같다.

$$\tan \phi_i = \text{Im}(X_i) / \text{Re}(X_i) \quad (14)$$

### 3. 수치해석결과 및 고찰

#### 3.1 질량비와 임계유속 값

불연속 단을 갖고 내부 유동유체에 의해 운동하는 파이프의 동적안정성과 진동에 관한 연구결과들의 그래프는 다양한 불연속 단면의 2차 모멘트 비  $d$ 와 파이프의 질량비  $\beta$ 의 변화에 따라 구해졌으며 내부감쇠는 고려되지 않았다.

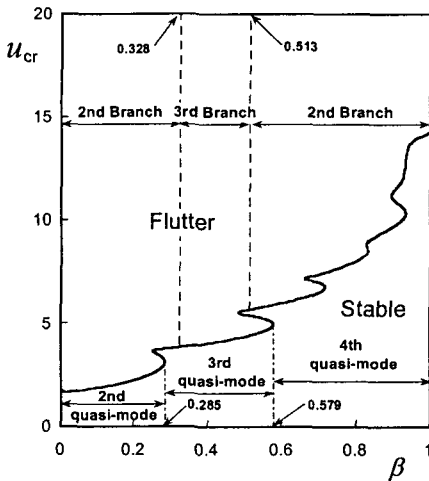


Fig. 3 Stability map and the critical mass ratios for  $d=0.1$ .

Fig. 3과 Fig. 4는 불연속 단면의 2차 모멘트 비  $d$ 가 각각  $d=0.1$ 과  $d=2$ 인 두 경우에 대해 질량비  $\beta$ 값의 변화에 따른 임계 유속 값을 나타낸 그림들이다. 두 그림들에 있어서도 균일 파이프에 대한 이전의 연구<sup>(10)</sup>와 같이 플러터가 발

생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수와의 관계가 일치하지 않는 영역이 존재한다.

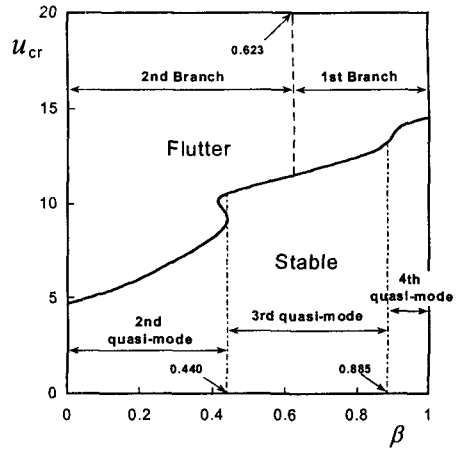


Fig. 4 Stability map and the critical mass ratios for  $d=2.0$ .

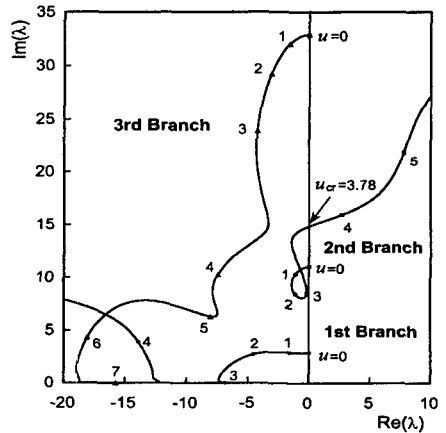


Fig. 5 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues for  $\beta=0.3, d=0.1$ .

Fig. 5와 6은 단면의 2차모멘트 비  $d$ 가 0.1이고, 질량비  $\beta$ 가 각각  $\beta=0.3, \beta=0.35$ 일 때 유속변화에 따른 고유치 곡선을 나타낸다. 먼저 Fig. 5에 있어서는 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수축을 가로질러 플러터가 발생하고, 이 때의 임계유속 값  $u_{cr}=3.78$ 이다. 한편, Fig. 6의 경우에는 3차 모드에 의해 플러터가 유발되며 임계유속은  $u_{cr}=3.89$ 로 Fig. 5의 경우에 비해 임계유속 값이 약간 증가됨을 알 수 있다.

Fig. 7은  $d=0.1$ 일 때,  $\beta$ 가  $\beta=0.3, 0.320, 0.325, 0.328$ 인 경우의 고유치 분기계적을 상세히 나타낸 그림이다.

그림에서 알 수 있듯이  $\beta=0.3, 0.320, 0.325$ 에서는 2차 모드 분기에 의해 플러터가 발생하고,  $\beta=0.328$ 에서는 3차 모드에 의해 불안정이 발생한다.

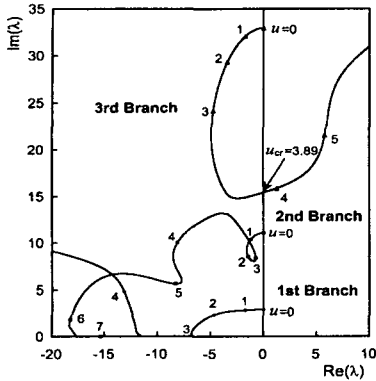


Fig.6 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues for  $\beta = 0.35, d = 0.1$ .

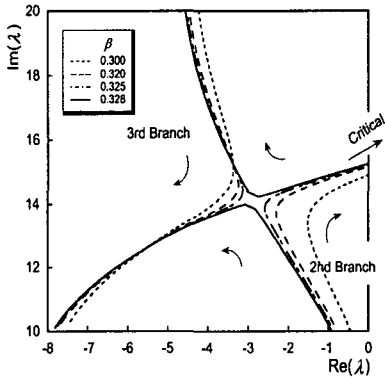


Fig.7 Transfer of instability branch from the third to the second branch.( $d = 0.1$ )

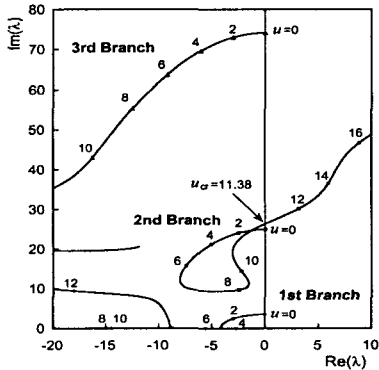


Fig.8 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues for  $\beta = 0.6, d = 2.0$ .

Fig. 8과 9는  $d=2$ 인 경우,  $\beta$  값이 각각  $\beta=0.6, 0.65$ 일 때의 유속변화에 따른 고유치 변화를 나타내는 그림들이다. 먼저 Fig. 8에 있어서는 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수축을 가로질러 플러터가 발생하고, 이 때의 임계유속 값  $u_{cr}=11.38$ 이다. Fig. 9의 경우는 1차 모드에 의해 플러터가 유발되며 임계유속은  $u_{cr}=11.64$ 임을 알 수 있다.

Fig. 10은  $d=2$ 일 때,  $\beta$ 가  $\beta=0.6, 0.620, 0.622, 0.623$ 인 경우의 고유치 분기계적을 나타낸 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이  $\beta=0.6, 0.620, 0.622$ 에서는 2차 모드 분기에 의해 플러터가 발생하고,  $\beta=0.623$ 에서는 1차 모드에 의해 불안정이 발생한다. 이와 같이 플러터를 유발시키는 고유치 분기와 모드들은 질량비  $\beta$  값의 변화에 대단히 민감하며 불연속 단면의 2차모멘트 비  $d$ 에 의해서도 영향을 받음을 알 수 있다.

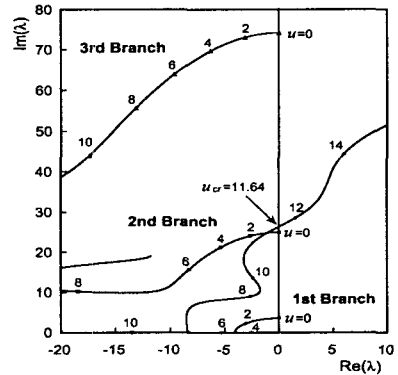


Fig.9 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues for  $\beta = 0.65, d = 2.0$ .

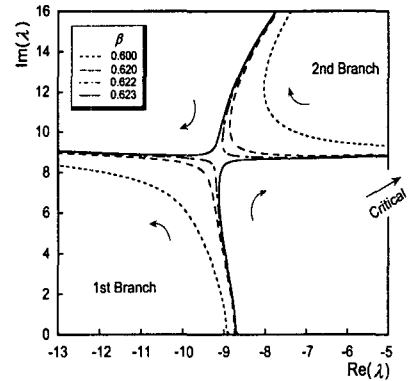


Fig.10 Transfer of instability branch from the second to the first branch.( $d = 2.0$ )

### 3.2 불안정 모드형상

Fig. 11과 Fig. 12는 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림들로 각각  $1/12$ 의 주기로 최대 진폭이 파이프 전체길이의  $1/10$ 에 해당된다.

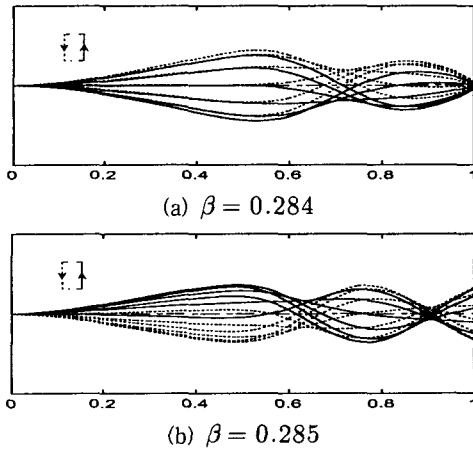


Fig.11 Unstable mode configurations for  $d = 0.1$

Fig. 11(a)와 Fig. 11(b)는  $d=0.1$ 일 때,  $\beta$ 가 각각  $\beta=0.284$ ,  $\beta=0.285$ 인 경우의 불안정 진동 모드 형상으로 먼저 Fig. 11(a)는 하나의 이동절점(moving node)을 가지는 준(quasi) 2차 모드 형이고 플러터에 관계하는 고유치 분기도 2차 분기로 일치한다. 그러나 Fig. 11(b)는 두개의 이동절점을 가진 준 3차 모드 형이지만 플러터에 관계하는 고유치 분기는 2차분기로 일치하지 않고 있다.

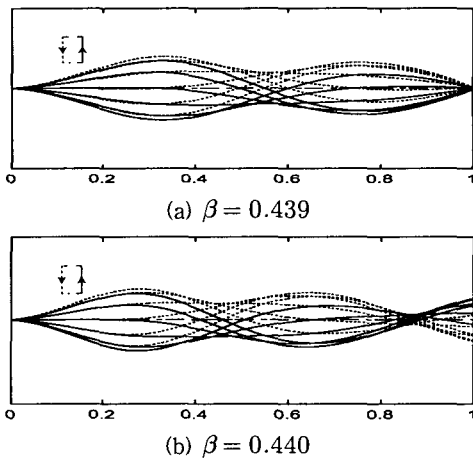


Fig.12 Unstable mode configurations for  $d = 2.0$

Fig. 12(a)와 Fig. 12(b)는  $d=2$ 일 때,  $\beta$ 가 각각  $\beta=0.439$ ,  $\beta=0.440$ 인 경우의 불안정 진동 모드 형상을 보여준다. 먼저 Fig. 12(a)는 하나의 이동절점 갖는 준(quasi) 2차 모드 형이고 플러터에 관계하는 고유치 분기도 2차 분기로 일치한다. Fig. 12(b)는 두개의 이동절점을 가진 준 3차 모드 형이고 플러터에 관계하는 고유치 분기는 2차분기로 일치하지 않음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 내부 유동유체의 흐름을 받는 불연속 외팔파이프의 플러터에 관계하는 고유치 분기와 불안정 모드를 중심으로 고찰하였으며, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 불연속 단면의 2차 모멘트 비에 따라 고유치 분기의 차수가 상이함을 알 수 있었고, 둘째, 균일 파이프에 대한 이전의 연구<sup>(10)</sup>와 같이 플러터가 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수와의 관계가 일치하지 않는 경우도 있다.

#### 참고문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.17, pp.229~232.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.457~486.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.487~499.
- (4) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol.293, pp.512~527.
- (5) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol.293, pp.528~542.
- (6) Sugiyama, Y., 1984, "Studies on Stability of Two-Degree-of-Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Spring Support and a Lumped Mass)", Bulletin of the JSME, Vol.27, pp.2658-2663.
- (7) Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid", Journal of Sound and Vibration, Vol.100, pp.257~270.
- (8) Sugiyama, Y., Kumagai, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1986, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid(The Effect of a Lumped Mass and Damping)", Bulletin of JSME, Vol.29, pp.929-934.
- (9) Sugiyama, Y., Katayama, T., Akesson, B. and Sällström, J.H., 1991, "Stability of Cantilevered Pipes Conveying Fluid and Having Intermediate Spring Support", 11th International Conference on SMIRT, ToKyo, Paper J10/1.
- (10) Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Computers and Structures, Vol. 80, pp.1231~1241.