

정전기력을 받는 마이크로 외팔보의 동적 해석

Dynamic Analysis of Micro Cantilever Beams Undertaking Electrostatic Forces

정강식*·문승재**·유홍희***

Kang-Sik Jung, Seung-Jae Moon and Hong-Hee Yoo

Key Words : Structural Dynamics(구조동역학), Cantilever Beam(외팔 보), Modal Analysis(모드 해석), MEMS(마이크로 전자기계 시스템), Electrostatic Force(정전기력)

ABSTRACT

Static and dynamic responses of micro cantilever beam structures undertaking electrostatic forces are obtained employing Galerkin's method based on Euler beam theory. Variations of static and dynamic responses as well as resonant frequencies are estimated for several sets of beam properties and applied voltages. It is shown that the applied voltage influences the deflection and the modal characteristics significantly. Such information can be usefully employed for the design of MEMS structures.

기호설명

- ρ : 단위길이 당 질량
- E : 탄성계수
- I : 2차 단면 관성 모멘트
- L : 보의 길이
- w : 보의 너비
- ϵ_0 : 진공의 유전율
- V : 적용 전압
- d : 보의 전극의 간격
- v_T : 자유단의 변위

1. 서론

반도체 제조공정 기술의 발달로 인하여 최근 많은 제품들의 핵심 부품들이 마이크로 구조물로 제작되고 있다. HDD 용으로 사용되는 마이크로 구동기나 차세대 영상 기술인 DLP 마이크로 미러, 개인용 단말기 기지국의 신호 검출 장치와 각속도 측정 관성 센서인 마이크로 자이로스코프 등이 그 대표적 예제들이다.

마이크로 구조의 부품들은 그 효율적인 구동을 위해 정전기력이 널리 사용되고 있다. 그러므로 정전기력을 받는 마이크로 구조물의 정적 및 동적

특성과 진동 특성에 대한 연구를 수행하는 것은 이들 구조물의 효율적인 설계를 위해서 매우 중요한 의미를 갖는다.

정전기력을 받는 구조물의 정적/동적 및 진동 특성들에 관한 연구의 필요성에도 불구하고 이에 관한 본격적인 연구는 현재까지 극히 제한적으로 이루어져 왔다. 참고문헌(1, 2)에서는 마이크로 평판들에 대한 연구결과를 보여주는데 여기서는 평판을 강체로 가정하고 이를 지지하는 탄성 외팔보의 구조강성을 고려하여 평판과 고정전극 사이 정전기력에 의한 비틀림 각이나 수평 변위에 대한 응답을 보여주고 있다. 또 참고문헌(3, 4)에서는 구동기들이 갖는 대표적인 구조 형태인 마이크로 외팔 보 집합구조로 구성된 comb drive 응답에 대한 연구들이 이루어졌는데 이 연구에서도 역시 외팔 보 자체가 탄성체로서 고려되지는 않았으며 외팔 보 전체가 수평방향 변위에 대해 같은 크기 변위를 갖는 것으로 가정하여 응답을 단순화였다.

본 연구에서는 많은 구동기에 사용되는 Comb drive 들이 외팔 보의 집합으로 구성된 점을 고려하여 우선 그 단위 구조인 하나의 외팔 보 구조에 대해 정전기력을 고려한 동역학적 모델링을 수행하였다. 또한 운동방정식을 바탕으로 정적/동적 해석 및 진동수 해석을 수행하고 해석 결과들에 관한 분석을 수행함으로써 이들로 구성되는 Comb drive 구조를 갖는 MEMS 구조의 설계와 관련한 핵심적 특성을 규명하였다. 본 연구에서 제시한 내용은 이전의 연구에 비해 구조 동역학적 모델링의 정확성을 높였다는 점에서 뚜렷한 차별성을 가지며 이를 기반으로 더 일반적인 구조에 대한 연구를 수행하기 위한 기반을 구축하였다는 점에서 그 연구의 의미를 갖는다고 할 수 있다.

* 한양대학교 기계설계학과 대학원
 ** 한양대학교 공과대학 기계공학부
 E-mail : smoon@hanyang.ac.kr
 *** 한양대학교 공과대학 기계공학부
 E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
 Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

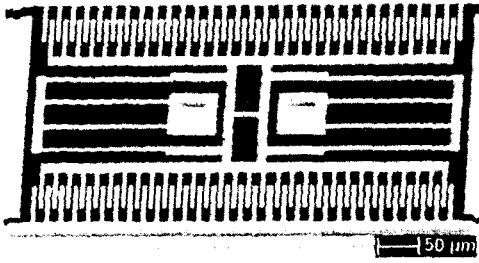


Fig. 1 Configuration of a comb drive

2. 운동방정식

본 장에서는 정전기력을 받는 마이크로 외팔 보에 대한 운동방정식을 유도하려고 한다. 정전기력을 받는 마이크로 외팔 보는 Fig. 2 와 같이 나타낼 수 있다. 보 상의 위치에 따른 변위 변화를 고려하기 위한 연속계에서의 굽힘 방향 운동방정식은 오일러 보 이론에 근거하여 다음과 같이 주어진다.

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f \quad (1)$$

여기서 f 는 정전기력으로 변위에 대해 비선형적 관계를 갖는데 효과적인 해석을 위해 다음과 같이 변위에 대해 선형적인 관계로 근사화 한다.

$$f = \frac{w\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d-v} \right)^2 \approx \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{2v}{d^3} \right) \quad (2)$$

운동방정식을 구하기 위해 식(1)에 가중함수 ϕ_i 를 곱한 후 외팔 보의 영역에 대해 부분적분한 후 경계조건을 대입한다.

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot \phi_i dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \phi_i'' dx = \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (3)$$

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) q_i(t) \quad (4)$$

다음은 변위를 식(4)와 같이 근사화 한 후에 식(2)와 식(4)를 식(3)에 대입하면은 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

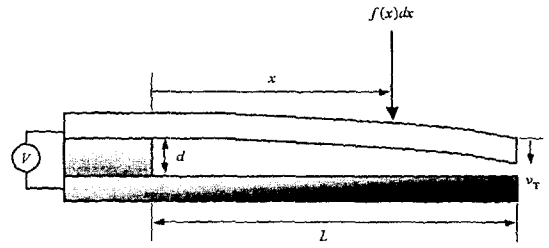


Fig. 2 Configuration of a micro cantilever beam undertaking electrostatic force

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (5)$$

여기서

$$M_{ij} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx = \rho L \delta_{ij} \quad (6)$$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i'' \phi_j'' dx = \lambda_i^4 \frac{EI}{L^3} \delta_{ij} \quad (7)$$

$$R_{ij}^1 = \int_0^L \frac{w\epsilon_0 V^2}{d^3} \phi_i \phi_j dx = \frac{w\epsilon_0 V^2}{d^3} \delta_{ij} \quad (8)$$

$$R_i^0 = \int_0^L \frac{w\epsilon_0 V^2}{2d^2} \cdot \phi_i dx \quad (9)$$

또 운동방정식의 가중함수 및 모드함수로 사용한 ϕ_i 는 아래 나타낸 식(10)으로 표현되는데 여기서 λ_i 의 값은 식(11)의 방정식을 만족하는 값으로 보의 굽힘 방향 고유진동수와 관련된다.

$$\phi_i(x) = \cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \quad (10)$$

$$\cos \lambda_i \cdot \cosh \lambda_i + 1 = 0 \quad (11)$$

식(5)의 운동방정식에서 시간에 따른 변화를 무시함으로써 정적 응답과 관련된 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (12)$$

식(7)과 식(8)을 식(12)에 대입하여서 정리하면 다음과 같이 자유단 처짐을 구할 수 있다.

$$q_i = \frac{C_{Ri}/2}{\frac{\lambda_i^4 EI d^2}{w \epsilon_0 L^4 V^2} - 1} = \frac{C_{Ri}/2}{\frac{\lambda_i^4 EI d^2}{w \epsilon_0 \alpha^2} - 1} \quad (15)$$

$$v_T = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(L) q_i \quad (16)$$

여기서

$$C_{Ri} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \phi_i dx \quad (17)$$

$$\alpha \equiv LV^2 \quad (18)$$

시스템의 고유진동수는 식(5)에 식(6)과 (7)을 대입하여 얻을 수 있으며 실제로 가장 지배적 주파수인 첫번째 고유진동수는 식 (19)와 같다. 여기에서 관찰할 수 있듯이 고유진동수는 전압 V 에 의해 형성되는 강성감소 효과로 인해 자유진동의 경우보다 감소하게 된다.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_1^4 \frac{EI}{\rho L^4} - \frac{w \epsilon_0 V^2}{\rho d^3}} \quad (19)$$

3. 수치 해석

본 장에서는 앞 장에서 유도된 운동방정식을 바탕으로 정전기력을 받는 외팔 보에 대해서 정적 및 동적 응답 해석과 고유진동 해석을 수행하였다. 수치 해석에 사용한 물성 값들은 모두 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 3은 가해진 전압 변화에 대해 정적 해석을 수행한 결과를 무차원화 된 자유단 처짐 변화로 나타낸 것이다. 그림에 나타난 4 가지 선들은 4 가지 보의 길이를 갖는 외팔 보들의 응답을 나타내고 있다. 그런데 식 (15)에서 모든 물성치는 일정한 값으로 결정되며 C_{Ri} 는 보의 길이와 상관 없이 일정한 값을 갖는다. 그러므로 식 (15)와 식(16)으로부터 식(18)에서 정의된 α 의 수치만

Table 1 Numerical data used for the simulation

Notation	Description	Numerical data
ρ	단위길이 당 질량	$9.320 \times 10^{-3} \text{ kg} / \mu\text{m}$
E	탄성계수	5.5 GPa
I	2 차단면 관성모멘트	$1.3333 \mu\text{m}^4$
L	보의 길이	$100 \sim 400 \mu\text{m}$
w	보의 너비	$2.0 \mu\text{m}$
ϵ_0	진공의 유전율	$8.8542 \times 10^{-12} \text{ F} / \text{m}$
V	적용전압	$0.0 \sim 64.0 \text{ V}$
d	보와 전극간의 간격	$2.0 \mu\text{m}$

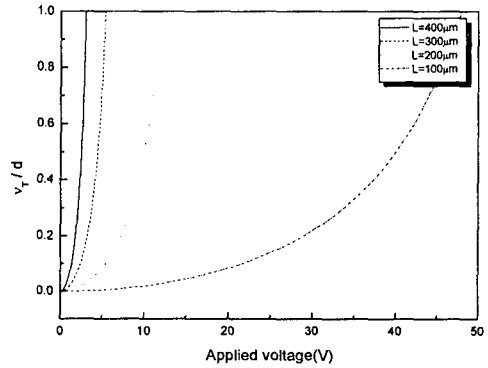


Fig. 3 Variation of static deflection of beam versus applied voltage

동일하다면 동일한 크기의 정적 응답을 갖게 됨을 알 수 있다. 다시 말해 모든 물성 값들이 같다면 보의 길이와 전압에 의해 결정되는 α 값이 같게 된다면 같은 크기의 처짐이 발생한다는 것이다. 또 Fig. 3에는 보의 길이가 증가할수록 전압 변화에 따른 정적 처짐 기울기가 급격히 증가하는 것을 보여주는데 이는 외팔 보의 구조강성이 보 길이의 3 제곱에 반비례하기 때문이다.

Fig. 4는 식 (20)으로부터 구한 가해진 전압의 변화에 대한 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 이 그림이 보여주듯이 전압 변화에 대해 첫번째를 제외한 고유진동수들의 변화는 거의 무시할 만 한 것을 알 수 있다. Fig. 5는 4 가지 보 길이에 대해 첫번째 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 앞의 정적 처짐의 경우와 마찬가지로 보의 길이가 증가하면 전압의 변화에 따라 고유진동수가 급격하게 감소하고 있다.

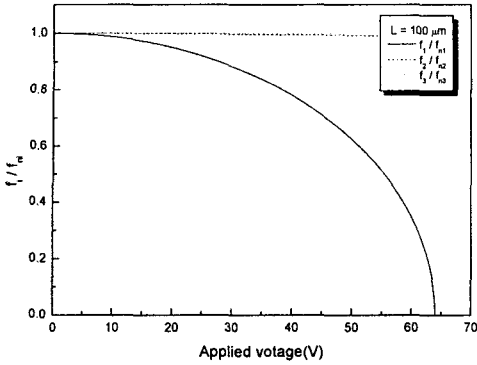


Fig. 4 Variations of natural frequencies versus applied voltage

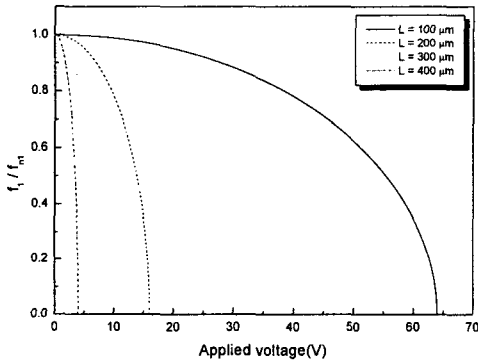


Fig. 5 Variation of the 1st natural frequency with four cases of beam length

Fig. 6 은 일정 크기의 전압에 의해서 발생하는 정전기력을 받는 경우로 정적 해석 시 자유 단의 변위가 같았던 두 경우에 (전압과 보의 길이는 서로 다르나 VL^2 값은 동일함) 대해 동일한 크기의 최대 변위가 발생하고 있는 것을 보여주고 있다. 최대 동적 응답 크기는 전체적으로 정적 해석에서 구한 $(v_T/d)_{static} = 0.045$ 의 2 배인 0.09 이다. 동적 응답은 정적 응답을 평균으로 하여 0 과 최대값 사이에서 진동하고 있다. 또한 각각의 경우에 식 (19)를 이용하여 구할 수 있는 고유진동수인 $1.527 \times 10^5 \text{ Hz}$ 와 $3.818 \times 10^4 \text{ Hz}$ 로 동적 응답 값이 진동하고 있다. 결국 이 결과는 자유진동에 의한 동적 반응에 해당하며 동적 반응에 나타나는 주파수도 고유진동수에 해당하는 값들이다.

앞의 경우와 달리 시간에 대해서 조화함수 형태로 변하는 전압을 받는 경우에는 Fig. 7 과 같이 두 경우가 거의 일치하는 응답을 보인다. 이 결과는 60 Hz 의 전압에 대한 응답을 나타낸 것으로 응답 크기가 일정한 전압이 가해진 경우와 달리 가해지는 최대 전압에 의한 정적 응답과 동일한 크기의 최대값과 0 사이에서 진동하고 있다. 실제로는 이 신호 속에도 고유진동수를 관찰할 수 있는 비교적 짧은 주기의 응답이 미세 크기로 발생하고 있지만 고유진동수와 가진 주파수의 차이가 상당히 크기 때문에 그 진폭이 매우 작아 전체적 응답의 모습은 가진 주파수의 성분이 주도적인 역할을 하고 있음을 보여준다. 다시 말해서 가진 주파수의 크기가 고유진동수에 비해 아주 작은 이와 같은 경우에는 그 동적 반응이 순간 순간의 전압 크기에 상응하는 정적 변형을 갖게 되는 결과를 주게 되는 것이다.

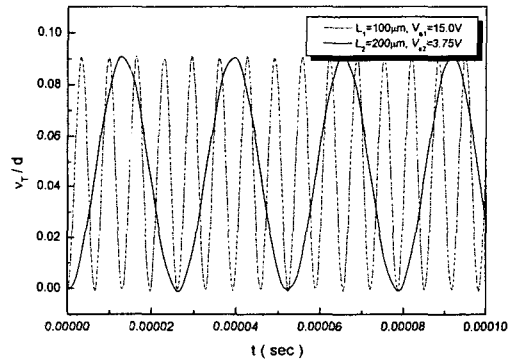


Fig. 6 Dynamic responses by a step input voltage

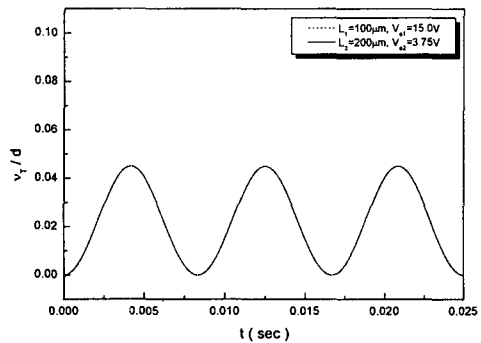


Fig. 7 Dynamic responses by a harmonic input voltage

4. 결 론

본 논문에서는 정전기력을 이용하여 동작하는 많은 마이크로 제품에 나타나는 기본 형태인 마이크로 외팔 보의 운동방정식을 정전기력을 고려하여 유도하였다. 이 운동방정식에 기초하여 전압의 변화에 따른 정적 및 동적 응답과 고유진동수의 변화를 수식적으로 유도하였으며 그에 근거하여 수치 해석 결과를 도출하였다. 이 결과는 이러한 구조들의 정적 및 동적 응답과 고유진동수가 가해지는 전압에 크게 영향을 받는 것을 보여주었으며 특별히 어느 값 이상이 되면 허용되는 처짐이나 고유진동수의 한계를 넘어서게 되는 것을 확인할 수 있었다.

본 연구는 현재 산업의 여러 분야에 걸쳐 많은 개발이 이루어지고 있는 MEMS 제품설계를 위해 필수적인, 정전기력을 받는 마이크로 구조의 동적 응답 예측을 위한 모델링 및 방법 개발에 기반을 제공한다는 점에서 중요한 의미를 가지며 아울러 전자기적 현상과 기계적인 현상이 연성되어 발생하는 물리적 현상에 대한 이해의 지평을 넓힌다는 점에서도 의의를 갖는 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Kovacs, Gregory T. A., 1998, *Micromachined Transducers Sourcebook*, McGraw-Hill, pp. 278~281.
- (2) Breng, U., Gessner, T., Kaufmann, C., and Kiehnscherf, R., 1992, "Electrostatic Micromechanic Actuators," *J. Micromech. Microeng.*, 2, pp. 256~261
- (3) Chu, Patrick B., Nelson, Phyllis R., Tachiki, Mark L., and Pister, Kristofer S. J., 1996, "Dynamics of Polysilicon Parallel-plate Electrostatic Actuators," *Sensors and Actuators*, A52, pp. 216~220
- (4) Tang, William C., Nguyen, Tu-Cuong H., and Howe, Roger T., 1989, "Laterally Driven Polysilicon Resonant Microstructures," *Sensors and Actuators*, 20, pp. 25~32
- (5) Syms, R. R. A., Hardcastle, B. M., Lawes, R. A., 1997, "Bulk Micromachined Silicon Comb-drive Electrostatic Actuators with Diode Isolation," *Sensors and Actuators*, A63, pp. 61~67