

변분포 평면응력을 받는 직사각형 판의 진동과 좌굴 해석

Vibration and Buckling of the Rectangular Plate Loaded by Varying In-plane Stress

신영재*, 윤종학**, 황기섭***, 지영철***, 로엘***

Young-Jae Shin*, Jong-Hak Yun**, Ki-Sup Hwang***, Young-Chel Jy***, M. D. Noel***

Key Words : Free Vibration(자유진동), Buckling(좌굴), Rectangular Plate(직사각형 판), Differential Transform Method(미분변환법)

ABSTRACT

This paper presents the application of Differential Transformation to the buckling load and the vibration problem of the rectangular plate loaded by varying in-plane stress. Numerical calculations are carried out and compared with previously published results to validate the results of the present method. The results obtained by this method agree well with those reported in the previous works. The results obtained by the present method are presented for various non-uniform loads.

1. 서 론

평면 하중하의 직사각판의 횡진동과 좌굴⁽¹⁻⁸⁾에 관한 연구는 대부분 등분포하중을 받는 판에 관한 것이었으며, 변분포 하중을 받는 사각 평판의 연구는 상대적으로 적으며, 이들 또한 대부분 근사적 방법을 사용하여 수행되었다.

순수 휨모멘트를 받는 판의 문제는 변분포 평면하중을 받는 판의 대표적인 예로 들 수 있다. 이러한 판의 해석을 통해서 보의 양단에 휨 모멘트를 받고 있는 I-형강 또는 와이드플랜지 형강의 웨브를 근사적으로 해석할 수 있다. 특히 플랜지가 웨브에 비해 상대적으로 두꺼워 회전지거의 구속된 형강의 경우와 같이 마주보는 두 모서리가 단순지지(Simple Supported)되고, 나머지 두 모서리가 고정(Clamped)된 SS-C-SS-C판의 해석을 통해 양단이 단순지지된 형강의 웨브의 진동과 좌굴의 근사해석에 이용될 수 있다.⁽⁹⁾

진동의 특별한 경우로 취급될 수 있는 분기 좌굴의 문제는 진동수가 0이 되게 하는 평면하중의 크기를 결정하는 것이다. 변분포 평면응력을 받는 SS-C-SS-C판의 임계 좌굴하중을 Nike[8]가 에너지법을 이용하여 근사적으로 계산하였고, Kang[9]등은 간단한 형태의 급수 해를 가정한 Frobenius법(Frobenius Method)을 사용하여 직사각형 평판의 진동과 좌굴에 관한 엄밀해를 구하였다.

그러나 이와 같은 연구들은 에너지법과 Frobenius법 등을 사용하여 수치해석함으로써, 복잡한 수식을 사용하고, 정확한 해를 구하기 위해 많은 계산 시간을 필요로 하는 단점이 있다. 따라서 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치해석 방법의 요구에 부응하여 새로운 수치 해석 방법으로 미분변환법(DTM : Differential Transformation Method)이 개발되었으며, 이를 적용한 연구가 다수 있다.⁽¹⁰⁻¹⁸⁾

미분변환법은 Zhou가 전기 회로(electric circuit)에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 제시한 것(Zhou, 1986)으로 테일러 급수(Taylor series expansion)에 기본을 두었다. 이 방법은 선형과 비선형의 공학 문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계에 의해서 해를 구할 수 있으며 해의 정확도가 대단히 높다.⁽¹⁹⁾

본 연구는 미분변환법을 이용하여 변분포 평면하중을 받

* 국립안동대학교 기계공학부

E-mail : yjshin@andong.ac.kr

Tel : (054)820-5435, Fax : (054) 823-5485

** 국립안동대학교 기계공학부 대학원

*** 국립안동대학교 기계공학부 대학원

는 직사각 평판의 수치해석을 하였고, 이를 위하여 먼저 미분변환법을 간단히 소개하고, 변분포 평면하중을 받는 직사각 평판의 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 해의 정확도를 증명하기 위하여 Frobenius 법으로 해석한 참고문헌의 결과와 비교하였다. 이를 통하여 미분변환법의 타당성을 검증하였으며, 변분포 평면하중을 받는 직사각 평판의 해석에 있어 미분변환법의 특성을 고찰하였다.

2. 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두었으며, 기본연산에 의한 변환 관계식으로부터 순환관계식을 유도하여 해를 구하며, 선형과 비선형 문제의 해를 구하는데 유용한 방법이다.

임의의 원함수(original function)가 $x = \alpha$ 에서 모든 도함수를 가진다면, 원함수 $y(x)$ 에 대한 미분 변환은 식 (1)과 같이 정의 된다.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=\alpha} \quad (1)$$

여기서 $Y(k)$ 를 *T-function*이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분역변환은 (Differential Inverse Transformation)은 식 (2)와 같이 정의된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (2)$$

여기서 미분변환의 정의 식 (1)를 미분역변환 식 (2)에 대입하여 다시 쓰면 원함수 $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=\alpha} \quad (3)$$

상기 식(3)에서 미분변환은 테일러 시리즈에서 유래되었다는 것을 알 수 있다.

상기의 정의로부터 Table 1에 미분 변환에 관한 기본적인 연산의 예를 나타내었다. Table 1과 식(1)~(3)에서 알

수 있듯이 미분변환은 간단한 변환 관계식으로 수치해석에 적용될 수 있다.

실제의 적용에 있어서는 $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려한 식 (4)와 같이 표시된다.

Table 1 Examples of the differential transformation of the original function

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2) \cdot (k+n)Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = \sin(\lambda x)$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

$$y(x) = \sum_{k=0}^p x^k Y(k) \quad (4)$$

여기서 p 는 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정되어진다. 특히, $\alpha = 0$ 때는 매크로린 급수(Maclaurin series expansion)에 기본을 둔 것으로 된다.

3. 지배방정식의 DT적용

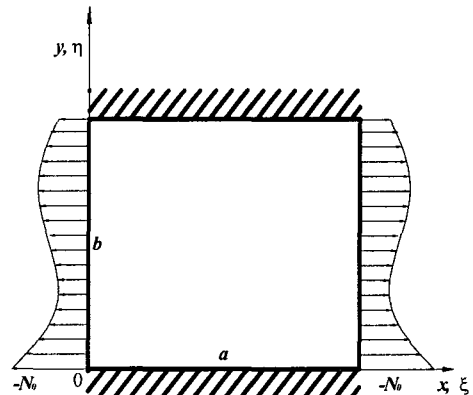


Fig. 1 A rectangular plate loaded by varying in-plane stresses

Fig 1은 가로×세로의 크기가 $a \times b$ 이고, 단순 지지된 두 모서리($x = 0, a$)에는 변분포 평면응력이 작용하고 있으며, 모서리($y = 0, b$)에서는 고정된 SS-C-SS-C 직사각형 판을 보여 주고 있다. 그리고 N_0 는 아래 모서리($y = 0$)에서 압축력의 세기를 나타낸다.

이 판의 진동과 좌굴의 지배운동방정식은 다음과 같다.[9]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2n^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + n^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{a^4 \rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{a^2}{D} N_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5)$$

여기서, w : 횡변위, ρ : 밀도, h : 판의두께, t : 시간 나타내며, D : 판의 휨강성으로 다음과 같으며,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

여기서, E : 탄성계수, h : 푸아송비

계산의 편의성을 위한 무차원 좌표 변수 ξ, η 은 각각 $\xi = x/a, \eta = y/b$ 와 같으며, $n = a/b$: 변장비(aspect ratio),

그리고, N_x : x 방향(인장일 때 +)으로 변분포하중으로 다음과 같다.

$$N_x = N_0(1 - \alpha_1 \eta - \alpha_2 \eta^2 - \alpha_3 \eta^3) \quad (7)$$

여기서, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 변분포 하중의 변화를 주는 수치인자이다.

식(5)의 지배방정식의 해를 다음과 같이 정의한다.

$$w(\xi, \eta, t) = y_m(\eta) \sin(m\pi\xi) \sin(\omega t) \quad (8)$$

여기서, y_m : η 의 처짐함수, ω : 고유진동수, m : 모드형상의 x 방향 반파(half-wave) 수이다. 식(8)은 $\xi = 0, 1$ 에서 단순지지 경계조건을 만족시킨다. 식(7)과 식(8)을 식(5)에 대입하여 정리하면,

$$y_m^{IV} - 2\beta_m^2 y_m'' + \{N^*(1 - \alpha_1 - \alpha_2 \eta^2 - \alpha_3 \eta^3) \beta_m^2 - \lambda^2/n^4\} y_m = 0 \quad (9)$$

여기서 윗첨자 $IV, ''$ 은 각각 η 에 대한 4계, 2계 미분을 나타내며,

$$\beta_m = \frac{m\pi}{n}, \quad (10)$$

그리고 무차원 진동수와 무차원 압축력은 각각

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad N^* = \frac{N_0 b^2}{D} \quad (11)$$

이다.

식(9)는 m 에 대한 상미분방정식으로 변계수를 가지며, 변분포 하중을 받는 직사각판의 무차원 운동방정식이다.

무차원 운동방정식(9)에서 원함수 y_m 의 T -함수를 $Y_m(k)$ 라고 두고, 계산상 편의를 위하여 Maclaurin 급수에 기본을 둔 미분변환을 적용하면, 식(9)는 T -함수들 사이의 순환관계(recursion relationship)가 아래 식과 같이 나타난다.

$$Y_m(k+4) = \frac{2\beta_m^2(k+1)(k+2)Y_m(k+2) - C_m Y_m(k) - \beta_m^2 N^* C_m^*}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \quad (12)$$

여기서 C_m, C_m^* 은 각각

$$C_m = \beta_m^4 - N^* \beta_m^2 - \frac{\lambda^2}{n^4},$$

$$C_m^* = \alpha_1 \delta(k-1) Y_m(k-1) + \alpha_2 \delta(k-2) Y_m(k-2) + \alpha_3 \delta(k-3) Y_m(k-3)$$

(13)

여기서, δ : 다음과 같은 특성을 지닌 크로네커 델타 함수(Kronecker Delta function)

$$\delta(k-m) \text{ at } \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (14)$$

식(12)에서 k 값은 0, 1, 2, ...등의 자연수이다. 따라서 $Y_m(0)$, $Y_m(1)$, $Y_m(2)$, $Y_m(3)$ 은 임의의 계수이며, $k \geq 4$ 일 때 $Y_m(k)$ 은 $Y_m(k)(k=0, 1, 2, 3)$ 로 표현된다. 이렇게 식(12)을 통하여 구한 T -함수를 식(4)에 대입하여 원함수 $y_m(\eta)$ 를 구하고, 다시 식(15)의 4개의 경계조건에 대입하여 4개의 동차방정식을 만든다. 비무용해(non-trivial solution)를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 0으로 취하여 무차원 진동수(λ)를 구한다. 그리고 각각의 무차원 고유진동수에 대하여 고유벡터를 구함으로써 모드형상을 구할 수 있다.

고정단인 $\eta = 0, 1$ 에서 경계조건에 대하여 미분변환하면 아래와 같다.

$$w|_{\eta=0} \rightarrow Y_m(0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}|_{\eta=0} \rightarrow Y_m(1) = 0 \quad (15a)$$

$$w|_{\eta=1} \rightarrow \sum_{k=0}^n Y_m(k) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}|_{\eta=1} \rightarrow \sum_{k=1}^n k Y_m(k) = 0 \quad (15b)$$

고정모서리 $\eta = 0$ 에서 $Y_m(0) = Y_m(1) = 0$ 이므로 미지의 계수는 $Y_m(2)$, $Y_m(3)$ 이 되며, 무차원 고유진동수를 구하는 행렬식은 4차에서 2차로 줄어든다.

4. 수치해석

본 연구는 DTM을 이용하여 변분포 평면하중을 받는 직사각 평판의 해석에 있어, 변분포 평면하중이 참고문헌[9]보다 더 일반적인 3차 형태로 확장 적용하여 수치해석을 수행하였으며, 사용한 언어는 심볼릭(Symbolic) 연산이 가능한 Maple을 사용하여 수치해석하였다. 그리고 모든 결과는 x 방향으로 2개의 반파($m=2$)이고 정사각형 판($n=1$)에서 수치해석 되어졌다.

해의 정확도를 검증하기 위하여 에너지법과 Frobenius법으로 해석한 참고문헌⁽⁹⁾의 결과와 DTM의 결과가 Table 2와 Table 3에 비교되어졌다.

Table 2는 변분포 하중인자가 일차인 경우

($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$)에 대하여 5개의 유효자리로 구한 무차원 임계좌굴하중($N_{cr}^* = N_{cr} b^2 / D$: nondimensional critical buckling load)이 비교되었으며, 그 결과 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of nondimensional critical buckling loads $N_{cr}^* = N_{cr} b^2 / D$

Method	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Energy	75.9	145	392.0
Frobenius	75.910	145.2	391.5
DTM	75.910	145.17	391.53

Table 3은 변분포 하중인자가 일차인 경우($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$)이고 N_0 가 임계하중의 0.5배인 경우($N_0 = 0.5 \times N_{cr}$)에 대하여 5개의 유효자리로 구한 낮은 3번째까지 무차원 고유진동수($\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$: nondimensional natural frequency)를 나타내며, 그 결과는 참고문과 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 3 Comparison of nondimensional natural frequencies $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

Method	Frobenius			DTM		
	1	2	3	1	2	3
$\alpha_1 = 0$	38.71	86.30	149.9	38.711	149.85	86.772
$\alpha_1 = 1$	39.13	86.17	150.1	39.129	86.772	150.07
$\alpha_1 = 2$	45.97	96.61	155.5	45.976	96.611	155.52

그러므로 공식화된 미분변환법은 적용이 쉬우며, 기존의 수치해석 방법에 의한 결과의 검증 방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

Table 4와 5는 3차 함수형태의 변분포 하중의 여러 경우($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)에 대하여 각각 임계좌굴하중과 낮은 3번째까지 고유진동수를 나타내며, 잘 수렴됨을 알 수 있었다.

Table 4 Nondimensional critical buckling loads

$$N_{cr}^* = N_{cr} b^2 / D$$

α_1	α_2	α_3	$N_{cr}^* = N_{cr} b^2 / D$
0	0	1	89.506
0	1	1	122.04
0	1	0	102.34
1	0	1	180.33
1	1	0	220.04
1	1	1	259.59

Table 5 Nondimensional natural frequencies

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D} \text{ for } N_0 = 0.5 \times N_{cr}$$

α_1	α_2	α_3	1	2	3
0	0	1	38.810	86.892	150.28
0	1	1	39.528	88.340	151.22
0	1	0	38.910	86.894	150.26
1	0	1	40.401	89.294	151.71
1	1	0	41.591	90.710	152.41
1	1	1	44.195	96.307	156.09

5. 결론

본 연구는 미분변환법을 이용하여 변분포 평면하중을 받는 직사각 평판의 해석에 있어, 변분포 평면하중이 참고문헌⁹⁾ 보다 일반적인 3차 함수형태로 확장 적용하여 수치해석을 수행하였으며, 해의 정확도를 증명하기 위하여 Frobenius법으로 해석한 참고문헌의 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성을 검증하였다. 그리고 3차 형태의 변분포 하중의 여러 경우에 대하여 임계좌굴하중과 고유진동수를 구하였다.

미분변환법을 적용하여 마주보는 두변이 고정단이고 나머지 두변은 단순지지단인 변분포 평면하중을 받는 직사각 평판의 임계좌굴하중과 고유진동수의 수치 해석결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 미분변환법에 의한 수치해석 결과는 에너지법과 Frobenius에 의한 기존의 결과와 일치한다.
2. 미분변환법을 적용한 여러 형태의 변분포 평면하중에 대해서 좌굴 하중과 고유진동수는 잘 수렴함을 알 수 있다.
3. 미분변환법은 미분방정식 형태의 지배방정식과 경계 조건에 적용이 쉬우며, 기존의 수치해석 방법에 의한 결과와 다른 검증 방법으로 사용될 수 있음을 확인 하였으며, 해가 정확하여 효율적인 수치 해석법임을 알 수 있다.

후 기

본 논문은 2004년도 BK21사업의 지원에 의해 이루어졌음.

참 고 문 헌

- (1). Leissa. A. W., 1969. Vibration of Plates, Washington D.C. U.S. Govt. Printing Office, Reprinted 1993. by The Acoustical Society of America.
- (2). Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," Journal of Sound Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.
- (3). Dickinson, S. M., 1971, "Lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-plane Forces." Journal of Sound and Vibration, Vol. 16, No. 3, pp. 465~472.
- (4). Bassily, S. F. and Dickinson, S. M., 1978, "Buckling and Vibration of In-Plane Loaded Plates Treated by a Unified Ritz Approach." Vol. 59, No. 1. pp.1~14.
- (5). Ilanko, S. and Tillman, S. C., 1985, "The Natural Frequencies on In-plate Stressed Rectangular Plates," Vol. 98. No. 1. pp. 25~34.
- (6). Laura, P. A. A., Larrondo, H. A., Cortinez, V. H. and Avalos, D. R., 1991, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non-Uniform Thickness Subjected to a Uniform State of In-plane Stress." Vol. 151. No. 1, pp. 175~180.
- (7). Timoshenko, S. and Gere. J., 1963, Theory of Elastic Stability, 2nd ED., New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.

- (8). Nike, K., 1937, "Biegungsbeulung der Rechteck-platte," *Ingenieur Archiv*, Vol. 8, p. 403.
- (9). 강재훈, 심현주, 장경호., 2004, "등변분포 평면응력을 받는 SS-C-SS-C 직사각형 판의 진동과 좌굴의 엄밀해", 한국소음진동공학회논문집, 제 14권 제 1호. pp. 56~63.
- (10). 권경문, 신영재, 유영순., 2001, "미분변환에 의한 비균질 보의 진동해석", 한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp.617-621.
- (11). 신영철. 신영재., 2001, "Differential Transformation방법에 의한 가변단면을 갖는 봉의 진동해석", 한국해양공학회 2001년도 춘계학술대회 논문집, pp. 229-233.
- (12). 신영재, 김재호, 황정기., 2001, "Differential Transformation에 의한 가변 2 파라미터 탄성기초에 설치된 보의 진동해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 11권 제 8호. pp. 357~363.
- (13). 신영재, 지바., 2002, "결합하중을 받는 임의단면 기둥의 좌굴후 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 12권 제 5호. pp. 323~329.
- (14). 유영찬, 신영재., 2003, "조합하중을 받는 전단변형 기둥의 좌굴 후 거동 해석", 한국강구조학회 논문집, 제 15권 제3호. pp. 313~3220.
- (15). 신영재, 권경문, 윤중학, 유영찬, 이주형., 2004, "미분변환과 일반화 미분구적법을 이용한 가변단면 원호 아치의 진동 해석", 한국강구조학회 논문집, 제 16권 제1호. pp. 81~89.
- (16). CHEN, C. K and HO, S. H.,1999, "Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.41, pp. 1339-1356.
- (17). CHEN, C. Kuang and Ho. S. H., 1996, "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 79, pp 173-188.
- (18). CHEN, Cheng. Jen and WU, W. J., 1994, "Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System", *Computer and Structures*, vol. 59, no. 4, pp. 631-639.
- (19). J. K. Zhou., 1986, *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan China.