한국소음진동공학회 2004년도 춘계학술대회논문집, pp. 784 ~787.

구조물의 고유모드 해석을 위한 가속화된 초기벡터 구성기법

Accelerated Starting Vectors for Analysis of Natural Modes of Structures

김병완*·정형조**·이인원***

Byoung-Wan Kim, Hyung-Jo Jung and In-Won Lee

Key Words : Natural Mode(고유모드), Subspace Iteration Method(부분공간반복법), Starting Vector(초기벡터)

ABSTRACT

Modified version of subspace iteration method using accelerated starting vectors is proposed to efficiently calculate free vibration modes of structures. Proposed method employs accelerated Lanczos starting vectors that can reduce the number of iterations in the subspace iteration method. Proposed method is more efficient than the conventional method when the number of required modes is relatively small. To verify the efficiency of proposed method, two numerical examples are presented.

1. 서 론

구조물의 자유진동모드는 동응답 해석 내지 동적 설계에 있어서 필수적으로 고려되는 중요한 요소이다. 자유진동모드는 고유진동수와 모드형상으로부터 파악하며 고유진동수와 모드형상은 고유치 해석으로부터 결정된다. 고유치해법으로는 부분공간반복법[1]과 Lanczos 방법[2] 등이 있으며 그 중 부분공간반복법은 구조물의 고유치해법으로 널리 이용되고 있다. 부분공간반복법은 Bathe 와 Wilson 이 최초로 제안한 방법으로서 많은 연구자들에 의해 연구되었으며 개선된 방법들이 다양하게 제시되어 왔다. Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법[3]도 그 중 하나로서 고유치 해석에 있어서 반복회수를 줄이는데 매우 유용하여 ADINA, NASTRAN 등의 범용 유한요소해석 프로그램에서 고유치 해석 알고리즘에 사용되고 있다. 본 연구의 목적은, 양자해석 분야[4] 및 수정된 부분공간반복법[5],[6] 등에서 수렴의 가속화를 위해 도입된 바 있는 행렬의 거듭제곱 기법을 Lanczos 벡터 생성 알고리즘에 적용하여 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법의 수렴성을 더욱 개선하는 데에 있다.

2. 개선된 부분공간반복법

Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법은 식 (1)과 같은 Lanczos 알고리즘으로부터 초기벡터를 생성한다.

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}, \quad \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_i \tag{1}$$

식 (1)에서 $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ 및 $\mathbf{x}_i$는 강성행렬, 질량행렬, i 번째 Lanczos 벡터를 각각 나타내며 행렬 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$은 동적행렬이라 불리운다. α_i와 β_i는 스칼라 계수로서 식 (2)와 같이 산출한다.

$$\alpha_i = \bar{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}\mathbf{x}_i, \quad \beta_i = (\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}_i)^{1/2} \tag{2}$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (3)으로부터 구성한다.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}_i / \beta_i \tag{3}$$

본 연구에서는 부분공간반복법의 반복회수를 줄이기 위해 가속화된 초기 Lanczos 벡터를 생성할 수 있는 수정된 Lanczos 알고리즘을 제시하였다. 수정된 Lanczos 알고리즘은 식 (4)와 같이 거듭제곱된 동적행렬을 Lanzos 점화식에 도입한다.

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{y}}_i - \gamma_i \mathbf{y}_i - \delta_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}, \quad \bar{\mathbf{y}}_i = (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^2 \mathbf{y}_i \tag{4}$$

여기에서 $\mathbf{y}_i$ 는 수정된 Lanczos 벡터를 나타내며 계수 γ_i와 δ_i는 다음 식으로부터 계산한다.

$$\gamma_i = \bar{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M}\mathbf{y}_i, \quad \delta_i = (\tilde{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M}\tilde{\mathbf{y}}_i)^{1/2} \tag{5}$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (6)에 의해 계산한다.

$$\mathbf{y}_{i+1} = \tilde{\mathbf{y}}_i / \delta_i \tag{6}$$

식 (4)의 거듭제곱된 동적행렬은 식 (1)의 동적행렬에 비해 Ritz 값(고유치의 근사값)들을 더욱 빠르게 분리한다. 따라서, 수정된 알고리즘으로부터 생성된 초기벡터가 기존의 초기벡터보다 고유벡터 공간에 더욱 가까우며 결과적으로 반복회수가 줄어든다. 물론, 동적행렬의 거듭제곱 값의 계산을 위해서는 전방향 및 역방향 치환(forward reduction and back substitution)의 연산과정이 1 회 추가된다. 그러나, 반복회수의 감소로 인한

* 한국해양연구원 해양시스템안전연구소
E-mail : kimbw@kriso.re.kr
Tel : (042) 868-7524, Fax : (042) 868-7519
** 세종대학교 토목환경공학과
*** 한국과학기술원 건설및환경공학과

계산시간의 감소 정도가 추가된 전방향, 역방향 치환에 따른 계산시간의 증가 정도를 압도하므로 전반적으로 제안방법이 기존의 방법보다 더 효율적이다. 실제로, 1 회 추가된 전방향 및 역방향 치환과정에 소요되는 연산은 전체 연산회수와 비교할 때 무시할 정도다. 이 후의 과정, 즉 역방향 반복과정과 축소시스템의 고유치해석은 기존방법과 동일한 절차를 갖는다. 기존방법과 제안방법의 수치 알고리즘을 표 1 에 요약하였다.

표 1 기존방법과 제안방법의 수치 알고리즘

연산	기존방법	제안방법
행렬분해	$\mathbf{K}=\mathbf{LDL}^T$	
초기벡터 구성	식 (1) ~ (3) $\mathbf{\Phi}_1=[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_q]$	식 (4) ~ (6) $\mathbf{\Phi}_1=[\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_q]$
반복	$k=1,2,\cdots$	
역방향 반복	$\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_k$	
축소시스템 구성	$\mathbf{K}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}^T\mathbf{K}\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}$ $\mathbf{M}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}^T\mathbf{M}\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}$	
축소고유치문제 해석	$\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}=\mathbf{M}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{\Lambda}_{k+1}$	
향상된 고유벡터 구성	$\mathbf{\Phi}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}$	
수렴여부 판단	$\varepsilon_i \le$ Tolerance ?	

표에서 q는 반복벡터의 개수이며 그것은 부분공간의 크기와 동일하다. 만일, 구하고자 하는 고유쌍의 수가 p이면 일반적으로 q는 $2p$가 되도록 설정한다[(7)]. 본 연구에서 수렴여부는 식 (7)과 같은 오차식[(7)]으로부터 판단하였으며 허용오차는 10^{-6}으로 하였다.

$$\varepsilon_i=\frac{\|\mathbf{K}\phi_i-\lambda_i\mathbf{M}\phi_i\|_2}{\|\mathbf{K}\phi_i\|_2} \qquad (7)$$

3. 수치예제

제안방법의 검증을 위해 그림 1 및 그림 2와 같은 두 개의 빌딩 구조물에 대해 수치해석을 수행하였다. 제안방법과 기존 방법의 비교를 위해 두 방법의 반복회수 및 해석시간을 고찰하였다. 예제구조물의 탄성계수는 2.1×10^{11} Pa이고 밀도는 7850 kg/m^{3}이다. 단면2차모멘트와 단면적은 각각 8.3×10^{-6} m^4, 0.01 m^2 이다. 예제구조물 1의 자유도는 1008이고 예제구조물 2의 자유도는 5040이다.

수치예제에 대한 해석 결과를 표 2, 3 및 그림 3, 4에 제시하였다. 표 2와 표 3은 기존 및 제안방법의 반복회수를 비교하고 있고 그림 3과 그림 4는 두 방법의 고유치 해석시간을 비교하고 있다. 표 2, 3 및 그림 3, 4로부터 가속화된 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 제안방법이 기존의 Lanczos 벡터를 사용하는 방법보다 반복회수가 작으며 계산 시간 또한 전반적으로 적음을 고찰할 수 있다. 또한, 제안방법은 구하고자 하는 고유쌍의 개수가 비교적 작을 때 더욱 효율적임을 알 수 있다. 그러나, 구하고자 하는 고유쌍의 개수가 커짐에 따라 두 방법의 반복회수는 1로써 동일하며 해석시간도 거의 동등하여 제안방법의 효율성이 증대되지 않음을 알 수 있는데 그것은 구하고자 하는 고유쌍의 수가 많을 경우 초기벡터의 수 즉 부분공간의 크기가 충분히 크게 설정되므로 가속화되지 않은 초기벡터를 사용하더라도 1회의 반복으로 수렴하기 때문이다. 그러나, 구조물의 거동은 소수의 저차 모드가 지배하는 경우가 대부분이므로 실질적인 해석 내지 설계에 있어서 구하고자 하는 고유쌍의 수는 일반적으로 작다. 따라서, 제안방법은 고유쌍의 수가 상대적으로 작을 때 반복회수 및 해석시간이 작으므로 실제적인 측면에서 효율적으로 사용될 수 있다.

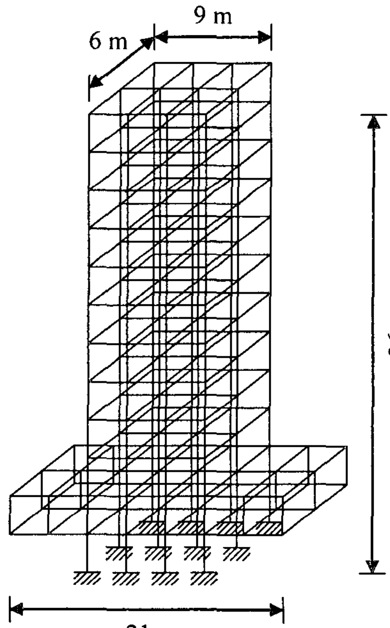

그림 1 예제구조물 1

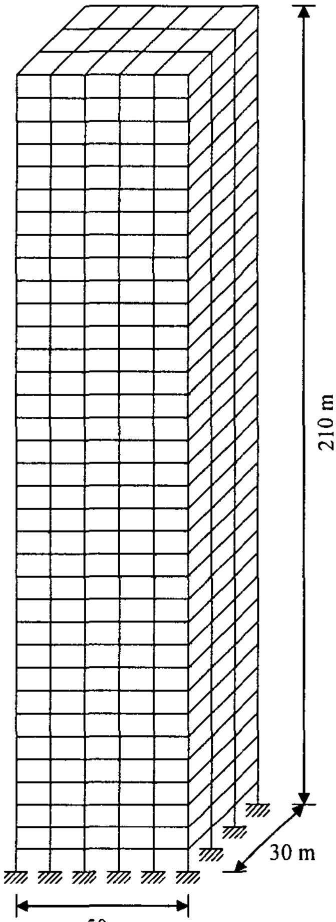

그림 2 예제 구조물 2

표 2 예제구조물 1의 반복회수

고유쌍 개수	기존방법	제안방법
5	13	13
10	12	8
15	10	2
20	5	1
25	9	1
30	14	1
35	7	1
40	3	1
45	21	1
50	14	1
55	16	1
60	15	1
65	10	1
70	4	1
75	1	1
80	1	1
85	1	1
90	1	1
95	1	1
100	1	1

표 3 예제구조물 2의 반복회수

고유쌍 개수	기존방법	제안방법
10	8	4
20	16	5
30	12	1
40	5	1
50	23	1
60	13	1
70	7	1
80	12	1
90	13	1
100	13	1
110	7	1
120	15	1
130	3	1
140	1	1
150	1	1
160	1	1
170	1	1
180	1	1
190	1	1
200	1	1

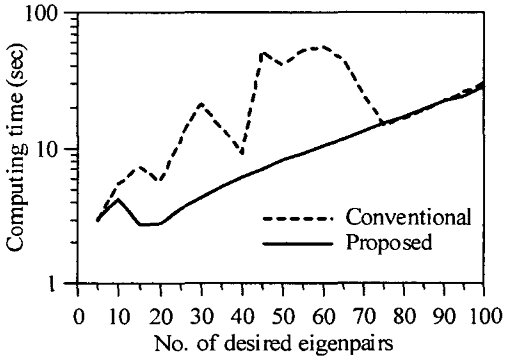

그림 3 예제구조물 1의 해석시간

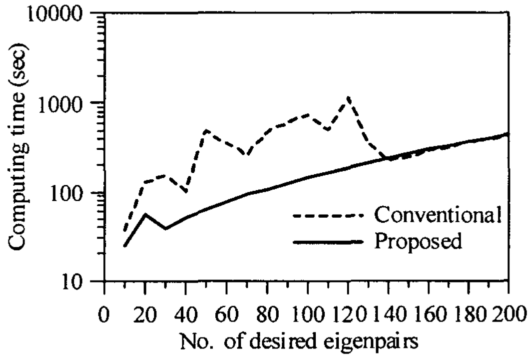

그림 4 예제구조물 2의 해석시간

4. 결 론

가속화된 Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 개선된 부분공간반복법을 본 논문을 통해 제안하였으며 제안방법의 검증을 위해 두 개의 예제구조

붐에 대한 수치해석을 수행하였다. 이론적인 고찰과 수치해석 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 수정된 Lanczos 알고리즘에 도입된 거듭제곱 형태의 동적행렬이 수렴을 가속화하므로 제안한 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법이 기존의 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법에 비해 반복회수가 작다.

(2) 제안방법은 구하고자 하는 고유쌍의 수가 비교적 작을 경우 기존방법보다 해석시간이 더 작다. 구조물의 거동은 대부분 소수의 저차모드가 지배하는 경우가 대부분이므로 제안방법은 실제적인 해석과 설계에서 효율적으로 적용될 수 있다.

후 기

본 논문은 해양수산부가 지원하는 해양수산 연구개발과제인 '초대형 부유식 해상구조물 기술개발' 및 한국해양연구원이 지원하는 과제인 '해양개발을 위한 설계 엔지니어링 기술 고도화'의 일부로 수행되었음을 밝혀 둔다.

참 고 문 헌

(1) Bathe, K.J. and Wilson, E.L., 1972, "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis," *ASCE J. Engrg. Mech.*, Vol.98, pp.1471~1485.

(2) Lanczos, C., 1950, "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators," *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol.45, No.4, pp.255~282.

(3) Bathe, K.J. and Ramaswamy, S., 1980, "An Accelerated Subspace Iteration Method," *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.23, pp.313~331.

(4) Grosso, G., Martinelli, L. and Parravicini, G.P., 1993, "A New Method for Determining Excited States of Quantum Systems," *Nuovo Cimento D*, Vol.15, No.2-3, pp.269~277.

(5) Lam, Y.C. and Bertolini, A.F., 1994, "Acceleration of the Subspace Iteration Method by Selective Repeated Inverse Iteration," *FE Anal. Design*, Vol.18, pp.309~317.

(6) Qian, Y.Y. and Dhatt, G., 1995, "An Accelerated Subspace Method for Generalized Eigenproblems," *Comp. and Struct.*, Vol.54, No.6, pp.1127~1134

(7) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall.