

탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 진동 특성

Vibration Characteristics of Curved Members Resting on Elastic Foundations

○ 오 상 진[†] · 박 광 규^{*}

Sang Jin Oh and Kwang Kyou Park

Key Words : Curved Member(곡선부재), Elastic Foundation(탄성지반), Nonhomogeneous Foundation(비균질지반), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to investigate the free vibrations of circular curved members resting on nonhomogeneous elastic foundations. The governing differential equations derived in a previous paper are used. The governing equations are solved numerically to obtain frequencies. Hinged-hinged end constraint is considered in numerical examples. The lowest three natural frequencies are calculated over a wide range of non-dimensional system parameters: the foundation rested ratio, the foundation parameter, the horizontal rise to span length ratio, the slenderness ratio, and the width ratio of the contact area between the member and the foundation.

1. 서론

지반 위에 놓인 구조물의 거동 특성은 구조공학, 기조공학 및 진동제어 분야에서 중요한 연구대상으로 취급되고 있어 이와 관련한 폭넓은 연구⁽¹⁻⁷⁾가 이루어지고 있다. 최근까지도 탄성지반 위에 놓인 보에 관한 연구가 이루어지고 있지만, 이들 연구에서 다루어지고 있는 대상구조는 대부분 직선보이다. 그러나 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부가 존재하며, 원형 띠기초는 유체저장조 등 주요 구조물의 기초로서 이용⁽⁸⁾되고 있어 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 거동 특성에 대한 많은 연구가 수행되어 충분한 설계자료가 제시되어야 할 것으로 판단된다.

자연계의 지반이나 기타 구조물과 접하는 면은 성질이 다양하고 복잡하다. 이러한 복잡한 지반특성을 반영하기 위한 여러 가지 수학적 모형이 연구되었으나, 이들 지반모형 중 공학에서 가장 일반적으로 사용되는 것은 Winkler가 제안한 모형이다. Winkler모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 지반모형이지만, 비교적 이론

전개가 용이하기 때문에 지반-구조물의 상호작용에 관한 많은 연구에 이용되고 있다⁽⁹⁾.

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 진동 특성을 고찰하기 위하여 문헌⁽⁷⁾에서 유도된 상미분방정식에 불연속구간을 갖는 비균질지반을 적용하여 수치해석함으로써 다양한 제변수 변화에 따른 대상 부재의 고유진동수 변화를 고찰하고자 한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 탄성지반 위에 놓인 지반길이 l 인 원호형 곡선부재의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 a , α 및 h 는 각각 곡선부재의 반경, 중심각 및 수평높이이며, θ 는 곡선부재축상 임의점의 위치를 나타내는 각으로서 곡률중심 O 와 좌단을 연결하는 선으로부터 측정된 것이다. 그리고 v , ψ , β 및 ϕ 는 각각 곡선부재축상 임의점에서의 수직방향 변위, 순수 휨에 의한 단면회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이며, R_v 와 R_T 는 지반 반력 성분으로서 각각 단위길이당 수직반력과 회전반력이다.

Fig. 2는 곡선부재가 놓인 비균질 탄성지반을 Winkler가 제안한 지반모형을 사용하여 나타낸 것이다. 이 그림에서 $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_i$ 는 각 구간에서의 Winkler지반계수이며,

[†] 남도대학 토목환경과

E-mail : sjoh@namdo.ac.kr

Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679

^{*} 대전대학교 공과대학 토목공학과

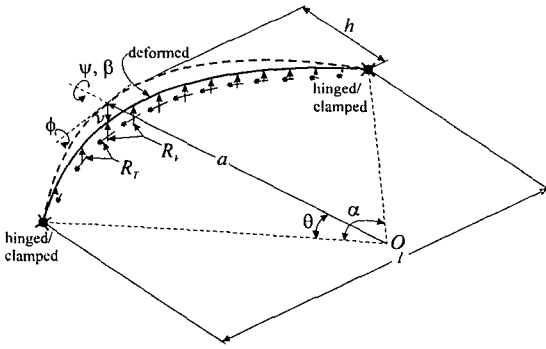


Fig. 1 Geometry and variables of circular curved members on elastic foundations

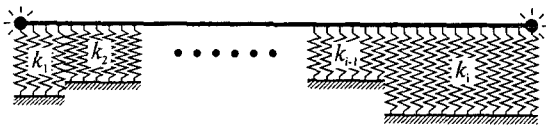


Fig. 2 Curved member on the Winkler model

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ 는 각기 다른 Winkler지반계수를 갖는 탄성지지구간을 정의하기 위한 계수이다.

Fig. 1에 보인 곡선부재가 면의 진동하는 경우 부재 미소요소에는 휨모멘트, 비틀림모멘트 및 전단력의 합용력, 수직방향 관성력 및 회전관성우력, 그리고 수직 및 회전반력이 발생한다. 부재 미소요소에 작용하는 이들 합용력, 관성력 및 반력의 동적평형방정식을 이용하여 대상 구조의 면의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 구하면 다음과 같이 표현된다⁽⁷⁾.

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = \frac{(4f^2 + 1)^2}{64\mu s^2 f^2} (\pi^4 \lambda_i b - C_i^2) \eta + \frac{4f^2 + 1}{8f} \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = \left[\frac{(4f^2 + 1)^2}{64f^2} (\mu s^2 - s^{-2} C_i^2) + \epsilon \right] \phi + (1 + \epsilon) \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{4f^2 + 1}{8f} \mu s^2 \frac{d\eta}{d\theta} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = \frac{1}{\epsilon} \left[1 + \frac{\pi^4 \lambda_i b^3 (4f^2 + 1)^2}{768f^2} \right] \phi - \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{d\phi}{d\theta} \quad (3)$$

식 (1)~(3)에서 사용된 변수들의 내용은 다음과 같다.

$$\eta = \frac{v}{l}, \quad f = \frac{h}{l}, \quad s = \frac{l}{\sqrt{I/A}} \quad (4-6)$$

$$\epsilon = \frac{GI}{EI}, \quad \mu = \frac{c_s G}{E} \quad (7,8)$$

$$\lambda_i = \frac{k_i l^5}{\pi^4 EI}, \quad b = \frac{B}{l} \quad (9,10)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\gamma A}{EI}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

본 연구에서는 비균질지반 위에 놓인 곡선부재의 다양한 계변수 변화에 따른 고유진동수 변화를 고찰하기 위하여 단부조건으로 회전-회전을 고려하였다. 회전단 ($\theta=0$ 또는 $\theta=\alpha$)에서는 수직방향 변위 v , 비틀림각 ϕ 및 휨모멘트 $M = EIa^{-1}(\phi - d\psi/d\theta)$ 가 발생하지 않으므로 회전단에서의 경계조건식은 다음과 같이 표현된다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0 \quad (33a-c)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (1)~(3)의 지배미분방정식을 해석하기 위하여 문헌^(2,3,7) 등에서 그 적용성이 확인된 바 있는 수치적 분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법을 이용하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 해석대상구조의 무차원 고유진동수 C_i 는 시행착오적 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하여 구하였다.

곡선부재의 수평높이 지간길이비 f 가 "0"으로 수렴하는 경우 해석 결과는 대응되는 단부조건과 제원을 갖는 직선보의 고유진동수로 수렴해야만 한다. Table 1은 이러한 직선보의 수렴과정을 나타낸 것으로 $f \rightarrow 0$ 인 경우 본 연구결과는 문헌⁽¹⁻³⁾의 직선보에 대한 고유진동수로 정확히 수렴함을 알 수 있다. Table 1의 첫 번째부터 세 번째까지의 해석 결과는 $\alpha_1=1$ 즉 곡선부재의 전체구간에 걸쳐 동일한 무차원 지반계수를 갖는 균질 지반 위에 놓인 Timoshenko보의 수렴과정을, 나머지 4개의 해석결과는 불연속구간을 갖는 비균질 지반 위에 놓인 Bernoulli-Euler보($s=10000$)로의 수렴과정을 보여 주고 있다.

Figs. 4~19는 Fig. 3에 보여진 예제에 대하여 지반계수, 수평높이 지간길이비, 세장비 및 접촉면의 폭비가 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 여러 가지 계변수를 변화시키면서 해석한 결과를 나타낸 것으로 이는 전단계수 $\mu=0.347$, 강성계수 $\epsilon=1.146$ 에 대한 결과이다.

[Example I]

Figs. 4~7은 각각 지반계수 λ_1 , 수평높이 지간길이비 f , 세장비 s , 접촉면의 폭비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 α_1 을 0~1까지 변화시키면서 해석한 결과를 나타낸 것이다. Example I에서 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 이다.

Table 1 Convergence to frequencies for lateral vibration of straight beams

Geometry	f	Frequency parameter, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
H-H*	0.100	15.47	29.74	50.98
$\mu=0.327, \epsilon=0.2865$	0.050	16.03	31.00	52.62
$s=12.5$	0.010	16.25	31.42	53.17
$\lambda_1=40, \alpha_1=1$	0.005	16.26	31.44	53.19
$b=0.05$	0.001	16.26	31.44	53.19
	0.000 ⁽¹⁾	16.26	31.44	53.19
H-C	0.100	17.40	39.90	71.94
$\mu=0.25, \epsilon=0.2865$	0.050	18.22	41.74	74.60
$s=25$	0.010	18.52	42.37	75.49
$\lambda_1=50, \alpha_1=1$	0.005	18.53	42.39	75.52
$b=0.03$	0.001	18.54	42.39	75.53
	0.000 ⁽³⁾	18.54	42.39	75.53
C-C	0.100	19.27	44.57	76.69
$\mu=0.25, \epsilon=0.2865$	0.050	20.23	46.42	79.32
$s=25$	0.010	20.57	47.04	80.20
$\lambda_1=25, \alpha_1=1$	0.005	20.58	47.05	80.22
$b=0.02$	0.001	20.58	47.06	80.23
	0.000 ⁽³⁾	20.58	47.06	80.23
H-H($s=10000$)	0.100	11.42	38.02	84.01
$\mu=0.347, \epsilon=1.146$	0.050	12.14	39.96	87.47
$\lambda_1=40, \alpha_1=0.4$	0.010	12.39	40.70	88.48
$b=0.05$	0.005	12.42	40.61	89.26
	0.001	12.40	40.66	89.38
	0.000 ⁽²⁾	12.40	40.66	89.38
C-C($s=10000$)	0.100	24.97	59.43	114.8
$\mu=0.347, \epsilon=1.146$	0.050	25.95	62.15	119.8
$\lambda_1=20, \alpha_1=0.8$	0.010	26.29	63.07	121.5
$b=0.1$	0.005	26.30	63.10	121.6
	0.001	26.31	63.11	121.6
	0.000 ⁽²⁾	26.31	63.11	121.6
H-H($s=10000$)	0.100	14.39	38.16	84.18
$\mu=0.347, \epsilon=1.146$	0.050	14.98	40.23	87.66
$\lambda_1=20, \lambda_2=30, \lambda_3=24$	0.010	15.25	40.91	89.51
$\alpha_1 = \alpha_3 = 0.3, \alpha_2 = 0.4$	0.005	15.18	40.91	88.49
$b=0.05$	0.001	15.25	40.97	89.59
	0.000 ⁽²⁾	15.25	40.97	89.59
C-C($s=10000$)	0.100	23.89	58.96	114.6
$\mu=0.347, \epsilon=1.146$	0.050	24.92	61.71	119.6
$\lambda_1=10, \lambda_2=15, \lambda_3=12$	0.010	25.27	62.63	121.3
$\alpha_1 = \alpha_3 = 0.3, \alpha_2 = 0.4$	0.005	25.28	62.66	121.4
$b=0.1$	0.001	25.28	62.67	121.4
	0.000 ⁽²⁾	25.28	62.67	121.4

* H : hinged, C : clamped

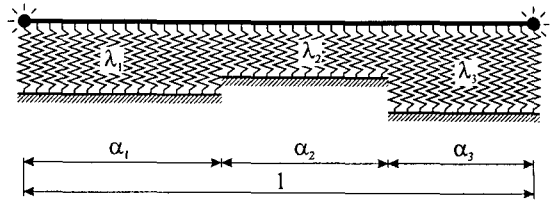


Fig. 3 Examples I ~ IV

[Example II]

Figs. 8~11은 각각 지반계수 λ_2 , 수평높이 지간길이비 f , 세장비 s , 접촉면의 폭비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 α_2 를 0~1까지 변화시키면서 구한 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다.

[Example III]

Figs. 12~15는 각각 지반계수 $\lambda_1 = \lambda_3$, 수평높이 지간길이비 f , 세장비 s , 접촉면의 폭비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 $\alpha_1 = \alpha_3$ 를 0~0.5까지 변화시키면서 해석한 결과를 나타낸 것이다.

[Example IV]

Figs. 16~19는 $\lambda_2=25$ 인 경우 각각 지반계수 $\lambda_1 = \lambda_3$, 수평높이 지간길이비 f , 세장비 s , 접촉면의 폭비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 $\alpha_1 = \alpha_3$ 를 0~0.5까지 변화시키면서 해석한 결과를 나타낸 것이다.

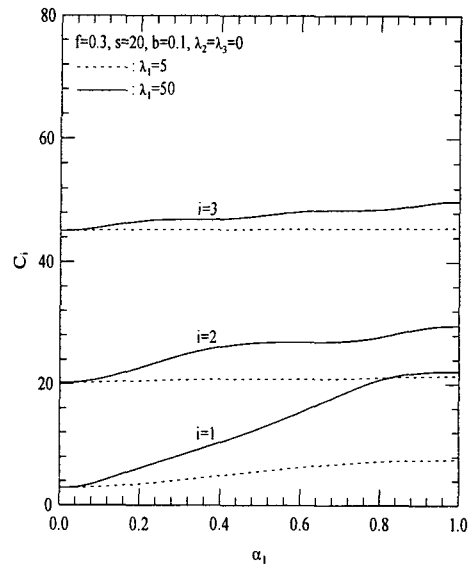


Fig. 4 Effects of λ_1 on C_i for Example I

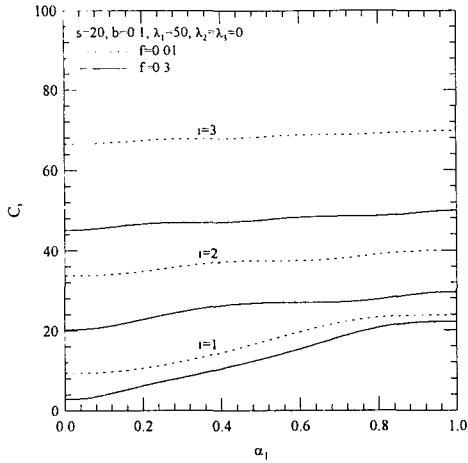


Fig. 5 Effects of f on C_i for Example I

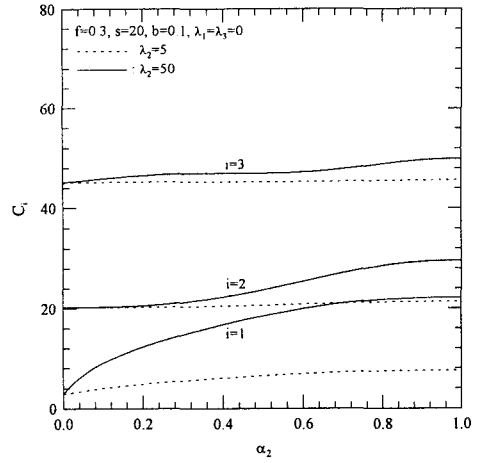


Fig. 8 Effects of λ_2 on C_i for Example II

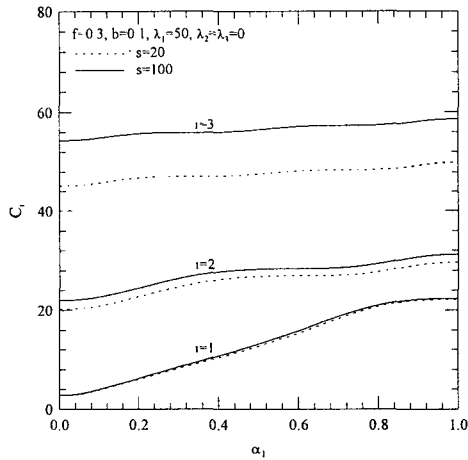


Fig. 6 Effects of s on C_i for Example I

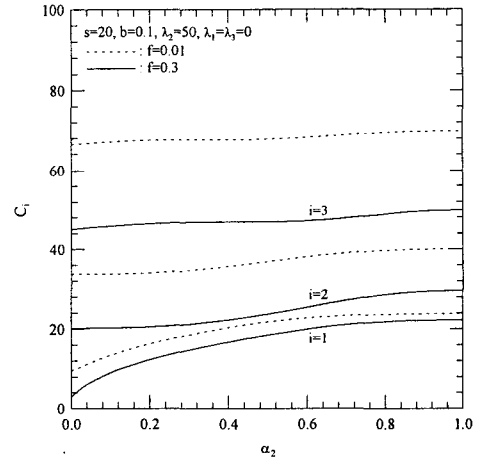


Fig. 9 Effects of f on C_i for Example II

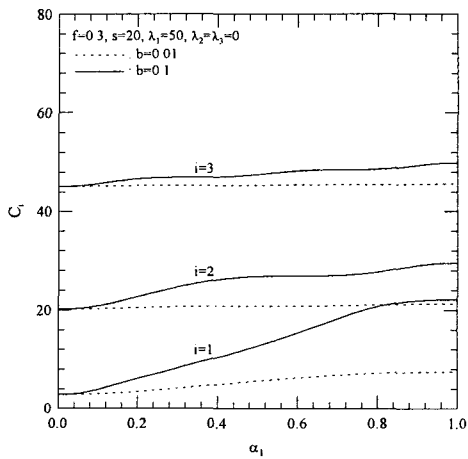


Fig. 7 Effects of b on C_i for Example I

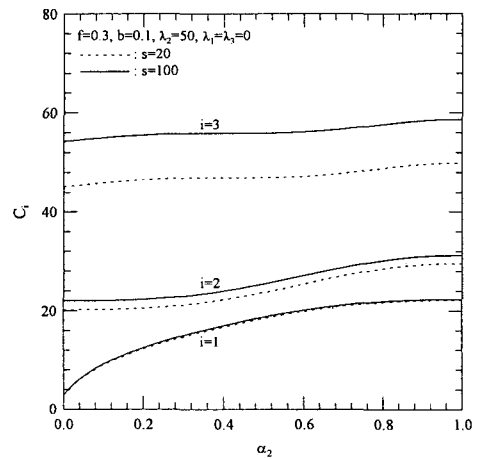


Fig. 10 Effects of s on C_i for Example II

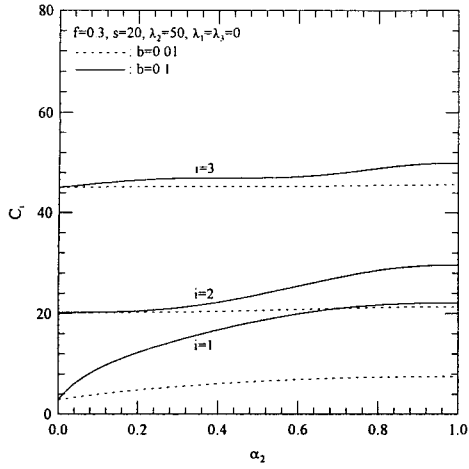


Fig. 11 Effects of b on C_i for Example II

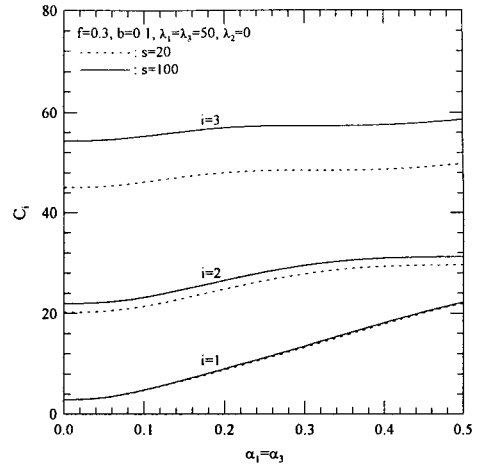


Fig. 14 Effects of s on C_i for Example III

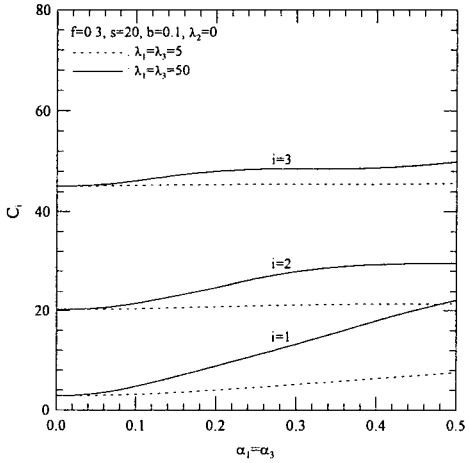


Fig. 12 Effects of $\lambda_1 = \lambda_3$ on C_i for Example III

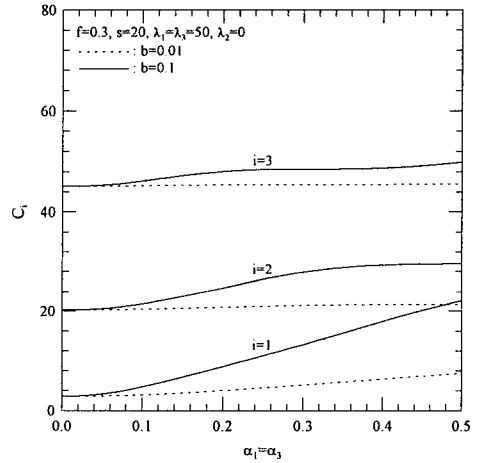


Fig. 15 Effects of b on C_i for Example III

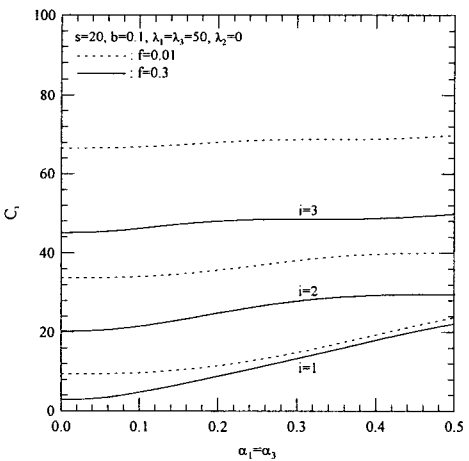


Fig. 13 Effects of f on C_i for Example III

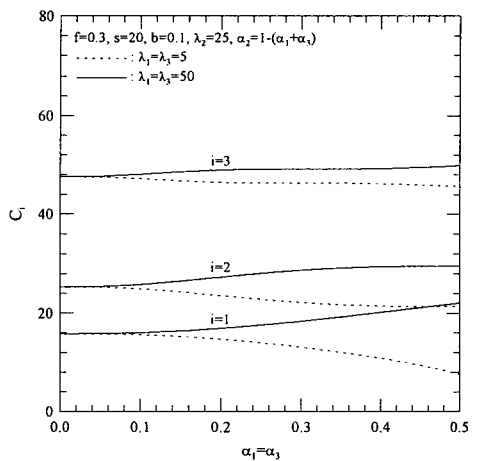


Fig. 16 Effects of $\lambda_1 = \lambda_3$ on C_i for Example IV

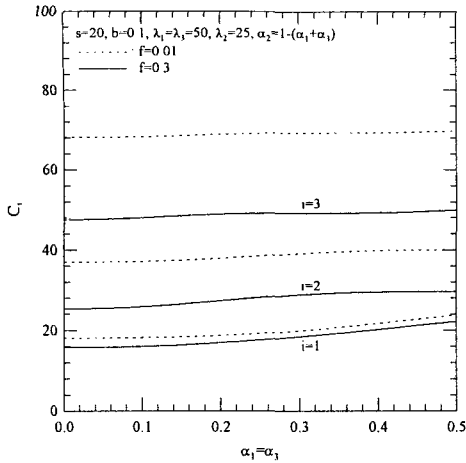


Fig. 17 Effects of f on C_i for Example IV

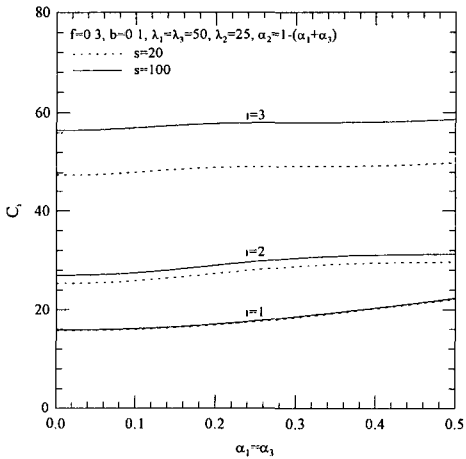


Fig. 18 Effects of s on C_i for Example IV

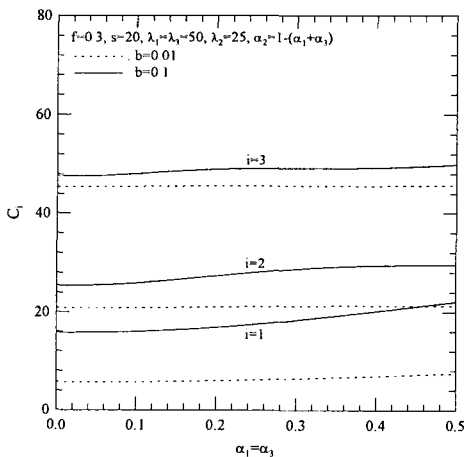


Fig. 19 Effects of b on C_i for Example IV

4. 요약

본 연구는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 진동 특성에 관한 연구이다. 이 연구에서는 문헌 [7]에서 유도된 탄성지반 위에 놓인 원호형 곡선부재의 면의 자유진동을 지배하는 상미분방정식에 불연속구간을 갖는 비균질지반을 적용하고, 이를 수치해석하여 다양한 재변수 변화에 따른 대상 부재의 고유진동수 변화를 고찰하였다.

수치해석 결과로서 불연속구간비의 변화에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하였으며, 지반계수, 곡선부재의 수평높이, 지간길이비, 세장비 및 접촉면의 폭비가 대상 구조의 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다.

참고 문헌

- (1) Wang, T.M. and Stephens, J.E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp.149-155.
- (2) 정진섭, 이병구, 오상진, 1993, "Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중 해석", *대한토목학회 논문집*, 제13권 제4호, pp.251-258.
- (3) 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석", *한국강구조학회 논문집*, 제6권 제3호, pp.107-115.
- (4) Panayotounakos, P.E. and Theocaris, P.S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, pp.139-144.
- (5) Wang, T.M. and Brannen, W.F., 1982, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, pp.241-246.
- (6) Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp.291-301.
- (7) Lee, B.K., Oh, S.J. and Park, K.K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, pp.77-97.
- (8) Volterra, E. and Gains, J.H., 1971, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall.
- (9) Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.