

크랙과 이동질량을 가진 티모센코 보의 진동특성

Dynamic Behavior of a Timoshenko Beam with a Crack and Moving Masses

Sung-Jin Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

안성진* · 손인수* · 윤한익**

Key Words : Moving Mass(이동질량), Open Crack(개구형 크랙), Timoshenko Beam Theory(티모센코 보이론), Flexibility Matrix(유연행렬)

ABSTRACT

In this paper a dynamic behavior of simply supported cracked simply supported beam with the moving masses is presented. Based on the Timoshenko beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments i.e. the crack is modelled as a rotational spring. This flexibility matrix defines the relationship between the displacements and forces across the crack section and is derived by applying fundamental fracture mechanics theory. And the crack is assumed to be in the first mode of fracture. As the depth of the crack and velocity of fluid are increased the mid-span deflection of the pipe conveying fluid with the moving mass is increased. As depth of the crack is increased, the effect that the velocity of the fluid on the mid-span deflection appears more greatly.

1. 서론

크랙과 같은 결함을 갖는 구조물에서는 같은 하중에서도 구조물의 탄성에 의한 변형에너지 외에 크랙에 의해서 추가로 변형에너지가 존재하게 되고 이 부가 에너지만큼 변형이 더 발생한다. 이처럼 구조물 손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴의 주요 원인이 된다. 특히, 이동질량을 가지는 단순지지 보에 크랙이 존재하게 되면 이동질량과의 연성관계에 의해 단순지지 보의 동특성에 큰 영향을 미칠 것으로 생각된다. 크랙이 구조물의 동특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 초기에는 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법이 시도되었고, 최근에는 유연행렬을 이용하여 크랙에 의해 부가되는 에너지를 고려하는 해석방법을 사용하고 있다.^(1,2)

최근 많은 연구자들은 구조물의 동특성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구^(3,4)하였으나, 이들 연구는 오일러 보에 국한되어진 연구였다. 사실, 오일러 보에 비해 티모센코 보 이론에 적용할 때 보다 정확한 해석결과를 얻을 수 있다.⁽⁵⁾

이러한 근거를 바탕으로 크랙을 가지는 보의 해석은 티모센코 보 이론을 적용하여 여러 형태의 보 구조물에 대한 연구 결과가 발표되었다.^(6,7) 또, Mahmoud⁽⁸⁾ 등은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 이동질량을 가진 크랙 단순보의 동적응답을 전달행렬법으로 해석하였다.

이 연구에서는 컨테이너 크레인이나 산업현장 등에서 이용되는 컨베이어형 구조물을 고려한 것이다. 즉, 이동질량들을 가지는 단순지지 보에 진전이 없는 개구형 크랙이 존재할 때 크랙의 크기와 이동질량들의 크기와 속도가 단순지지 보의 횡방향 진동에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 단순지지 보의 해석은 티모센코 보 이론을 적용하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 크랙을 가진 단순지지 보 위를 이동질량들이 일정한 속도로 이동하는 계를 나타내고 있다. 여기서 m_k 은 보 위를 이동하는 이동질량들, v 는 이동질량들의 속도, 그리고 L 은 단순지지 보의 전체 길이를 나타낸다. 또, a 는 크랙의 깊이를 의미하며 a_c , h , 그리고 b 는 각각 크랙의 깊이와 크랙이 존재하는 보 단면의 지름, 그리고 크랙의 길이를 표현하고 있다. 단순지지 보에서 크랙위치를 기준으로 두 부분으로 구분하여 모델링 하였으며, x_c 는 크랙이 존재하는 위치를 나타낸다. 크랙이 존재하는 경우 그 위치에서

** 동의대학교 기계정보산업공학부
E-mail : hijoon@dongeui.ac.kr
Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232
* 동의대학교 대학원 기계공학과

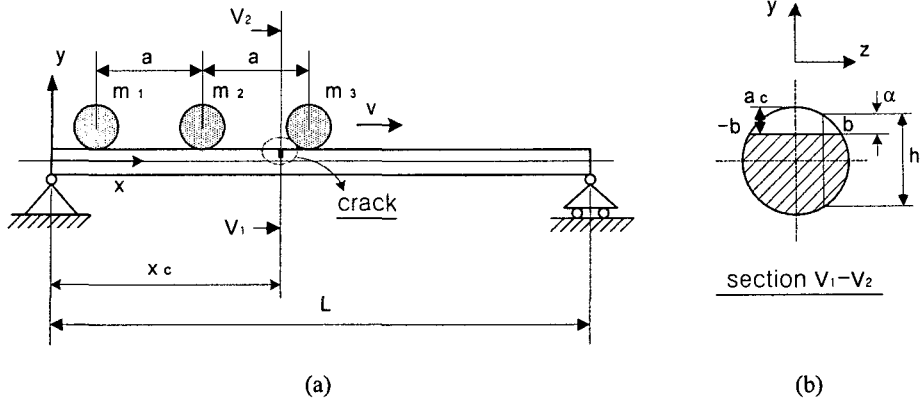


Fig. 1 Geometry of the cracked simply supported beam with the moving masses

크랙의 영향에 의한 파괴역학적 변수를 구하여 보의 횡방향 진동에 영향을 미치는 등가의 회전 스프링 상수로 변환하여 수치해석에 이용하였다.

2.1 단순지지 보 및 이동질량의 에너지

단순지지 보의 굽힘변위 $y(x, t)$ 와 xy 평면에서의 기울기 $\theta(x, t)$ 는 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) d_i(t) \quad (2)$$

여기서, $q_i(t)$, $d_i(t)$ 는 일반화 좌표, μ 는 일반화 좌표의 수를 나타낸다. 또, $\phi_i(x)$ 와 $\varphi_i(x)$ 는 티모센코 보인 경우에 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁹⁾

$$\phi_i(x) = B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad (3)$$

$$\varphi_i(x) = \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

where

$$B_i = \frac{i\pi L}{(i\pi)^2 - b_i^2 s^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{xAGL^2}.$$

$$r^2 = \frac{I}{AL^2}.$$

$$b_i^2 = \frac{1 + (i\pi)^2(r^2 + s^2)}{2r^2 s^2}$$

$$- \frac{\sqrt{(1 + (i\pi)^2(r^2 + s^2))^2 - 4(i\pi)^4 r^2 s^2}}{2r^2 s^2}$$

여기서 E 와 G 는 영계수 및 전단탄성계수를 나타내며, x 는 실축 원형단면인 경우의 전단상수로서 $x = \frac{6(1+\nu)}{(7+6\nu)}$ 로 표현된다.⁽¹⁰⁾ 여기서 ν 는 프와송 비이다. 또, A 와 I 는 각각 단순지지 보의 단면적 및 면적 2차 모멘트를 의미한다.

크랙을 가진 단순지지 보의 포텐셜 에너지를 티모센코 보 이론을 적용하여 구하면 다음과 같다.

$$V_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_j} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_j} - \theta_j \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & xGA \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_j} - \theta_j \end{bmatrix} dx_j + \frac{1}{2} K_R (\Delta y'_c)^2$$

여기서 K_R 은 각각 크랙으로 인하여 추가되는 회전스프링 상수를 의미한다. 또, j 는 크랙을 가진 단순지지 보의 분할 구간(segment)의 수이며, $\Delta y'_c$ 는 다음과 같다.

$$\Delta y'_c = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_2=0} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1=x}, \quad (5)$$

또, 단순지지 보의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_j} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial y_j}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_j}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \end{bmatrix} dx_j \quad (6)$$

여기서 ρ 는 보의 밀도이다. 이동질량들의 운동에너지를 다음과 같이 유도할 수 있다.⁽⁴⁾

$$T_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k \sum_{i=1}^n \{ v^2 q_i^2(t) \phi_{ij}^2[f_k(t)] + 2v q_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_{ij}[f_k(t)] \phi_{ij}[f_k(t)] + \dot{q}_i^2(t) \phi_{ij}^2[f_k(t)] + v^2 \} \quad (7)$$

여기서 $f_k(t)$ 는 이동질량들의 수평변위로 다음과 같다.

$$f_k(t) = x_k = \int_0^t v dt - a(k-1) \quad (8)$$

2.2 크랙에 의한 탄성 변형에너지

같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게 된다. 선형 탄성구간에서 Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 변위와 크랙 부분의 유연행렬을 구할 수 있다. 또, 변형률 에너지 밀도함수(strain energy density function)는 다음과 같다.

$$J(\alpha) = \frac{1}{E^*} (K_{IM} + K_{IP})^2 \quad (9)$$

여기서 E^* 은 평면변형에 대하여 $E^* = E / (1 - \nu^2)$ 로 표현되며, K_{IP} 는 전단력에 의한 응력집중계수, K_{IM} 은 모멘트에 의한 응력집중계수를 나타낸다. 실측 원형단면인 경우 식 (9)의 응력집중계수는 각각 다음과 같다.

$$K_{IP} = \frac{2V}{\pi R^4} L \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{\pi a} F_I(a/h) \quad (10)$$

$$K_{IM} = \frac{4M}{\pi R^4} \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{\pi a} F_I(a/h)$$

또, $F_I(a/h)$ 는 다음과 같다.

$$F_I(a/h) = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \tan(\zeta)} \frac{[0.923 + 0.199(1 - \sin \zeta)^4]}{\cos \zeta} \quad (11)$$

여기서 $\zeta = \frac{\pi a}{2h}$ 이다. 따라서, 식 (9) ~ 식 (11)을 이용하면 유연행렬 (6×6)을 얻을 수 있으며, 해석에 필요한 회전 스프링 상수는 이 행렬의 역수를 취함으로써 구할 수 있다. 또, 크랙위치에서 다음의 4가지 경계조건을 만족해야한다.

$$\phi_{i1}(x) = \phi_{i2}(x), \quad \frac{d^2 \phi_{i1}(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_{i2}(x)}{dx^2},$$

$$\frac{d^3 \phi_{i1}(x)}{dx^3} = \frac{d^3 \phi_{i2}(x)}{dx^3},$$

$$\varphi_{i2}(x) - \varphi_{i1}(x) = \frac{EI}{K_R} \frac{d^2 \phi_{i2}(x)}{dx^2} \quad (12)$$

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} \phi_{i1}(x) : 0 \leq x \leq x_c \\ \phi_{i2}(x) : x_c \leq x \leq L \end{cases}$$

2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 앞에서 구한 각각의 에너지 식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_j = \frac{x_j}{L} \quad (j=1,2), \quad \xi_c = \frac{x_c}{L},$$

$$\beta_k = \frac{m_k L}{\sqrt{mEI}} \bar{v}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$w = \frac{q}{L}, \quad \gamma_k = \frac{m_k L^3}{EI} \bar{v}^2,$$

$$M_k = \frac{m_k}{mL}, \quad K_R^* = \frac{K_R L}{EI},$$

$$\bar{x}_k = \bar{v} L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \tau - A(k-1),$$

$$D = \frac{d}{L} \quad Q = \frac{xGAL^2}{EI},$$

$$T = \frac{mL^2}{\rho I}, \quad A = \frac{a}{L}$$

여기서 \bar{v} 는 v/L 이다. 식 (13)의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원화된 운동방정식을 행렬형태로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_b \ddot{w} + C_b \dot{w} + K_b w = F_b D \quad (14)$$

$$M_r \ddot{D} + K_r D = F_r w \quad (15)$$

여기서 (\cdot) 는 무차원화된 시간 τ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (14), (15)에서 각 행렬은 다음과 같다.

$$M_b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{\xi_i} \phi_{ij}^2(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n M_k \phi_{ij}^2(\bar{x}_k) \right\} \quad (16)$$

$$C_b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^n M_k \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}^2(\bar{x}_k)] \right\} \quad (17)$$

$$K_b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \left[Q \int_0^{\xi_i} \left\{ \frac{d\phi_{ij}(\xi)}{d\xi} \right\}^2 d\xi + \beta_k \frac{d^2(\phi_{ij}(\bar{x}_k))}{d\tau d\xi} \phi_{ij}(\bar{x}_k) - \gamma_k \left\{ \frac{d\phi_{ij}(\bar{x}_k)}{d\xi} \right\}^2 + \beta \frac{d}{d\tau} \{ \phi_{ij}(\bar{x}_k) \} \frac{d}{d\xi} \{ \phi_{ij}(\bar{x}_k) \} + K_R^* \left\{ \frac{d\phi_{2i}}{d\xi} \Big|_{\xi_i=0} - \frac{d\phi_{1i}}{d\xi} \Big|_{\xi_1=\xi_i} \right\}^2 \right] \quad (18)$$

$$F_b = QL \sum_{i=1}^n \int_0^{\xi_i} \frac{d(\phi_{ij}(\xi))}{d\xi} \varphi_{ij}(\xi) d\xi \quad (19)$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_0^{\xi_i} \varphi_{ij}^2(\xi) d\xi \quad (20)$$

$$K_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ T \int_0^{\xi_i} (\varphi_{ij}'(\xi))^2 d\xi + QT \int_0^{\xi_i} (\varphi_{ij}(\xi))^2 d\xi \right\} \quad (21)$$

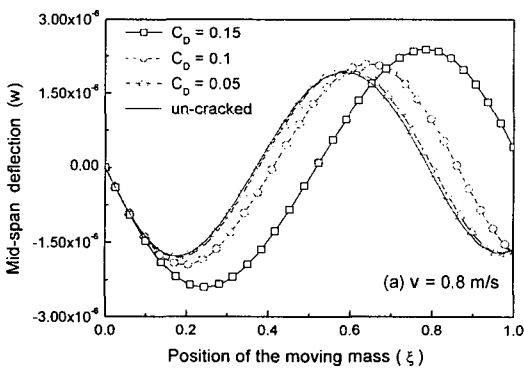
$$F_r = \frac{Q}{L} \sum_{i=1}^n \int_0^{\xi_i} \frac{d(\phi_{ij}(\xi))}{d\xi} \varphi_{ij}(\xi) d\xi \quad (22)$$

3. 수치해석 결과 및 고찰

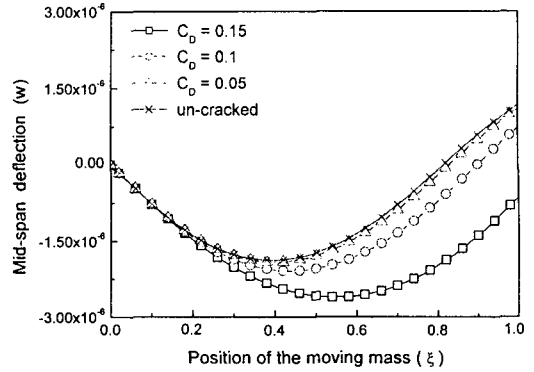
이 연구에서는 이론해석에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 크랙의 크기와 위치 그리고, 이동질량이 단순지지 보의 횡변위에 미치는 영향을 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 사용한 수치해석은 Matlab(6.1)에서 4차의 Runge-Kutta 방법으로 수행하였으며, 수치해석에 있어서 일반적으로 고차 모드의 횡변위에 비해 제 1 차 모드의 횡변위가 가장 큰 영향을 미치므로 이 연구에서는 제 1 차 모드에서의 횡변위에 대해서만 고찰하였다. 수치해석 예제에 사용한 단순지지 보의 파라미터는 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Specifications of the cracked simply supported Timoshenko beam

Property	Data
Total length of beam (L)	0.8 (m)
Radius of beam (R)	0.1 (m)
Young's modulus (E)	2.08×10^{11} (N/m ²)
Density	7860 (kg/m ³)
Poisson ratio (ν)	0.3



(a) $v = 0.8$ m/s



(b) $v = 1.6$ m/s

Fig. 2 Mid-span deflection of the cracked beam with moving mass ($M_m = 0.3$, $\xi_c = 3/8$)

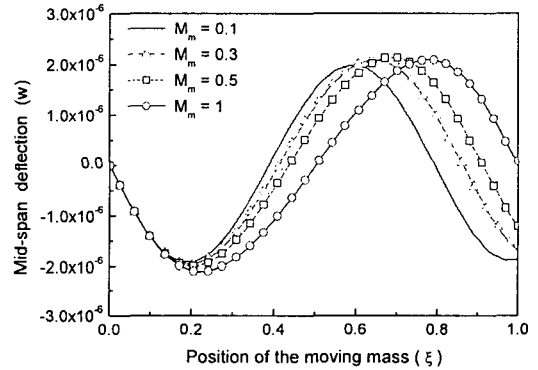


Fig. 3 Mid-span deflection of the cracked beam with moving mass ($C_D = 0.1$)

Fig. 2는 크랙이 존재하는 위치 $\xi_c (= x_c/L)$ 가 단순지지 보의 3/8인 지점에 존재하고, 이동질량의 크기가 0.3인 경우 크랙의 깊이에 따른 단순지지 보의 진동수를 이동질량의 위치에 따라 표현하였다. Fig. 2(a)는 이동질량의 속도가 0.8 m/s일 때의 단순지지 보의 굽힘변위를 나타낸 것으로서 크랙의 크기가 클수록 최대 굽힘변위가 나타나는 이동질량의 위치가 보의 후반부로 이동되어짐을 알 수 있다. 또, 크랙의 크기와 굽힘변위는 서로 비례적이며, 크랙의 크기가 0.05인 경우에 비해 크랙의 크기가 0.1인 경우 단순지지 보의 굽힘변위는 약 6.12% 증가하였다. Fig. 2(b)는 이동질량의 속도가 1.6 m/s인 경우의 굽힘변위이며 크랙의 크기가 0.05인 경우에 비해 크랙의 크기가 0.1일 때 단순지지 보의 굽힘변위는 약 8.37% 증가하였다. Fig. 3은 크랙의 위치 ξ_c 가 단순지지 보의 3/8에 존재하고, 크랙의 크기 $C_D (= a_d/R)$ 가 0.1인 경우에 단순지지 보의 굽힘변위에 미치는 이동질량의 영향을 도시한 것이다. 단순지지 보의 최대 굽힘변위

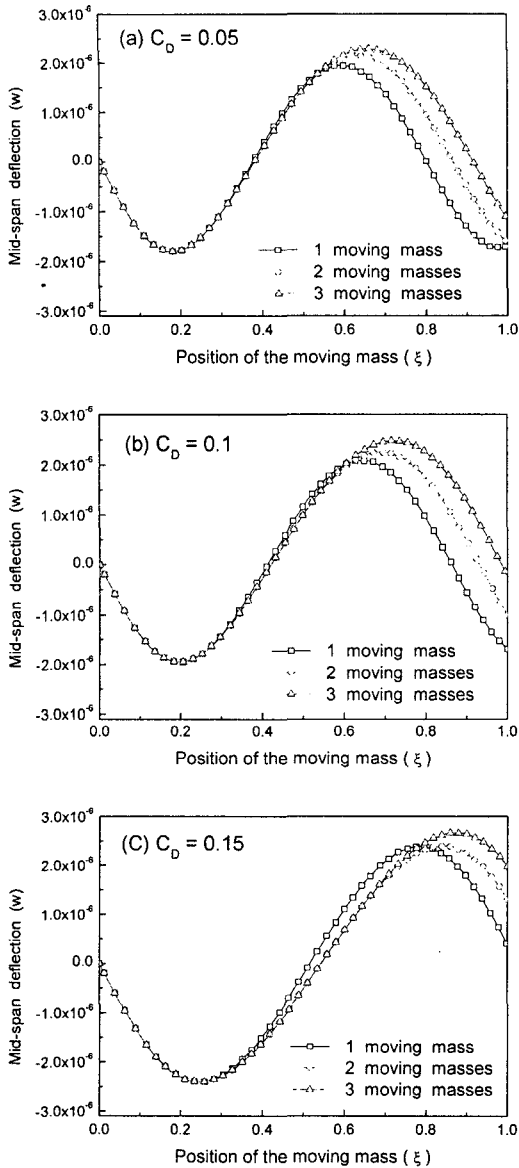


Fig. 4 Mid-span deflection of the cracked beam with moving mass ($A=0.25$)

는 이동질량의 크기에 큰 영향을 받지 않으나, 단순지지 보의 최대 굽힘변위가 나타나는 이동질량의 위치가 조급씩 보의 후반부로 이동되어짐을 알 수 있다.

Fig. 4는 크랙의 위치 ξ_c 가 단순지지 보의 3/8에 존재하고, 이동질량들의 크기가 0.3인 경우에 단순지지 보의 굽힘변위에 미치는 이동질량의 영향을 크랙의 크기에 따라 도시한 것이다. 전반적으로 이동질량의 수가 증가할수록 단순지지 보의 횡변위는 커지는 것을 알 수 있다. 그러나, 이동질

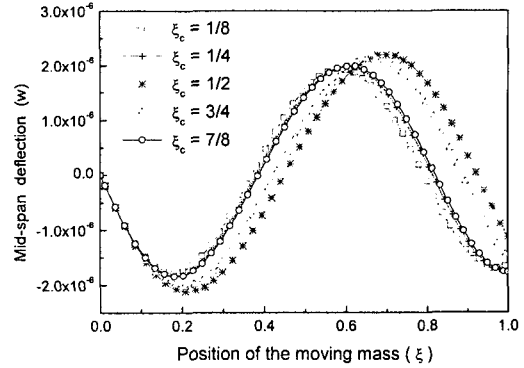


Fig. 5 Mid-span deflection of the cracked beam according to the crack position ($C_D=0.1$)

량의 위치가 단순지지 보의 약 0.6인 위치를 이동하는 동안은 거의 동일한 횡변위를 가진다. Fig. 4(c)를 살펴보면 첫 번째 이동질량의 위치가 보의 0.8인 위치를 지날 때 단순지지 보의 횡변위는 모두 동일한 횡변위를 가지는 현상을 나타낸다.

Fig. 5는 크랙의 크기가 0.1로 동일한 경우 크랙의 위치 ξ_c 에 따른 단순지지 보의 횡변위를 도시한 것이다. 쉽게 예상할 수 있는 것처럼 크랙의 위치가 단순보의 가운데 부분에 존재하는 경우 횡변위가 가장 크게 나타남을 알 수 있다. 그러나, 크랙의 위치가 단순보의 1/4인 비교적 앞부분에 위치하는 경우, 크랙이 7/8인 위치에 존재할 때와 비교해서 횡변위가 오히려 더 적어짐을 확인할 수 있다. 즉, 크랙의 위치가 단순보의 뒷부분에 존재하는 경우가 앞부분에 위치하는 경우에 비해 단순보의 횡변위에 더 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

이동질량들을 가지는 티모센코 보 구조물에 크랙 형태의 결함이 존재할 때 단순지지 보의 횡변위 특성에 미치는 크랙과 이동질량들의 영향을 수치해석 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 이동질량과 관계없이 크랙의 크기와 단순보의 굽힘변위는 서로 비례적이며, 크랙의 크기가 클수록 최대 굽힘 변위가 발생하는 단순보 상의 이동질량의 위치를 조급씩 오른쪽으로 이동시킨다.
- 2) 이동질량의 크기는 단순지지 보의 최대 굽힘변위에는 큰 영향을 주지 않으나, 최대 굽힘 변위가 발생하는 단순지지 보 상의 이동질량의 위치를 변화시킨다.
- 3) 이동질량의 위치가 단순지지 보의 약 0.6인 위치를 이동하는 동안은 이동질량의 수가 증가하더라도 거의 같은 횡

변위를 보이며, 후반부로 이동할수록 이동질량의 수와 단순 지지 보의 횡변위는 더 커짐을 알 수 있다.

4) 크랙의 위치가 단순지지 보의 후반부에 존재하는 경우, 크랙이 앞부분에 위치하는 경우에 비해 단순보의 횡변위에 더 큰 영향을 미친다.

참 고 문 헌

- (1) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074, 1996.
- (2) Ghondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34, 1998.
- (3) Bammios, Y., Douka, E. and Trochidis, A., "Crack Identification in Beam Structures Using Mechanical Impedance," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 2, pp. 287~297, 2002.
- (4) 윤한익, 최창수, 손인수, "크랙을 가진 유체유동 단순 지지 파이프의 동특성 해석," *한국소음진동공학회논문집*, 제 13 권, 제 7 호, pp. 562~569, 2003.
- (5) Zheng, D. Y. and Fan, S. C., "Natural Frequency Changes of a Cracked Timoshenko Beam by Modified Fourier Series," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246, No. 2, pp. 297~317, 2001.
- (6) Tsai, T. C. and Wang, Y. Z., "The Vibration of a Multicrack Rotor," *Int. Journal of Mech. Sci.* Vol. 39, No. 9, pp. 1037~1053, 1997.
- (7) Takahashi, I., "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force With an Axial Force," *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 23, pp. 3071~3080, 1997.
- (8) Mahmoud, M. A. and Abou Zaid, M. A., "Dynamic Response of a Beam With a Crack Subject to a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 4, pp. 591~603, 2002.
- (9) X. Q. Zhu and S. S. Law, "Moving Forces Identification on a Multi-Span Continuous Bridge," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 2, pp. 377~396, 1999.
- (10) Kgor A. Karnovsky and Olga I. Lebed, *Formulas for Structural Dynamics*, McGraw-Hill, Inc., 2001.