

집중질량을 갖는 장방형판의 안정해석

Stability Analysis of Rectangular Plate with Concentrated Mass

○ 김일중* · 이용수† · 오숙경**

Kim, Il Jung, Lee, Yong Soo and Oh, Soog Kyoung

Key Words : Concentrated Mass, Pasternak Foundaion, Winkler Foundation Parameter, Shear Foundation Parameter, Thick Plate

ABSTRACT

This paper is for the vibration analysis of thick plate with concentrated mass on a inhomogeneous pasternak foundation. The vibration of rectangular plate on the inhomogeneous pasternak foundation, natural frequency of this plate with Concentrated Mass are calculated A thick rectangular plate resting on a inhomogeneous pasternak foundation is isotropic, homogeneous and composite with linearly elastic material .

In order to analyze plate which is supported on inhomogeneous pasternak foundation, the value of winkler foundation parameter(WFP) of central and border zone of plate are chosen as WFP1 and WFP2 respectively. The value of WFP1 and WFP2 can be changed as 10, 10² and the value of SFP(shear foundation parameter) also be changed 5, 15 respectively.

기 호 설 명 1)

- $2\bar{a} \times 2\bar{b}$: 전체판의 크기
- D : 판의 휨강성
- E : 탄성계수
- G : 전단탄성계수
- k_w : Winkler 지반강성
- k_g : 전단지반강성
- M_c : 판의 요소질량
- P_x : 면내력
- SFP : 전단지반계수
- WFP : Winkler지반계수
- ρ : 단위 체적당 질량
- ν : 푸아송비
- w : 수직처짐
- θ_x : x 방향 회전각
- θ_y : y 방향 회전각

- ω : 판의 고유진동수
- σ : 면내응력
- σ_{cr} : 판의 좌굴응력

1. 서 론

구조물에 영향을 미칠 수 있는 진동원으로는 슬라브 위에 설치된 발전기의 진동, 향타, 발파, 지진이나 기타 진동을 유발하는 기기 등을 들 수 있다. 진동원에서 발생하는 진동은 구조물의 공진주기와 같은 진동수를 가질 경우 공진현상에 의한 구조물에 영향을 끼칠수 있다. 이런 공진 현상을 방지하고 구조물의 손상을 최소화하기 위하여 적절한 방법을 통해 구조체의 진동수조절이 필요하다. 본 연구는 집중 질량을 갖는 기초구조의 진동해석을 통하여 동적 거동 특성을 파악하여 Mat 기초와 슬라브 등과 같은 구조물의 설계시 효율적인 설계를 위한 기초자료를 얻는데 그 목적이 있다.

집중질량을 갖는 판의 안정해석에 대해서는 1966년 Cohen과 Hendelman⁽²⁾에 의해 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 여러 가지 경계 조건하에서 장방형판의 고유진동수 해석이 이루어 졌고, 1961년 Wah는 Dirac Delta 함수를 이용하여 집중질량(point mass)을 갖는 판에 대한 연구가 이루어졌다. 또한 Szilard, Soedel 과 Gorman⁽⁹⁾에 의해 많은 연구가 있었으며, 최근에는 집중질량에 의한 판의 진동특성에 대해 Amba-Rao, Magrab, Laura⁽⁸⁾, Low^{(3),(4),(10)}등이 발표한 바 있다.

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782
E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

* 정회원, 전북과학대학 건축·토목 계열 조교수

** 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과 공학박사

국내에서는 1999년 이용수 등이 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석을 하였고 이병구 등은 Pasternak지반에 지지된 곡선보의 자유진동해석에 대한 연구결과를 발표한 바 있다.

판의 해석은 동적안정에 대해 Matieu - Hill 방정식 이용하여 해석하였다. 해석을 위해서는 유한요소법을 이용하였으며 해석시 Mindlin판 이론을 적용하고, 8절점 Serendipity요소계를 이용한 유한요소해를 이용하여 집중질량의 크기변화에 따른 동적안정영역을 파악하였다. 판을 지지하는 지반은 Pasternak 지반 모형을 사용하였다.

2. 판의 진동 이론

2.1 집중 질량을 갖는 판의 진동 이론

Fig.1에서 보는 바와 같이 집중질량 M 의 위치를 기준으로 I 영역과 II영역으로 구분하고 자유 진동 미분방정식에서 Levy-Type Series를 이용하여 진동 방정식의 해를 구한다.

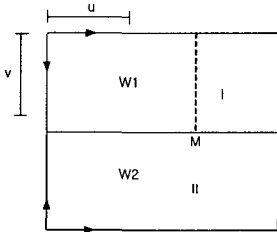


Fig.1 Plate with Concentrated Mass

I 영역에서의 형상 함수를 다음과 같이 가정한다.

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin m\pi\xi \quad (1)$$

식(1)을 판의 진동 미분방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 Y_m(\eta)}{\partial \eta^4} - 2\phi^2(m\pi)^2 \frac{\partial^2 Y_m(\eta)}{\partial \eta^2} + \phi^4[(m\pi)^4 - \lambda^4] Y_m(\eta) = 0 \quad (2)$$

위 식은 상수 계수를 갖는 4계 상미분 제차 방정식으로 해를 구하여 식(1)에 대입하면 다음과 같다.

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2}^k (A_m \sinh \beta_m \eta + B_m \sin \gamma_m \eta) \sin m\pi\xi + \sum_{m=k+1}^{\infty} (A_m \sinh \beta_m \eta + B_m \sinh \gamma_m \eta) \sin m\pi\xi \quad (3)$$

같은 방법으로 II영역에 대해서도 $W_2(\xi, \eta)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2}^k (C_m \sinh \beta_m \eta + D_m \sin \gamma_m \eta) \sin m\pi\xi + \sum_{m=k+1}^{\infty} (C_m \sinh \beta_m \eta + D_m \sinh \gamma_m \eta) \sin m\pi\xi \quad (4)$$

판의 I 영역과 II영역에 관계한 경계 조건을 위 식에 대입하면 상수 A_m, B_m, C_m, D_m 에 대해 구할 수 있다.

$\lambda^2 > (m\pi)^2$ 일 때

$$A_m = \frac{P \sin m\pi u \cdot \sinh \beta_m v}{(\beta_m^2 + \gamma_m^2) \beta_m \cdot \sinh \beta_m}, \quad B_m = -\frac{P \sin m\pi u \cdot \sin \gamma_m v}{(\beta_m^2 + \gamma_m^2) \gamma_m \cdot \sin \gamma_m} \\ C_m = \frac{P \sin m\pi u \cdot \sinh \beta_m v}{(\beta_m^2 + \gamma_m^2) \beta_m \cdot \sinh \beta_m}, \quad D_m = -\frac{P \sin m\pi u \cdot \sin \gamma_m v}{(\beta_m^2 + \gamma_m^2) \gamma_m \cdot \sin \gamma_m} \quad (5a)$$

이고, $\lambda^2 < (m\pi)^2$ 일 때는 다음과 같다.

$$A_m = \frac{P \sin m\pi u \cdot \sinh \beta_m v}{(\beta_m^2 - \gamma_m^2) \beta_m \cdot \sinh \beta_m}, \quad B_m = -\frac{P \sin m\pi u \cdot \sin \gamma_m v}{(\beta_m^2 - \gamma_m^2) \gamma_m \cdot \sinh \gamma_m} \\ C_m = \frac{P \sin m\pi u \cdot \sinh \beta_m v}{(\beta_m^2 - \gamma_m^2) \beta_m \cdot \sinh \beta_m}, \quad D_m = -\frac{P \sin m\pi u \cdot \sin \gamma_m v}{(\beta_m^2 - \gamma_m^2) \gamma_m \cdot \sinh \gamma_m} \quad (5b)$$

집중 질량 M 을 갖는 판의 주기 하중을 무차원화하면 다음과 같다.

$$P = -2b^2 \phi M \omega^2 W(u, v) / D \quad (6)$$

식(6)에 식(2)를 대입하여 정리하면 다음과 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{-a b \rho}{2\phi^4 M} = (\lambda^2)^2 \left[\sum_{m=1,2}^k \frac{\sin m\pi u}{\beta_m^2 + \gamma_m^2} \left(\frac{\sinh \beta_m v \cdot \sinh \beta_m v}{\beta_m \sinh \beta_m} - \frac{\sin \gamma_m v \cdot \sin \gamma_m v}{\gamma_m \sinh \gamma_m} \right) + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\sin m\pi u}{\beta_m^2 - \gamma_m^2} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\sinh \beta_m v \cdot \sinh \beta_m v}{\beta_m \sinh \beta_m} - \frac{\sinh \gamma_m v \cdot \sinh \gamma_m v}{\gamma_m \sinh \gamma_m} \right) \right] \quad (7)$$

여기서, ρ : 판의 단위 면적당 질량

식(7)를 이용하여 집중 질량을 갖는 판의 진동수를 구할 수 있다.

2-3 판의 동적 안정 이론

판의 동적 안정은 자유진동 미분방정식에 판에 작용하는 하중을 면내 축방향으로 작용하는 주기 하중을 대입함으로써 구할 수 있다.

변위는 처짐 함수 $K(x, y, \xi, \eta)$ 를 고려하여 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$w(x, y) = \iint K(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

판의 진동 미분방정식과 식(8)을 이용하여 정리하면

다음과 같다.

$$w(x, y, t) + m \int \int K(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial t^2} d\xi d\eta - \int \int K(x, y, \xi, \eta) \times \left[N_x(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}(\xi, \eta, t) \times \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi \partial \eta} + N_y(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta = 0 \quad (9)$$

변위 함수는 다음과 같이 가정한다.

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x, y) \quad (10)$$

여기서,

$\phi_k(x, y)$: 자유 진동 문제에 대한 고유 함수

$f_k(t)$: 시간에 대한 함수

식(9)에 식(10)을 대입하면 다음과 같다.

$$f_i'' + \omega_i^2 \left[f_i - \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik}(t) f_k \right] = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

함수 $F_{ik}(t)$ 는 다음과 같다.

$$F_{ik}(t) = \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \phi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \right) dx dy$$

판에 작용하는 주기 하중의 경우 단위 길이당 하중은 시간 함수를 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$N_x(x, y, t) = \alpha N_x(x, y) + \beta \Phi(t) N_{xt}(x, y)$$

$$N_{xy}(x, y, t) = \alpha N_{xy}(x, y) + \beta \Phi(t) N_{xyt}(x, y)$$

$$N_y(x, y, t) = \alpha N_y(x, y) + \beta \Phi(t) N_{yt}(x, y)$$

여기서,

α, β : 미지의 상수 계수, $\Phi(t)$: 주기함수

식(11)은 다음과 같은 Mathieu-Hill 방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$f_i'' + \omega_i^2 \left[f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(t) f_k \right] = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (12)$$

여 기 서

$$a_{ik} = \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \phi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$b_{ik} = \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \phi_i \left(N_{xt} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} + 2N_{xyt} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} + N_{yt} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (13)$$

식(12)를 매트릭스 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$f' + C^{-1} [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0 \quad (14)$$

식(14)는 다음과 같은 특성 방정식을 갖는다.

$$|E - \alpha A| = 0, \quad |E - \beta B| = 0, \quad |E - \omega^2 C| = 0 \quad (15)$$

식(15)를 고려하여 동적 안정에 대한 식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_k'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k} - \frac{\beta}{\beta_k} \Phi(t) \right) f_k = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

여기서,

α_k, β_k : 극한 매개 변수

ω_k^2 : 자유 진동에 대한 k번째 진동수

식(16)은 판의 동적 안정에 대한 미분 방정식이며, 한 방향으로 일정한 압축력을 받는 판에 대해 고려하면

$$N_x(x, y, t) = -(N_x + N_{xt} \cos \theta t)$$

$$N_y(x, y, t) = 0, \quad N_{xy}(x, y, t) = 0$$

이고, 식(16)에 대입하여 정리하면 판의 동적 안정에 대해 구할 수 있는 Mathieu-Hill 방정식을 얻을 수 있다.

$$f_{ik}'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{N_x + N_{xt} \cos \theta t}{N_{ik}} \right) f_{ik} = 0 \quad (i, k=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

여기서,

$$N_{ik} = \frac{k^2 \pi^2 D}{b^2} \left[1 + \left(\frac{ib}{ka} \right)^2 \right]$$

식(17)의 Mathieu-Hill의 미분방정식을 풀면 시간에 관한 항에 의해 동적 안정에 대한 진동수를 구할 수 있다.

3. 집중 질량을 갖는 판의 동적 안정

판의 동적안정해석을 위한 제원은 다음과 같다.

탄성계수(E) : 2.1×10^6 kgf/cm²

판의 크기 : 100cm × 100cm

푸아송비(ν) : 0.3

판 지지상태 : 4변 단순지지, 4변 고정지지

판의 체적당 질량(ρ) : 7.981413×10^{-6} kgf/cm³

판 두께(Thickness) : 15.0cm

Winkler 지반 파라미터 ($WFP = K_w a^4 / D$): 10, 10³

전단 지반 파라미터 ($SFP = K_G a^2 / rD$): 5, 15

Fig.4~Fig.5는 중앙 집중 질량을 갖는 판의 동적 안정에 대해 무차원 진동수비(Non-dimensional frequency ratio)와 동적하중계수(β)와의 관계를 나타

낸 것이다. 그림에서 검은색 부분이 판의 동적 불안정 영역에 속하는 부분이다.

지반 파라미터가 커질수록 고차 모드의 진동수비는 낮아지는 경향을 보였고, 불안정 영역이 확대되는 것으로 판단된다.

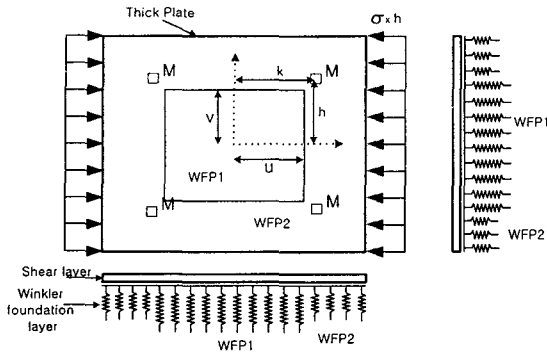
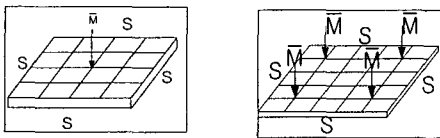


Fig. 2 Plate Modelling on Pasternak Foundation

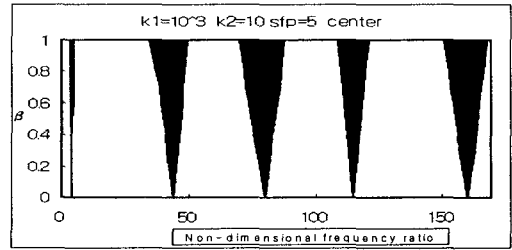


Mass : center

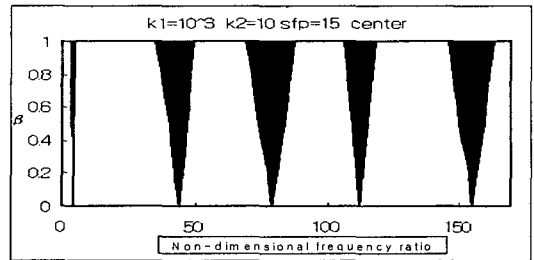
Mass : $u=v=0.3m$

Fig. 3. The types of plates with Concentrated Mass

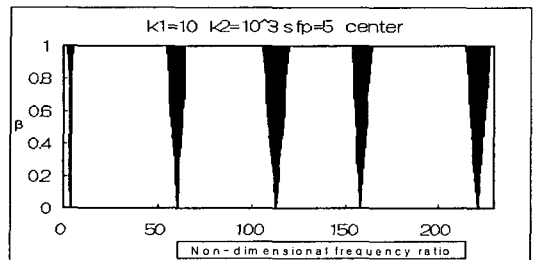
판에 작용하는 집중 질량은 중앙 1개소에 집중질량 ($\bar{M}=4.0$)을 갖는 경우와 판의 중앙에서 30cm 떨어진 ($u,v=30cm$) 위치에 4개소에 집중 질량 ($\bar{M}=1.0$)을 갖는 경우로 하였다. 판은 4변 단순지지인 경우이고 면내응력은 $0.6Pcr$ 로 국한하였다. 그리고 Winkler 지반 파라미터(WFP)와 전단지반 파라미터(SFP)의 변화에 따른 판의 불안정영역을 산정하였다. Fig.4~Fig.5에 나타난 바와 같이 1차 모드에서는 거의 불안정영역이 보이지 않았으며, 나머지 진동모드에서는 비슷한 크기의 불안정 영역을 보였다. 고차모드에서는 지반 파라미터가 커질수록 진동수비가 감소하는 경향을 보였다. 중앙 집중 질량을 갖는 판과 $u, v=30cm$ 위치 4개소에 집중 질량을 갖는 판을 비교하면 중앙 집중 질량을 갖는 판의 경우 1차 모드에서 불안정 영역이 거의 협소하게 나타났고 2차 이상의 모드에서는 거의 균일한 불안정영역을 나타냈다. 그러나 $u, v=30cm$ 인 위치 4개소에 집중질량을 갖는 판의 경우는 1, 2차 모드에서 불안정 영역이 좁게 나타난 반면 4차 모드에서 불안정 영역이 상대적으로 크게 나타났다. 또한 중앙 집중 질량을 갖는 판의 진동수비 변화는 균일한 증가를 보인 반면 $u,v=30cm$ 위치 4개소에 집중질량을 갖는 판의 경우 3차모드와 4차모드 사이에 안정 영역이 크게 위치하고 있음을 알 수 있다.



(a) WFP1=1000, WFP2=10, SFP=5

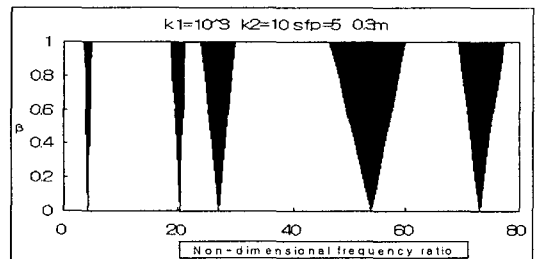


(b) WFP1=1000, WFP2=10, SFP=15

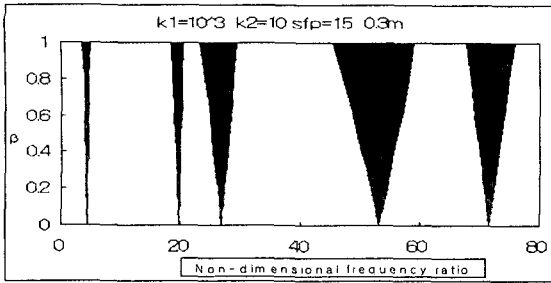


(c) WFP1=10, WFP2=1000, SFP=5

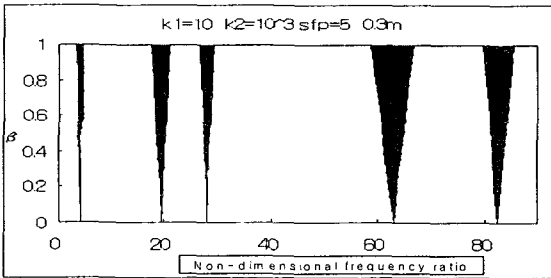
Fig.4 Dynamic Stability of 4-Simply Supported plate (Concentrated Mass Position : Center)



(a) WFP1=1000, WFP2=10, SFP=5



(b) WFP1=1000, WFP2=10, SFP=15



(c) WFP1=10, WFP2=1000, SFP=5

Fig.5 Dynamic Stability of 4-Simply Supported plate
(Concentrated Mass Position : $u=v=0.3m$)

4. 결 론

1. 집중 질량을 갖는 판은 집중 질량비 ($\bar{M} = m_c/m$)가 커질수록 진동수는 급격한 감소를 보였으며, 판의 두께는 진동수 감소에 상대적으로 영향이 적은 것으로 나타났다. 판의 경우 면내 응력의 크기보다 집중 질량의 크기에 의해 진동수 변화에 큰 영향을 미치는 것으로 판단된다.
2. 면내 응력을 받는 판의 동적 불안정 영역 중 3차 모드에서는 불안정 영역이 거의 나타나지 않았고 동적 하중 계수가 커질수록 2차 모드에서 불안정 영역이 크게 나타났으며 고차모드에서 진동수비는 낮아져 감을 알 수 있다
3. 집중질량을 갖는 판의 동적 불안정 영역중 1차 모드에 의한 영향은 거의 없었으며, 3차모드와 4차모드 사이에서 안정 영역이 크게 나타났다. 그리고 지반 강성의 크기와 면내 응력이 커짐에 따라 3차 모드에서 불안정영역이 증가하는 것을 알 수 있다.

이상의 결과로 보아 지반의 강성의 크기와 면내 응력의 크기, 집중 질량의 크기, 판의 지지상태 등은 좌굴 응력 및 진동수 변화에 영향을 주는 요인으로, 판의 불안정 영역을 최소화시키기 위해서는 지반의 강성 조절은 실질적으로 불가능하므로 지지된 판의 휨 강성이나 판의 크기 및 두께를 변화시킴으로서 진동수 조절이 가능하며 불안정 영역을 최소화시킬 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 지반 및 기초 조건에 따른 진동수 및 좌굴 응력과 판의 불안정 영역을 파악하였으나, 향후 불안정 영역의 예측 및 억제할 수 있는 방법에 관한 심도있는 연구가 지속되어야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) D. Young, "Vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method" J. appl. Mech.17, pp.448-453, 1950
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of retangular plates", Proc. Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384, 1953
- (3) .A.W.Leissa, "Vibration of plates". NASA SP-160, 1969
- (4) P. A. A Laura, R. H. Gutierrez, "Vibration of Plates Elastically Supported on a Non-Homogeneous Foundation", Journal of Sound Vibration, Vol.95, No.4, pp.531~536, 1984
- (5) K. N.saha, R. C. Kar, P. K Datta, "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation", JCS, Vol.63, pp.1213-1222, 1997
- (6) M. Celik, A. Saygun, "A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation", computer and structure , vol.36, 1999, pp.2891-2915
- (7) H. Matsunaga, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics, January 2000, pp.27-34
- (8) 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제 12권 2집 통권 제 23호, pp 35-42, 1999.54.
- (9) 백승묵, " 탄성스프링으로 지지된 정면내응력을 받는 보강판의 좌굴 및 진동해석 ", 석사학위논문, 원광대, 1999
- (10) R. F. S. Hearmon, "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edges", J. appl. Mech. Trans. ASME, 1959, pp.537-540.