

# Timoshenko이론에 의한 불연속 변단면 포물선 아치의 자유진동 해석

## Free Vibration Analysis of Stepped Parabolic Arches with Timoshenko's Theory

○ 오 상 진\* · 진 태 기\* · 모 정 만\*\*

Sang Jin Oh, Tae Ki Jin and Jeong Man Mo

**Key Words** : Stepped arch(불연속 변단면 아치), Parabolic Arch(포물선 아치), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수), Rotatory Inertia(회전관성), Shear Deformation(전단변형), Axial Deformation(축변형)

### ABSTRACT

The differential equations governing free, in-plane vibrations of stepped non-circular arches are derived as nondimensional forms including the effects of rotatory inertia, shear deformation and axial deformation. The governing equations are solved numerically to obtain frequencies and mode shapes. The lowest four natural frequencies and mode shapes are calculated for the stepped parabolic arches with hinged-hinged, hinged-clamped, and clamped-clamped end constraints. A wide range of arch rise to span length ratios, slenderness ratios, section ratios, and discontinuous sector ratios are considered. The effect of rotatory inertia and shear deformation on natural frequencies is reported. Typical mode shapes of vibrating arches are also presented.

### 1. 서 론

아치는 보, 기둥, 평판 등과 함께 구조적, 기능적 이유로 각종 구조공학 관련분야에서 단위구조로 이용되고 있어 이의 진동 특성에 관한 폭넓은 연구가 이루어져 왔다.

아치의 자유진동에 관한 연구들<sup>(1-5)</sup>에서는 주로 등단면 아치 또는 단면이 연속적으로 변화하는 아치를 대상으로 하고 있다. 그러나 실제 구조물에서 부재를 다른 부재에 연결하거나 일부분을 보강하는 경우에는 부재단면이 불연속적으로 변화하게 된다. 따라서 불연속 변단면을 갖는 아치의 진동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라 판단된다.

이에 본 연구에서는 불연속 변단면 포물선 아치의 자유진동 특성을 고찰하고자 한다. 이를 위해 축변형, 회전관성 및 전단변형의 영향을 고려하여 불연속 변단면 포물선 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 여러 가지 제변수 변화에 따른 대상구조의 고유진동수 및 진동형을 산출하고자 한다.

### 2. 수학적 모형

Fig. 1은 아치 정부를 기준으로 좌우대칭인 불연속 변단면 포물선 아치의 기하학적 형상과 제변수를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $l$ ,  $h$  및  $\alpha$ 는 각각 아치의 지간길이, 높이 및 중심각이며,  $r$ 는 단면의 불연속구간을 정의해 주는 변수이다.  $d_e$ ,  $A_e$  및  $I_e$ 는 각각 양쪽 단부로부터  $r$ 구간내의 단면높이, 단면적 및 단면2차모멘트이며,  $d_c$ ,  $A_c$  및  $I_c$ 는 각각 아치 중앙부분의 단면높이, 단면적 및 단면2차모멘트이다. 그리고  $\rho$ ,  $\phi$  및  $\theta$ 는 각각 아치축상 임의점  $(x, y)$ 에서의 곡률반경, 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도 및 아치축의 접선각을 나타낸다. 또한  $w$  및  $v$ 는 각각 곡률중심방향 및 접선방향 변위이며,  $\phi$ 와  $\beta$ 는 각각 순수힘에 의한 단면회전각과 전단변형률이다.

Fig. 2는 아치가 면내 진동하는 경우 아치 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다. 아치가 면내 진동하게 되면 진동변위에 의하여 아치단면에는 축방향력  $N$ , 전단력  $Q$  및 휨모멘트  $M$ 의 합용력이 발생한다. 또한 질량을 가지고 있는 아치가 진동함으로써 아치 미소요소에는 곡률중심방향 관성력  $P_n$ , 접선방향 관성력  $P_t$  및 회전관성우력  $T$ 가 발생한다. 아치 미소요소에 작용하는 이들 합용력과 관성력의

\* 남도대학 토목환경과

E-mail : sjoh@namdo.ac.kr

Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679

\* (주) 대동남

\*\* 전주농림고등학교

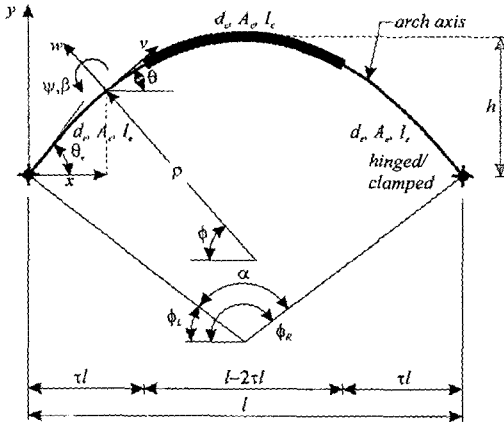


Fig. 1 Arch geometry and variables

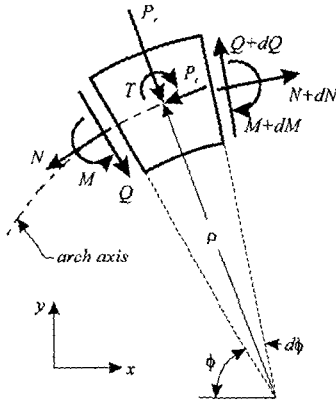


Fig. 2 Loads on an arch element

동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$N' + Q - \rho P_c = 0 \quad (1)$$

$$Q' - N - \rho P_s = 0 \quad (2)$$

$$\rho^{-1} M' - Q + T = 0 \quad (3)$$

위의 식에서  $(\cdot) = d/d\phi$ 이다.

진동시 부재단면에 발생하는 휨모멘트 및 축방향력을 변위함으로 표현하면 다음과 같다<sup>(5)</sup>.

$$M = -EI\rho^{-1}\psi' = -EI_c H\rho^{-1}\psi' \quad (4)$$

$$N = EA\rho^{-1}(v' + w) + EI\rho^{-2}\psi' = EA_c F\rho^{-1}(v' + w) + EI_c H\rho^{-2}\psi' \quad (5)$$

위의 식에서  $E$ 는 부재재료의 탄성계수이다.

전단변형을 고려하는 경우 전단력은 다음 식과 같다.

$$Q = kAG\beta = kAG\rho^{-1}(w' - v - \rho\psi) = kA_c FG\rho^{-1}(w' - v - \rho\psi) \quad (6)$$

식 (6)에서  $G$ 와  $k$ 는 각각 부재재료의 전단탄성계수 및 단면형상에 따른 상수이다. 한편 식 (4)~(6)에서  $F$ 와  $H$ 는 식 (7), (8)에 나타낸 바와 같이 부재단면의 변화를 나타내는  $\phi$ 에 관한 함수로서 각각 아치축상 임의점과 아치 정부에서의 단면적과 단면2차모멘트비를 나타낸다.

$$F = A/A_c, H = I/I_c \quad (7,8)$$

아치가 면내에서 조화진동을 한다고 가정하면 아치 미소 요소에 발생하는 곡률중심방향 및 접선방향 관성력과 회전 관성우력은 다음과 같다.

$$P_c = -\gamma A\omega^2 w = -\gamma A_c F\omega^2 w \quad (9)$$

$$P_s = -\gamma A\omega^2 v = -\gamma A_c F\omega^2 v \quad (10)$$

$$T = -\gamma I\omega^2 \psi = -\gamma I_c H\omega^2 \psi \quad (11)$$

위의 식에서  $\gamma$ 는 부재재료의 밀도,  $\omega$ 는 고유각진동수 (rad/s)이다.

식 (4)~(6)으로부터  $M'$ ,  $N'$  및  $Q'$ 을 구하면 다음과 같다. 이 때 본 연구대상인 불연속 변단면 아치는 각 구간내에서 등단면이므로  $F$ 와  $H$ 는 각 구간내에서 일정한 값을 갖으며,  $F' = H' = 0$ 이다.

$$M' = EI_c H(\rho^{-2}\rho'\psi' - \rho^{-1}\psi'') \quad (12)$$

$$N' = EA_c F\rho^{-1}(v'' + w'') - EA_c F\rho^{-2}\rho'(v' + w) + EI_c H\rho^{-2}\psi'' - 2EI_c H\rho^{-3}\rho'\psi' \quad (13)$$

$$Q' = kA_c FG\rho^{-1}(w'' - v'' - \rho'\psi' - \rho\psi'') - kA_c FG\rho^{-2}\rho'(w' - v - \rho\psi) \quad (14)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = \rho/l \quad (15-17)$$

$$\delta = w/l, \lambda = v/l \quad (18,19)$$

$$f = h/l, s = l/\sqrt{I_c/A_c}, \mu = kG/E \quad (20-22)$$

$$C_i = \omega_i s / \sqrt{\gamma/E}, i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (23)$$

식 (20)~(22)에서  $f$ ,  $s$ ,  $\mu$ 는 각각 아치높이 지간길이비 (rise to span length ratio), 세장비(slenderness ratio) 및 전단계수(shear parameter)이다. 그리고 식 (23)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이며,  $i$ 는 모드번호이다.

식 (5), (9), (14)를 식 (2)에, 식 (6), (10), (13)을 식 (1)에, 식 (6), (11), (12)를 식 (3)에 대입하고, 식 (15)~(23)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 다음의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta'' = \xi^{-1}\xi'\delta' + \mu^{-1}(1 - \xi^2s^{-2}C_i^2)\delta + (1 + \mu^{-1})\lambda' - \xi^{-1}\xi'\lambda + (\xi + \mu^{-1}\xi^{-1}s^{-2}HF^{-1})\psi' \quad (24)$$

$$\lambda'' = \xi^{-1}\xi'\lambda' + (\mu - \xi^2s^{-2}C_i^2)\lambda - (1 + \mu)\delta' + \xi^{-1}\xi'\delta - \xi^{-1}s^{-2}HF^{-1}\psi'' + 2\xi^{-2}\xi's^{-2}HF^{-1}\psi' + \xi\mu\psi \quad (25)$$

$$\psi'' = \xi^{-1}\xi'\psi' + (\mu\xi^2s^2H^{-1}F - \xi^2s^{-2}C_i^2)\psi - \mu\xi s^2H^{-1}F\delta' + \mu\xi s^2H^{-1}F\lambda \quad (26)$$

아치 정부의 단면2차모멘트  $I_c$ 를 기준으로 각 구간에서 의 단면2차모멘트 변화식  $H$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$H=1, \tau \leq \xi \leq (1-\tau) \text{에서} \quad (27a)$$

$$H=I_e/I_c = n, 0 \leq \xi \leq \tau \text{ 또는 } (1-\tau) \leq \xi \leq 1 \text{에서} \quad (27b)$$

식 (27)에서  $n$ 은 단면비(section ratio)이다.

한편 폭이  $b$ 로 일정하고, 단면높이가 불연속적으로 변하는 직사각형 단면인 경우 단면적  $A_c = bd_c$ ,  $A_e = bd_e$ , 단면2차모멘트  $I_e = bd_e^3/12$ ,  $I_c = bd_c^3/12$ 이므로, 이 관계를 이용하면 각 구간에서 단면적의 변화식  $F$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F=1, \tau \leq \xi \leq (1-\tau) \text{에서} \quad (28a)$$

$$F=n^{1/3}, 0 \leq \xi \leq \tau \text{ 또는 } (1-\tau) \leq \xi \leq 1 \text{에서} \quad (28b)$$

Fig. 1에 보인 높이  $h$ , 지간길이  $l$ 인 포물선 아치의 선형식을 식 (15), (16), (20)의 무차원 변수를 이용하여 표현하면 다음 식과 같다.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1) \quad (29)$$

식 (29)를 이용하면 포물선 아치에 대한  $\phi$  및 변화곡률 계수  $\xi, \xi'$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \quad (30)$$

$$\xi = \frac{1}{8f}[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (31)$$

$$\xi' = \frac{3}{2}(2\xi - 1)[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (32)$$

식 (24)~(26)은 일반적인 선형을 갖는 불연속 변단면 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며, 이 식에 식 (27), (28)의 단면변화식과 식 (31), (32)의 변화곡률계수를 대입하면 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 단면높이가 불연속인 포물선 아치의 면내 자유진동을 지배하는 상미분방정식으로 변환된다.

본 연구에서는 아치의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고

정 및 고정-고정을 고려하였으며, 이들 단부조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 회전단 ( $\phi = \phi_L$  또는  $\phi_R$ )에서는 곡률중심방향 변위  $w$ , 접선방향 변위  $v$ , 식 (4)의 휨모멘트  $M$ 이 발생하지 않으므로 무차원 변수를 이용하면 식 (33)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi' = 0 \quad (33a-c)$$

고정단 ( $\phi = \phi_L$  또는  $\phi_R$ )에서는 곡률중심방향 변위  $w$ , 접선방향 변위  $v$ , 단면회전이 발생하지 않으므로 무차원 변수를 이용하면 식 (34)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi = 0 \quad (34a-c)$$

### 3. 수치해석 예 및 고찰

식 (24)~(26)의 지배방정식으로부터 해석대상구조의 고유진동수를 산출하기 위하여 사용한 수치해석 방법의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (24)~(26)의 지배방정식에는 불확정량인 고유치  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저 이 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후 좌단의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 가정한  $C_i$ 값이 대상구조에 대한 고유치인지는 수치적분결과 얻어진 우단에서의 결과들이 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용하였다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학관련문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 고유치  $C_i$ 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다. 이상의 수치해석 과정을 컴퓨터 프로그램하였으며, 본 논문에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

Figs. 3~5는 회전관성 및 전단변형의 영향을 고찰하기 위하여 세장비  $s=50$ 인 등단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 아치높이 지간길이비  $f$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 점선은 회전관성과 전단변형을 무시한, 일점쇄선은 회전관성만을 고려한, 실선은 회전관성과 전단변형을 고려( $\mu=0.3$ )한 결과이다. 이 그림들에서 일반적으로 저차모드보다는 고차모드에서 회전관성 및 전단변형의 영향이 큼을 알 수 있다. 또한 아치높이 지간길이비의 증가에 따라 무차원 고유진동수가 증가하는 구간보다는 감소하는 구간에서 회전관성 및 전단변형의 영향이 더 큼을 알 수 있다.

Figs. 6~8은 회전관성 및 전단변형의 영향을 고찰하기 위하여 아치높이 지간길이비  $f=0.2$ 인 등단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 세장비  $s$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 점선은 회전관성과 전단변형을 무시

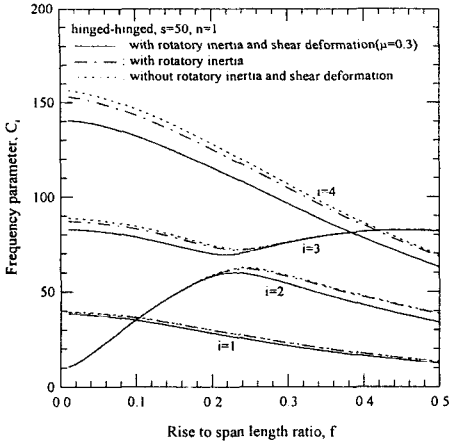


Fig. 3 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $f$  curves for hinged-hinged)

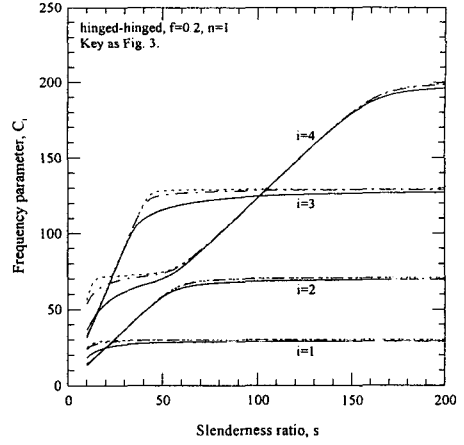


Fig. 6 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $s$  curves for hinged-hinged)

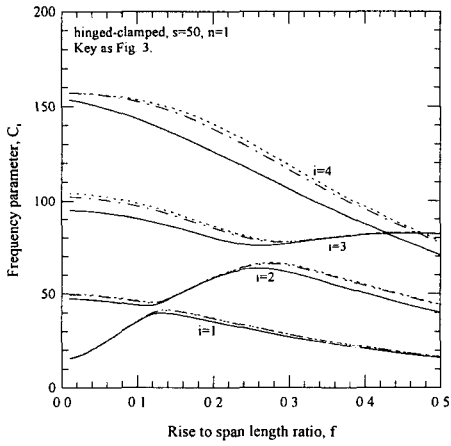


Fig. 4 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $f$  curves for hinged-clamped)

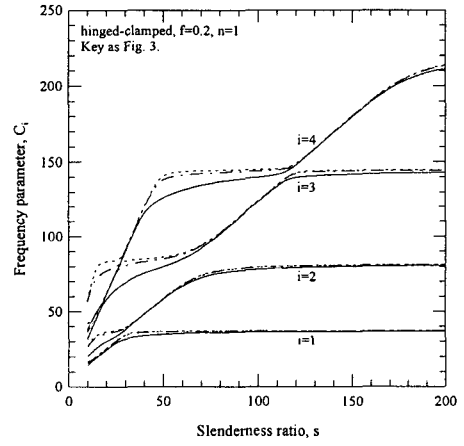


Fig. 7 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $s$  curves for hinged-clamped)

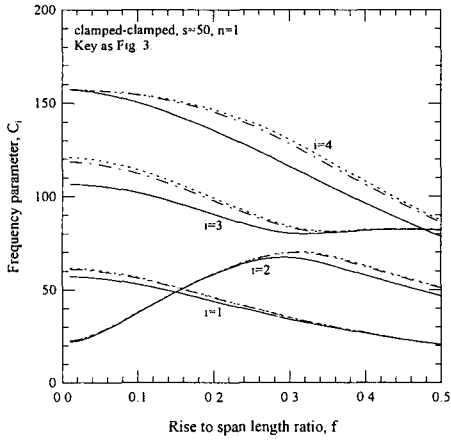


Fig. 5 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $f$  curves for clamped-clamped)

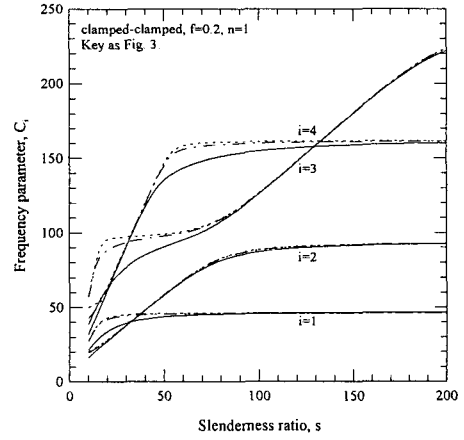


Fig. 8 Effects of rotatory inertia and shear deformation( $C_i$ -  $s$  curves for clamped-clamped)

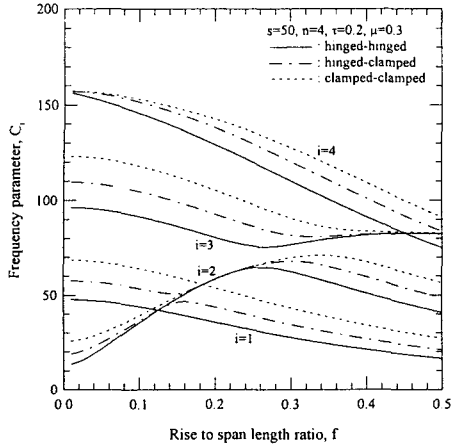


Fig. 9 Effect of  $f$  on frequency

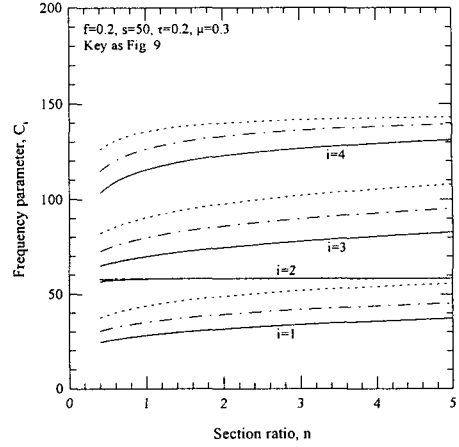


Fig. 11 Effect of  $n$  on frequency

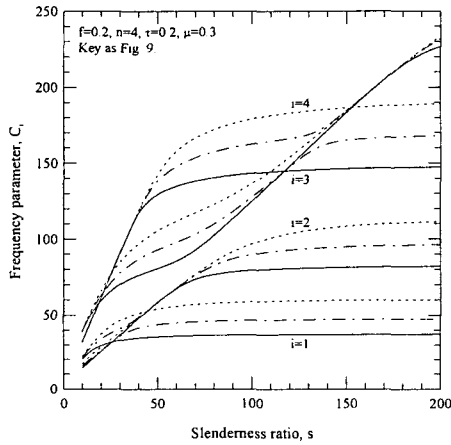


Fig. 10 Effect of  $s$  on frequency

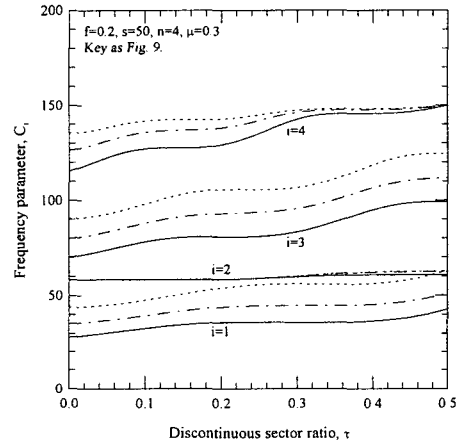


Fig. 12 Effect of  $\tau$  on frequency

한, 일점쇄선은 회전관성만을 고려한, 실선은 회전관성과 전단변형을 고려( $\mu=0.3$ )한 결과이다. 이 그림들에서 세장비가 작을수록 회전관성 및 전단변형의 영향이 크며, Fig. 3~5의 결과와 마찬가지로 저차모드보다는 고차모드에서 회전관성 및 전단변형의 영향이 큼을 알 수 있다.

Fig. 9는 세장비  $s=50$ , 단면비  $n=4$ , 불연속구간비  $\tau=0.2$ , 전단계수  $\mu=0.3$ 이고, 회전-회전(실선), 회전-고정(일점쇄선), 고정-고정(실선)의 단부조건을 갖는 불연속 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 아치높이 지간길이비  $f$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 일반적으로 높은 아치는 낮은 아치에 비해 무차원 고유진동수가 작은 경향을 보임을 알 수 있다. 그러나 아치높이 지간길이비가 일정값에 도달하기 이전에는 아치높이 지간길이비가 증가함에 따라 각 모드별 고유진동수는 증가와 감소의 경향을 함께 나타내고 있다.

Fig. 9에서 회전-회전 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 아치의 무차원 고유진동수 곡선이 교차하는 지점을 발견할

수 있는데 이는 동일한 고유진동수에 대하여 대칭진동과 역대칭진동을 갖는 2개의 모드가 존재함을 의미한다. 한편 단부조건별 무차원 고유진동수는 항상 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전의 순서로 크며, 무차원 고유진동수가 증가하는 구간보다는 감소하는 구간에서 단부조건별 무차원 고유진동수의 차이가 큼을 알 수 있다.

Fig. 10은 아치높이 지간길이비  $f=0.2$ , 단면비  $n=4$ , 불연속구간비  $\tau=0.2$ , 전단계수  $\mu=0.3$ 이고, 회전-회전(실선), 회전-고정(일점쇄선), 고정-고정(실선)의 단부조건을 갖는 불연속 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 세장비  $s$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 세장비가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가하며, 세장비가 일정값에 도달한 후에는 각 모드별 무차원 고유진동수가 일정값으로 수렴해 감을 알 수 있다. 한편 단부조건별 무차원 고유진동수는 항상 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전의 순서로 크며, 무차원 고유진동수가 가파르게 증가하는 구간보다 일정값으로 수렴하는 구간에서 단부조건별 무차원 고

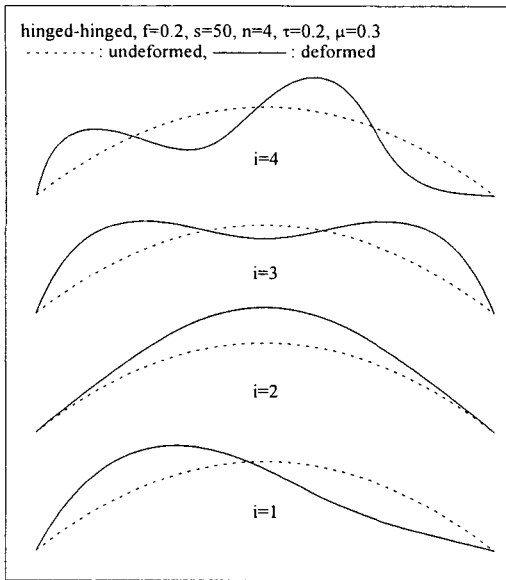


Fig. 13 Example of mode shapes ( $s=50$ )

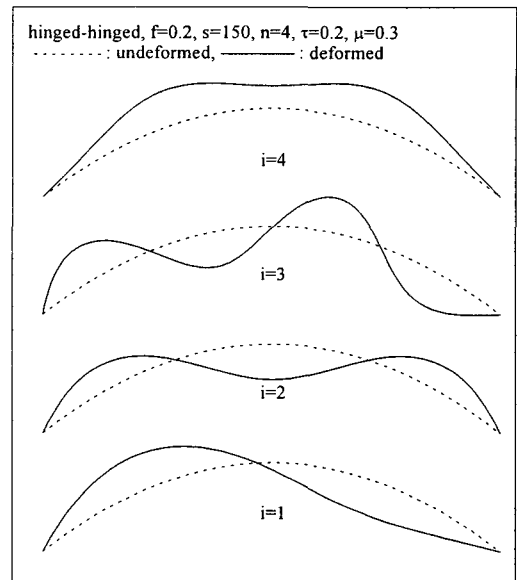


Fig. 14 Example of mode shapes ( $s=150$ )

유진동수의 차이가 크을 알 수 있다.

Fig. 11은 아치높이 지간길이비  $f=0.2$ , 세장비  $s=50$ , 불연속구간비  $\tau=0.2$ , 전단계수  $\mu=0.3$ 이고, 회전-회전(실선), 회전-고정(일점쇄선), 고정-고정(실선)의 단부조건을 갖는 불연속 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 단면비  $n$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 단면비가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다.

Fig. 12는 아치높이 지간길이비  $f=0.2$ , 세장비  $s=50$ , 단면비  $n=4$ , 전단계수  $\mu=0.3$ 이고, 회전-회전(실선), 회전-고정(일점쇄선), 고정-고정(실선)의 단부조건을 갖는 불연속 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 불연속구간비  $\tau$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 불연속구간비가 증가하는 무차원 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다.

참고로 아치높이 지간길이비  $f=0.2$ , 단면비  $n=4$ , 불연속구간비  $\tau=0.2$ , 전단계수  $\mu=0.3$ 이고, 회전-회전의 단부조건을 갖는 불연속 변단면 포물선 아치의 진동형을 Fig. 13 ( $s=50$ )과 Fig. 14 ( $s=150$ )에 수록하였다.

#### 4. 결론

본 연구는 불연속 변단면 아치의 면내 자유진동에 관한 연구이다. 이 연구에서는 진동시 아치 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여, 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 불연속 변단면 아치의

면내 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식에 단면높이가 불연속인 포물선 아치를 적용하였으며, 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정을 고려하였다.

수치해석 결과로서 해석대상 아치의 제원을 나타내는 무차원 변수인 아치높이 지간길이비, 세장비, 단면비 및 불연속구간비의 변화에 따른 무차원 고유진동수 및 진동형을 제4모드까지 산출하고, 그 결과를 분석하였다.

#### 5. 참고문헌

- (1) Den Hartog, J.P., 1928, "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs," Philosophical Magazine, Vol. 5, pp.400~408.
- (2) Laura, P.A.A. and Maurizi, M.J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, 6-9.
- (3) Tufekci, E. and Arpacı, A., 1998, "Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with account taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects," Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, pp.845-856.
- (4) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.
- (5) Borg, S.F. and Gennaro, J.J., 1959, Advanced Structural Analysis, Van Nostrand.