

## 면내응력을 받는 보강 후판의 유한요소법에 의한 진동해석

### Vibration Analysis of Stiffened Thick Plate Subjected to Static Inplane Stress Using Finite Element Method

○ 오숙경\* · 이용수† · 김일중\*\*

Oh, Soog Kyoung, Lee, Yong Soo and Kim, Il Jung

Key Words : Finite Element Method, Natural frequency, Thick Plate, Pasternak Foundation

#### ABSTRACT

The soil-structure interactions are caused by the point sources of explosions, deriving piles, compaction of foundations and excavations those are frequently arose in the construction sites. Thus the analysis of soil-structure interactions is one of the most important subjects in the fields of dynamic analysis and vibration control. From this viewpoint, the aim of this study is to collect the basic data for designing foundation structures throughout understanding the dynamic structural behavior, which is embodied by the dynamic analysis of soil-structure systems. In this study, the dynamic analyses of stiffened thick plates subjected to in-plane stress on elastic foundations are carried out. The foundation is modeled as Pasternak foundation that includes the continuity effect of foundations. Also both the Mindlin plate theory and Timoshenko beam-column theory are used for analyzing the thick plates and beams, respectively.

#### 기 호 설 명

$2\bar{a} \times 2\bar{b}$  : 전체판의 크기  
D : 판의 휨강성  
E : 탄성계수  
G : 전단탄성계수  
K<sub>e</sub> : 판 요소의 휨 전단강성  
K<sub>f</sub> : 판요소의 전단지반 강성  
k<sub>w</sub> : Winkler 지반강성  
k<sub>g</sub> : 전단지반강성  
M<sub>e</sub> : 판의 요소질량  
P<sub>x</sub> : 면내력  
SFP : 전단지반계수

WFP : Winkler지반계수

ρ : 단위 체적당 질량

ν : 포아송비

w : 수직처짐

θ<sub>x</sub> : x방향 회전각

θ<sub>y</sub> : y방향 회전각

ω : 판의 고유진동수

σ : 면내응력

#### 1. 서 론

판은 선박, 항공, 건축물, 교량, 내력벽, 저장탱크 등에 널리 사용되는 구조부재로 보나 기둥 등과 함께 건축구조부의 바닥구조로 많이 이용되고 있다. 판은 장방형, I형, C형, Box형 등의 단면부재에 의해 보강되는데 판에 보강재를 두어 보강함으로써 판의 추가적인 두께 변화없이도 단면성능을 개선시킬 수 있게 된다.

최근에 빈번하게 발생하고 있는 건설현장의 발파, 항타, 다짐, 굴착 등은 지반-구조물 상호작용을 발생시키는데 지반-구조물 상호작용에 대한 해석은 진동제어 분야 및 동적 해석 분야에서 중요한 연구 대상이 되고 있다. 예로 탄성지 지된 교차 보, 교량 상판, 지표면 위에 놓인 기초, 활주로, 철도 노반 등을 들 수 있다. 이러한 구조물들을 지지하는 지반은 비균질한 상태에 놓이게 될 확률도 높으면 구조물에 면내력을 유발시키기도 한다. 이러한 배경으로 본 연구는 지반-구조물 시스템의 동적 해석을 통하여 구조체의 동적 거동을 파악하여 구조체의 기초 구조물 설계시에 기본

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수  
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782

E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

\* 정회원, 공학박사

\*\* 정회원, 전북과학대학 건축·토목 계열 조교수

자료를 제공하는데 연구 목적이 있다.

현재까지 지반-구조물 상호작용에 관한 연구 및 판과 보강판의 해석에 관한 연구를 살펴보면 다음과 같다.

Leissa(1950년)에 의해 등방질 판의 자유진동에 대한 연구가 수행된 이후 Horenberg 등(1985)은 Modal Constraint 법을 이용하여 판의 동적 해석을 연구하였다. Holopainen (1995)은 편심 보강판의 유한요소 자유진동 해석을 하였다.

Saha 등(1997)은 Galerkin 법을 이용하여 비균질 지반으로 지지된 판의 동적 문제를 다루었고, Matsunaga(1997)에 의해 면내응력을 받는 후단성판의 좌굴 불안정에 대한 연구가 이루어졌고, Bedair(1997)는 등분포압축력하의 다중보강된 판의 탄성거동에 대한 연구를 행하였다. Sheikh(2003) 등은 압축과 휨이 조합된 하중을 받는 보강판을 해석하였다.

국내에서 이병구 등(1994)은 전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석을 하였으며, 이용수 등(1997)은 탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석을 하였으며, 이용수 등(2003)은 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 판의 자유진동해석을 수행하였다.

본 연구에서는 면내력을 받는 보강판의 진동해석에 대한 것으로 해석을 위한 지반으로 Pasternak 지반모형을 채택하였다.

보강판의 유한요소는 판요소와 보요소를 사용하고 전체 판요소와 보요소에 대한 강성행렬들을 조합하여 보강판의 동적 방정식을 얻었다. 판해석은 Mindlin 판이론을, 보해석은 Timoshenko 보-기둥이론을 적용하였다.

본 연구에서 개발된 컴퓨터 프로그램 해석해와 기존해를 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하고, 프로그램을 이용하여 탄성지반 위에 놓인 보강판에 대한 면내응력의 변화, 지반변수의 변화, 보강재 크기의 변화 등에 따라 보강판의 고유진동수를 산출하였다.

## 2. 유한요소해석

후판요소와 보요소의 변형 에너지, 운동 에너지 및 외력이 한 일을 구하고 가상 일의 원리를 이용하여 이들 변분을 0(zero)으로 놓아 고유치 방정식을 산정한다.

### 2.1 형상함수

#### (1) 판요소

후판요소를 해석하기 위해 8절점 Serendipity 요소계를 사용하였다.

임의 좌표의 변위와 회전변위의 관계를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (1)$$

여기서,

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

무차원 변수  $\xi = (x - x_c)/a$ ,  $\eta = (y - y_c)/b$  를 이용한 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta^2) \} \quad (2)$$

여기서,

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

### (2) Timoshenko 보-기둥 요소

Timoshenko 보-기둥의 해석을 위해 3절점 요소계를 사용하였으며 전단변형을 고려한 변위는 다음과 같다.

$$\{ q \}^e = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, w_3, \theta_3]^T \quad (3)$$

임의 점의 변위와 회전각은 다음과 같은 변위함수로 정의된다

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3 = \sum_{i=1}^3 N_i w_i = [N_w] \{ q \}^e \quad (4)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_3(\xi)\theta_3 = [N_\theta] \{ q \}^e \quad (5)$$

Timoshenko 보-기둥 요소의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) \quad (6a)$$

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (6b)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi(1 + \xi) \quad (6c)$$

## 2.2 가상일의 원리

### (1) 후판 요소

가상일의 원리에 의해 구한 운동에너지( $T_e$ )와 변형에너지( $U_e$ ) 및 외력에 의한 일( $W_e$ )을 행렬형태로 구성하고 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta T_e = \{ \delta_e \}^T [M_e] \{ \delta_e \} \quad (7a)$$

$$\delta U_e = \{ \delta_e \}^T [K_e] \{ \delta_e \} + \{ \delta_e \}^T [K_f] \{ \delta_e \} \quad (7b)$$

$$\delta W_e = \{ \delta_e \}^T [K_g] \{ \delta_e \} \quad (7c)$$

여기서,

$[M_e]$ : 질량행렬

$[K_e]$ : 후판요소의 휨강성행렬

$[K_f]$ : 탄성지반의 요소강성행렬

$[K_g]$ : 후판요소의 기하강성행렬

## (2) Timoshenko 보-기둥요소

가상의 일의 원리와 변위함수를 이용하면 Timoshenko 보-기둥요소의 변형에너지( $U_{be}$ ), 운동에너지( $T_{be}$ ), 축하중  $P$ 에 의한 일( $W_{be}$ )은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \{q\}^e \cdot T [K]_b^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e \cdot T [K]_f^e \{q\}^e \quad (8a)$$

$$T_{be} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^e \cdot T [M]_b^e \{\dot{q}\}^e \quad (8b)$$

$$W_{be} = \frac{1}{2} \{q\}^e \cdot T [K_g]_b^e \{q\}^e \quad (8c)$$

여기서,

$[K]_b^e$ : 보요소의 휨·전단강성행렬

$[K]_f^e$ : 보요소의 탄성지반강성행렬

$[M]_b^e$ : 보요소의 병진·회전관성에 따른 연속질량행렬

$[K_g]_b^e$ : 보요소의 기하강성행렬

(7), (8)식을 전체 판요소에 대해 조합하고 가상 일의 원리를 적용하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \sigma [K_G] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (9)$$

여기서

$[K_E]$ :  $[K_e]$ ,  $[K_f]$ 를 전체 판요소의 요소강성행렬

$[K_M]$ :  $[M_e]$ 를 전체 판요소의 질량행렬

$[K_G]$ : 면내응력을 1로 한 경우 전체판의 기하강성 행렬

$\omega$ : 판의 고유 원 진동수

$\sigma$ : 면내응력

(9)식에서 좌굴응력 이하의 면내응력을 받는 후판의 고유진동수  $\omega$ 를 구할 수 있다.

## 3. 검증 및 해석 예제

### 3.1 검증

탄성지반강성이 고려되지 않은 진동의 경우는 SAP 2000 해석해를 본 연구의 해석해와 비교하고, 탄성지반 위에 놓인 후판의 고유진동수에 대해서는 기존해와 비교하여 본 해석해의 정밀도를 검증한다.

### (1) 탄성지반 위에 놓이지 않은 판의 고유진동수

후판의 고유진동수 ( $Hz$ )에 대한 본 연구의 결과를 SAP 2000과 비교하면 Table 1과 같다. SAP 2000과 본 해석해의 고유진동수는 5차 모드에서 1.70%의 최대 오차를 보인다.

Table 2는 보강판의 고유진동수 ( $Hz$ )에 대한 본 연구의 해석해를 SAP 2000과 비교한 것이다. 본 해석해와 SAP 2000의 경우 5차 모드에서 3.89%의 최대 오차를 보인다.

Table 1 Natural Frequency of Thick Plates

Mode	This Paper Solutions	SAP 2000	Error(%)*
1	360.15	357.14	0.84
2	906.88	909.09	0.24
3	906.90	910.17	0.36
4	1262.75	1250.00	1.02
5	1696.01	1667.67	1.70

\* Error(%) = | This Paper Solutions - SAP 2000 | × 100 / SAP 2000

Table 2 Natural Frequency of Stiffened Plates

Mode	This Paper Solutions	SAP 2000	Error(%)*
1	404.94	400.00	1.24
2	906.85	913.14	0.69
3	1126.55	1111.11	1.39
4	1450.91	1428.57	1.56
5	1601.89	1666.67	3.89

\* Error(%) = | This Paper Solutions - SAP 2000 | × 100 / SAP 2000

### (2) 탄성지반 위에 놓인 후판의 고유진동수

탄성지반으로 지지된 후판의 고유진동수를 문헌해[1]과 비교하여 지반강성을 고려한 경우에 대한 본 해석해의 정밀도를 검토한다. 비교할 후판의 조건은 문헌[1]에 언급된 후판과 동일 조건으로 한다.

탄성계수 ( $E$ ):  $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

포와송 비 ( $\nu$ ): 0.3

후판의 크기:  $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$

후판의 지지상태: 4변 단순지지

후판 두께:  $20 \text{ cm}$

탄성(Winkler)지반변수 ( $WFP = k_w a^4/D$ ):

$0, 10, 10^2, 10^3, 10^4$

전단지반변수 ( $SFP = k_g a^2/D$ ):  $0, 10$

탄성지반변수 변화에 따른 고유진동수를 대상으로 문헌해와 본 해석해의 결과를 비교하면 Table 3과 같다.

무차원 고유진동수는  $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$  로 정의한다.

Table 3에 의하면 본 해석해가 문헌해[1]과 최대 0.22%의 오차를 나타내는 것으로 보인다.

Table 3 Comparison of Natural Frequency According to Variation of Foundation Parameters

SFP	WFP	This Paper Solutions	Reference[1]	Error *
0	0	17.4345	17.4486	0.08
	10	17.7071	17.7208	0.08
	$10^2$	19.9952	20.0042	0.05
	$10^3$	35.5161	35.5028	0.04
	$10^4$	98.7452	98.5331	0.22
10	0	22.1956	22.2117	0.07
	10	22.4104	22.4261	0.07
	$10^2$	24.2580	24.2698	0.05
	$10^3$	38.0741	38.0638	0.03
	$10^4$	99.6619	99.4473	0.22

\* Error(%) = | This Paper Solutions - Reference[1] | × 100 / Reference[1]

### 3.2 해석 예제

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 비균질 탄성지반으로 지지된 4변 단순지지 보강판이 면내응력을 받는 경우의 고유진동수를 구한다.

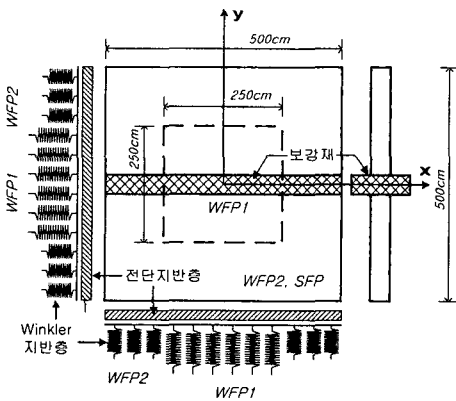
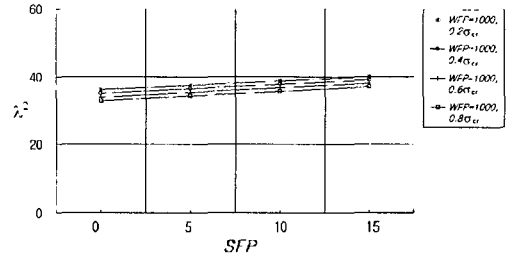


Fig. 1 Stiffened Plate Modelling on Pasternak Foundation

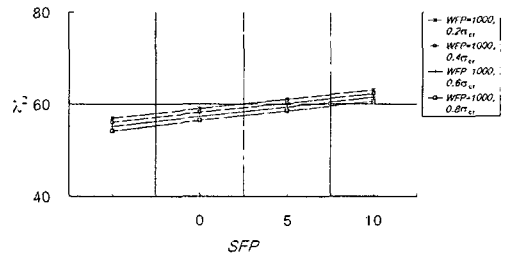
본 유한요소법을 적용한 비균질 탄성지반 위에 놓인 보강판의 기하적 형상은 Fig. 1과 같다.

해석 예제에서 사용한 보강판의 기계적, 기하학적 조건은 다음과 같다.

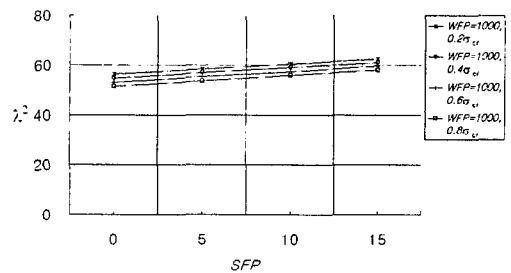
탄성계수 (E) :  $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$



(a) Thick Plate



(b)  $\delta=0.1, \gamma=0.4$



(c)  $\delta=0.2, \gamma=3.0$

Fig.2 Variations natural frequency versus variations of shear foundation parameters and Stiffener

포와송 비 ( $\nu$ ) : 0.167

후판 지지상태 : 4변 단순지지

후판의 체적당 질량 ( $\rho_b$ ) :  $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$

후판의 크기 : 500 cm × 500 cm

보강재의 크기 :  $\delta (= A_b/bh)$  : 0.1, 0.2

$\gamma (= EI_b/bD)$  : 0.4, 3.0

후판 두께 : 25.0 cm

면내응력 변화 : 0,  $0.2\sigma_{cr}$ ,  $0.4\sigma_{cr}$ ,  $0.6\sigma_{cr}$ ,  $0.8\sigma_{cr}$

탄성(Winkler)지반변수 (WFP1, WFP2 =  $k_w a^4/D$ )

: 0, 10,  $10^2$ ,  $10^3$

전단지반변수 (SFP) : 0, 5, 10, 15

면내응력을 받는 보강판의 진단지반변수 변화에 따른 무차원 고유진동수를 그래프로 나타낸 것이 Fig. 2이다.

Fig. 2에 의하면 후판과 보강판의 경우는 진단지반변수가 증가함에 따라 거의 선형적으로 무차원 고유진동수가 증가한다. 또한 탄성지반변수가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가하나, 면내응력이 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 감소함을 볼 수 있다. Fig 2(a)(b)에 의하면 보강재가 없는 후판의 경우에 비해 보강판의 진동수가 증가함을 볼 수 있다. Fig 2(b)(c)에 의하면 오히려 보강재의 크기가 커짐에 따라 진동수는 감소함을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구는 탄성지반으로 지지된 보강판에 면내응력이 가해졌을 경우 고유진동수를 유한요소해석에 의해 산정한 것이다. 후판 및 보강판의 고유진동수에 대한 본 해석해를 문헌해, SAP 2000와 비교하여 본 해석방법의 신뢰성을 검증한 후 비균질 탄성지반 위에 놓인 보강판에 대한 면내응력, 지반변수 및 보강재 크기 변화에 따른 보강판의 고유진동수를 산정하였다. 이 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 본 연구에서 산출한 탄성지반 위에 놓인 보강판의 고유진동수는 문헌해와 매우 유사하였다.
2. 면내응력을 받는 보강판은 면내응력의 크기가 증가할수록 무차원 고유진동수는 감소하나, 지반강성들이 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가한다.
3. 면내응력이 가해진 경우 보강재가 없는 후판에 비해 보강재가 있는 보강판의 고유진동수가 증가함을 볼 수 있다.

#### 참 고 문 헌

1. Arthur Leissa (1993). *Vibration of Plates*, Acoustical Society of America.
2. J. A. G. Horenberg and J. G. M. Kerstens(1985). "Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," *Journal of Sound & Vibration*, Vol. 101.
3. T. P. Holopainen(1995). "Finite Element Free Vibration Analysis of Eccentrically Stiffened Plates," *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 6.
4. K. N. Saha, R. C. Kar and P. K Datta(1997). "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation," *Journal of Computer & Structures*, Vol. 63.
5. H. Matsunaga(1997). "Buckling Instability of Thick Elastic Plates Subjected to In-plane Stresses," *Journal of Computer & Structures*, Vol. 62, No. 1.
6. O. K. Bedair(1997). "The Elastic Behaviour of Multi-Stiffened Plates Under Uniform Compression," *Thin-Walled Structure* Vol. 27.
7. I. A. Sheikh, A. E. Elwi and G. Y. Grondin(2003). "Stiffened Steel Plates under Combined Compression and Bending," *Journal of Constructional Steel Research* Vol. 59.
8. 이병구(1994). "진단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석," *한국전산구조공학회 논문집* 6(3).
9. 이용수, 김일중, 오숙경, 김성용(1997). "탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴 해석," *대한건축학회 춘계학술발표회 논문집* 17(1).
10. 이용수, 김일중, 오숙경(2003). "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," *한국강구조학회 논문집*