

임의의 하중 하에서 축소시스템 구성을 통한 구조물의 동적 거동 연구

Time Integration in Reduced System Constructed by Two-level Condensation Scheme

김 현 기* 조 맹 효†
Hyungi Kim Maenghyo Cho

ABSTRACT

This study constructs the reduced system by two-level condensation scheme. This scheme consists of two steps. First step selects the candidate area for the primary degrees of freedom by energy estimation in element level. In the second step, the primary degrees of freedom are selected by the sequential elimination scheme. The efficiency and reliability of this scheme is shown through the prediction of eigenvalues of a few numerical examples. Time integration in the reduced system can save the computing time effectively. The well-constructed reduced system can present the accurate behavior of the structure under arbitrary dynamic loads so much as the global system. Through the numerical example, the efficiency and reliability of the proposed scheme will be demonstrated.

1. 서 론

대형 구조물의 해석을 위해서는 많은 전산자원과 계산시간이 요구된다. 과거부터 이 문제를 보다 효율적으로 해결하기 위한 많은 기법들이 제안되어 왔다[1-4]. 제안된 기법들은 구조물의 지배적인 거동이 중요한 몇 개의 저차모드에 의해 결정되는 특성을 이용한다. 이러한 특성을 이용하여, 중요 저차모드를 추출하기 위해 주자유도를 선정하고, 선정된 결과를 토대로 축소시스템을 구성함으로써 연산 시간과 효율적인 계산을 수행할 수 있는 다양한 방법들이 제안되어 왔다.

축소시스템의 신뢰성을 결정하는 요인에는 두 가지가 있다. 첫째는 주자유도의 위치를 적절히 선정하는 문제이고, 두 번째는 선정된 주자유도와 부자유도 관계를 적절한 행렬 연산을 통해 근사화 시키는 문제이다. 주자유도와 부자유도 관계를 근사화 하는 기법들은 앞에서 언급한 것처럼 다양하게 제안되어 왔다. 그러나, 주자유도와 부자유도의 관계를 잘 근사화한 행렬 연산기법을 사용하더라도, 선정된 주자유도의 위치와 개수에 따라서 그 한계를 갖게 된다. 따라서, 정확한 축소시스템의 구성을 위해서는 주자유도의 적절한 선정이 무엇보다 중요하다.

본 연구에서는 효율적이면서 신뢰성있는 축소시스템을 구성하는 방법으로 2단계 축소기법을 사용하였다[5]. 이 방법은 요소단위의 래일리 에너지 평가에 의해 후보영역을 선정하는 1단계와 순차적 소거법에 의해 최종 축소시스템을 구성하는 2단계로 구성된다.

축소시스템이 적절하게 구성되면, 고유치 해석뿐 만 아니라, 다양한 분야에 적용함으로써 그 효율성 확보는 확연하다.

본 연구에서는, 임의의 하중하에서 제안된 방법으로 구성된 축소 시스템을 이용하여 동적 거동 결과를 살펴봄으로써 신뢰성을 확인한다. 또한, 짧은 시간 동안 가해지는 동적 충격하중에서 하중주파수와 주자유도

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원생
† 서울대학교 기계항공공학부 부교수

개수 및 위치의 관계를 살펴봄으로써, 축소시스템에서 시간응답 해석을 위해 고려되어야 할 문제에 대해서 살펴보고자 한다.

2. 기존의 주자유도 구성방법

1) 순차적 소거법(Sequential Elimination Method)

순차적 소거법은 주자유도 선정 기법 중에서 가장 널리 사용되고 있는 방법이다[6]. 이 방법은 시스템의 질량행렬과 강성행렬의 대각항의 비가 큰 자유도를 순차적으로 제거해 나가는 방법으로 구현하기 쉽고, 선정된 결과가 매우 신뢰할 만하다. 그러나, 매 알고리즘마다 한 개의 자유도만을 소거하므로, 최종적인 축소시스템을 구성하기 위해서는 상당한 시간을 요구하게 된다. Fig. 1은 순차적 소거법을 통한 축소시스템 구성 예제이다.

수치예제에서 5x5 크기의 강성과 질량 행렬이 주어진다. 각 행렬의 대각 행렬의 비를 계산하여 가장 큰 자유도가 부자유도로 선정되고, 그 결과에 따라, 강성과 질량 행렬은 주자유도와 부자유도로 분할된다. 그리고, 축소시스템 구성을 위한 Guyan, IRS 또는 AIRS에 따라 1개의 자유도 크기가 줄어든 4x4 크기의 축소시스템이 구성된다. 이런 과정은 사용자가 원하는 크기의 시스템이 구성될 때까지 반복 수행된다.



Fig 1. 순차적 소거법의 축소시스템 구성 예제

2) 자유도에 기초한 에너지 평가 방법

자유도별 에너지 평가에 의해 주자유도를 선정하는 방법이 제안되었다[7]. 순차적 소거법이 시스템의 거동에 크게 영향을 주지 않는 자유도를 제거하여 최종적으로 남는 자유도를 이용하는 것과 달리 이 방법은 각 자유도 에너지 평가를 통해 한꺼번에 원하는 개수 만큼의 주자유도를 선정하는 방법이다. 따라서, 기존의 순차적 소거법이 갖고 있는 시간 소요의 문제점은 고려하지 않아도 되는 장점이 있으며, 축소 시스템의 신뢰성도 어느 정도 보장된다고 할 수 있다. 그러나, 이 방법은 주자유도 선정 결과가 해석 구조물의 경계조건에 따라 의존하는 경향을 보이고 있으며, 구성된 시스템이 저차 모드를 강조하는 경향을 보인다. 아래 식은 자유도 별 에너지 평가식을 나타내고 있다. 각 자유도 별 에너지 값 중에서 그 값이 큰 순서대로 선정이 된다.

$$E_i = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^N |z_{ij} m_{ik} z_{kj}| \quad (1)$$

3. 2단계 축소기법

본 연구에서는 축소시스템 구성을 위해서 효율적이고 신뢰성 높은 2단계 축소기법(two-level condensation scheme)을 사용하였다[8-10]. 이 방법은 두 가지 단계로 구성된다. 첫 번째 단계에서는 요소단위의 레일리(Rayleigh)에너지 평가에 의해 주자유도 선정을 위한 후보 영역을 선정하고, 두 번째 단계에서는 순차적 소

거법을 적용하여 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다. 일반적으로 순차적 소거법은 많은 계산 시간과 전산 자원을 필요로 하지만, 2단계 축소기법에서는 1단계 축소과정을 거친 축소시스템에 적용되므로, 기존의 방법에 비해 많은 시간을 요구하지 않으면서, 순차적 소거법이 갖고 있는 신뢰성을 확보할 수 있는 장점이 있다. Figure 2는 2단계 축소법 과정을 그림으로 나타낸 것이고, Fig. 3은 그것의 전체적인 알고리즘이다.

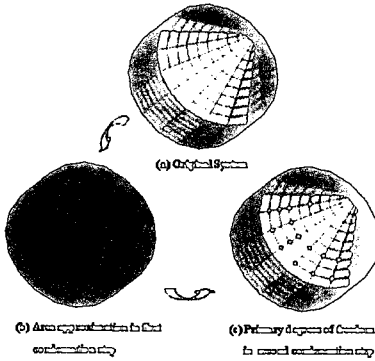


Fig. 2 2단계 축소기법 schematic

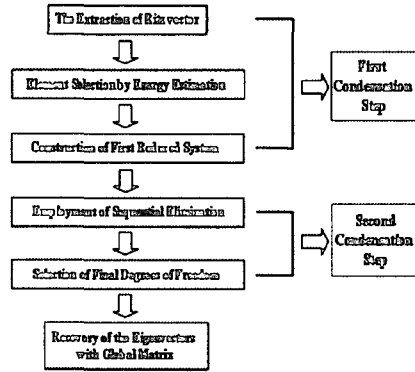


Fig. 3 2단계 축소기법의 전체적인 알고리즘

1) 1단계 축소시스템 구성 단계

1.1) 리츠벡터(Ritz vector)

후보영역 선정은 리츠벡터를 이용한 요소단위의 레일리(Rayleigh) 에너지 평가를 통해 이루어진다. 리츠 벡터 계산을 위한 초기 가상 하중은 질량 행렬의 대각항으로 근사화되고, 식 (2)와 같은 정적문제를 구성하게 된다. 구해진 해는 식(3)의 정규화 과정을 통해 첫 번째 리츠벡터를 얻게 된다.

$$[K] \{x^{(1)}\}^* = [M] \{x^{(1)}\}^* \quad (2)$$

$$\{x^{(1)}\} = \{x^{(1)}\}^* / \sqrt{\{x^{(1)}\}^* [M] \{x^{(1)}\}^*} \quad (3)$$

식 (3)에서 구해진 리츠벡터는 질량 행렬과의 연산을 통해 두 번째 리츠벡터를 구하기 위한 가상하중벡터로 사용된다. 이전 단계에서 구해진 벡터들은 Gram-Schmit 과정을 통해 현재 단계의 벡터로부터 그 성분들을 제거함으로써 상호 직교성을 보장하게 된다. 식 (4)는 Gram-Schmit과정이며, 원하는 개수의 리츠벡터를 얻을 때까지 반복된다.

$$\{x^{(1)}\} = \{x^{(1)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} [\{x^{(k)}\}^T [M] \{x^{(k)}\}] \{x^{(k)}\} \quad (4)$$

$$\{z^{(i)}\} = \{x^{(i)}\} / \sqrt{\{x^{(i)}\}^T [M] \{x^{(i)}\}}$$

1.2) 요소단위의 에너지 평가

구해진 리츠벡터에 의해 요소단위의 레일리(Rayleigh)에너지가 계산된다.

$$\lambda_e^i = \frac{\sum_{k=1}^n [\{z^{(k)}\}^T [K_e^i] \{z^{(k)}\}]}{\sum_{k=1}^n [\{z^{(k)}\}^T [M_e^i] \{z^{(k)}\}]} \quad (5)$$

여기서, $[K_e^i], [M_e^i]$ 는 요소단위의 강성행렬과 질량 행렬이고, $\{z^{(k)}\}$ 는 k 번째 리츠벡터를 의미하며, 레일리 에너지 값이 작은 순서대로 선택된다.

1.3) 가중치의 고려

가중치는 저차모드를 강조하는 경향을 피하기 위해 고려된다. 요소별 가중치 값은 강성과 질량행렬의 대각항으로부터 얻어진다. $[K], [M]$ 이 $n \times n$ 행렬일 경우, 강성 및 질량 행렬의 대각항으로 구성된 벡터의 크

기는 $n \times 1$ 이 된다. 이 벡터에서 각 요소의 자유도에 해당되는 성분을 추출하고, 내적을 수행하여 요소별 가중치를 계산하게 된다. 식 (6)은 요소별 가중치 계산식이다.

$$w_e^i = (\psi_i / \psi_{\max})^2, \psi_i = [K_{ii}^e / M_{ii}^e]^T [K_{ii}^e / M_{ii}^e] \quad (6)$$

가중치를 고려한 요소단위의 에너지 값은 (7)과 같다.

$$\Pi_e^i = \sum_{i=1}^k \lambda_e^i w_e^i \quad (7)$$

2) 2단계 축소시스템 구성

1단계에서 레일리 에너지 평가에 의해 선정된 요소는 주자유도 선정을 위한 후보 영역이다. 2단계에서는 순차적 소거법이 적용되어 최종 주자유도를 선택하게 된다. 일반적으로 순차적 소거법은 많은 시간 비용을 요구하지만, 여기에서는 1단계 축소과정을 거친 시스템에 적용되므로 많은 전산비용과 시간을 요구하지 않는다. Figure 4는 2단계에서 적용되는 순차적 소거법의 전체적인 알고리즘을 보여주고 있다.

Fig 4. 2단계 축소기법에서 순차적 소거법

4. 수치예제를 통한 제안 방법의 검증

수치 예제를 통해 제안된 방법을 검증한다. 검증을 위해 각 수치예제에서 고유치해석을 수행하였다.

1) 원뿔형 구조물

Fig. 5는 원뿔 형상의 구조물이다. 비행물체로 가정하여 구속 조건이 부과되지 않았다. 따라서, 리츠 벡터를 계산하기 위해 Pseudo Inverse를 사용하였다.

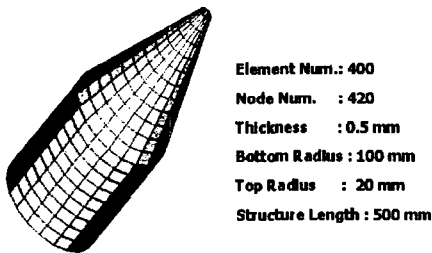


Fig. 5. 원뿔형 구조물 형상과 해석 조건

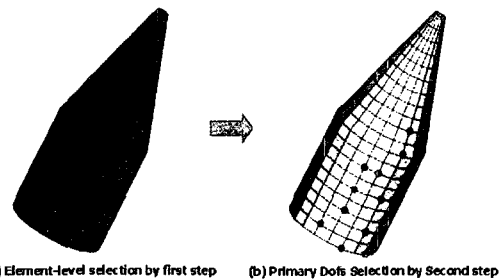


Fig 6. 2단계 축소기법에 의한 주자유도 선정결과

축소시스템을 구성하기 위해 주자유도 50개를 선정하였다. 이것은 전체 시스템의 1.5% 에 불과하다. 1단계 과정을 통한 후보영역과 최종적으로 선정된 주자유도가 Fig. 6에 주어졌다. Table 1은 전체시스템과의 고유

치 비교를 통한 검증결과를 보여주고 있다. 10개의 고유치를 비교하였고, 최대 오차값이 0.16%를 나타내고 있다. 이를 통해 제안된 방법의 신뢰성을 확인 할 수 있다.

Table 1. 원뿔형 구조물에서 전체시스템과 축소시스템의 고유치 결과 비교

모드	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
축소 시스템	24.1	24.1	156.0	156.0	543.1	543.1	1426.8	1427.0	2845.0	2847.7
전체 시스템	24.1	24.1	156.0	156.0	543.1	543.1	1426.8	1426.8	2842.9	2842.9
오차(%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	0.16

2) 샤프트 구조물

두 번째 예제는 샤프트 구조물이며, Fig. 7에 해석 조건이 주어져 있다.

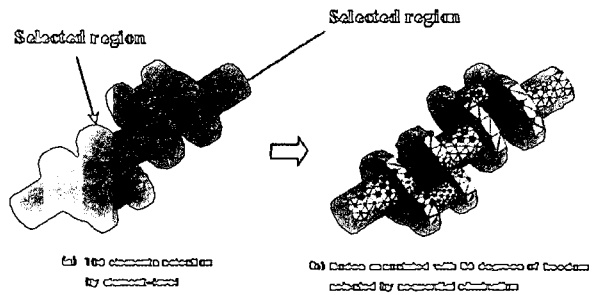
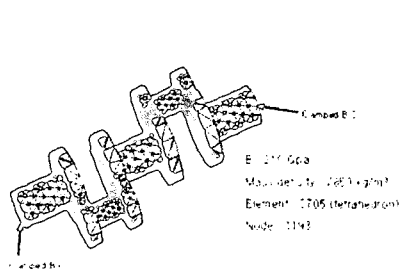


Fig. 7 샤프트 구조물 형상 및 해석 조건 Fig. 8 2단계 축소기법에 의한 주자유도 선정 결과

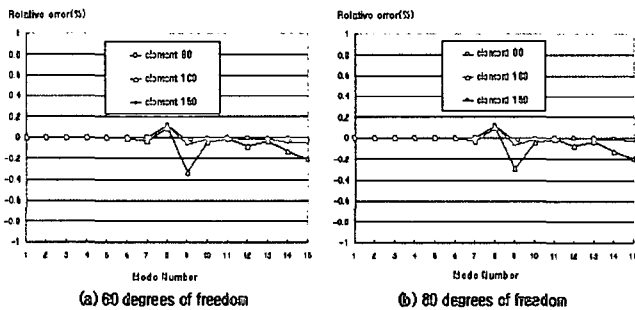


Fig 9. 2단계 축소기법에서 샤프트 구조물의 상대오차

4절점 사면체 요소를 사용하였으며, 양 끝단은 고정되어 있다. 축소 시스템을 구성하기 위해 60개와 80개의 주자유도가 선정되었고, 이것은 전체 시스템의 2% 정도이다. 선정결과는 Fig. 8에 주어져 있다. 각 주자유도 개수에 대해서 후보 영역의 요소개수에 따라 오차를 계산한 결과가 Fig. 9에 주어져 있다. 결과로부터 최대 오차가 0.4% 정도이며, 제안된 방법의 신뢰성을 확인 할 수 있다.

5. 축소시스템에서 시간 응답 해석

지금까지 2단계 축소기법에 의해 축소시스템을 구성하는 방법과 수치예제를 통해 그 신뢰성을 확인하였다. 적절히 구성된 축소 시스템은 시간이나 전산 자원을 절약할 수 있으며, 전체 시스템을 풀었을 때와 거의 상응하는 결과를 제공한다. 본 연구에서는 제안된 방법에 의해 구성된 축소 시스템에 대해 시간 적분을 수행한다. 특히, 임의의 하중하에서 주자유도 선정위치와 동적거동의 관계를 살펴본다.

Figure 10은 단순 지지된 평판 문제이다. 정현파 하중이 가해지고 있으며, 동하중 위치는 평판의 중앙점이

다. 전체 시스템과의 비교는 그림에서 표시된 두 지점(145,179)에서 수행되었다. 축소시스템을 구성하기 위해 주자유도는 40개가 선정되었으며, 주자유도 선정 결과는 Fig. 11에 주어졌다.

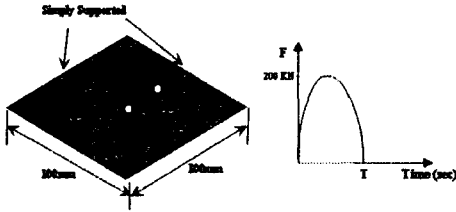


Fig. 10 정현파 하중하의 평판 해석 조건

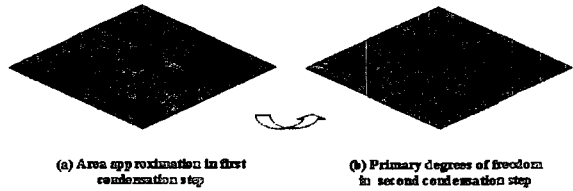


Fig.11 2단계 축소기법에 의한 주자유도 선정

1) 하중주기 6.82Hz(time step: 0.004s, 주자유도: 15)

첫 번째 경우에서 하중주기 6.82Hz 이고 시간 간격은 0.004초이며, 시간 범위는 0~4초까지 이다. 가해진 하중주기가 충격하중 정도로 짧지 않기 때문에 선정된 주자유도로 축소 시스템만으로도 구조물의 정확한 거동을 예측할 수 있다. Figure 12에 Fig. 10에서 주어진 두 지점에서의 거동 비교 결과가 주어져 있다.

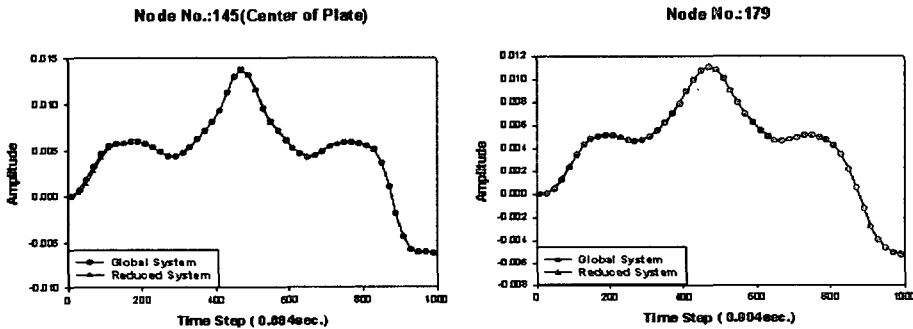


Fig. 12 절점 145와 179에서 전체시스템과 축소시스템의 거동 비교(하중주기 6.82 Hz)

2) 하중주기 34.1Hz(time step: 0.004s, 주자유도: 50)

Table 2 하중주기 34.1Hz 하에서 주자유도 선정을 위한 리츠벡터 평가 결과

모드	주파수	모드	주파수
26	24.65	36	34.77
27	25.77	37	35.24
28	27.24	38	35.63
29	28.25	39	37.10
30	28.44	40	37.17
31	31.82	41	37.14
32	31.97	42	37.20
33	32.52	43	39.52
34	32.58	44	40.90
35	33.67	45	40.09

하중 주파수가 34.1Hz로 커지는 경우, 앞에서 선정된 15개의 주자유도 만으로는 신뢰할 수 있는 거동을 얻을 수 없다. 그것은 주자유도의 개수에 따라 축소시스템이 포함할 수 있는 주파수 범위가 달라지기 때문이다. 본 연구에서는 축소시스템이 포함하는 주파수 범위를 리츠벡터의 계산에 의해 근사화한 후, 대략적인 주자유도 선정 개수를 예측하고 있다.

Table 2는 리츠벡터 계산에 의한 주파수 계산 결과이다. 결과로부터 34.1Hz의 하중주기를 구현하기 위해서는 축소시스템이 36번째 모드까지 정확히 포함해야만 한다. 따라서, 주자유도는 그보다 충분히 많은 개수로 선정되어야 하며, 여기에서는 50개의

주자유도를 선정하여 그 보다 적게 선정했을 때의 결과와 비교하였다.

Figure 13은 주자유도 15개일 경우와 50일 경우의 결과를 비교한 것이다. 절점 179에서는 15개의 주자유도 만으로도 큰 차이가 없는 거동을 보이고 있으나, 하중이 가해지는 위치인 절점 145에서는 15개로 구성된 축소시스템과 큰 차이를 보이고 있다.

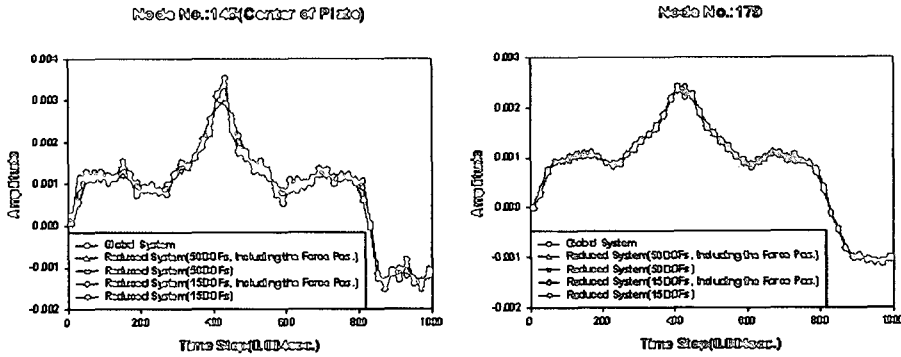


Fig 13. 절점 145와 179에서 전치시스템과 축소시스템의 거동 비교(하중주기 34.1 Hz)

3) 하중주기 157.1Hz(time step: 0.004s, 주자유도: 90)

Table 3 하중주기 157.1Hz 하에서 주자유도 선정을 위한 리츠벡터 평가 결과

모드	주파수	모드	주파수
76	86.37	86	153.29
77	90.08	87	156.12
78	97.10	88	162.83
79	97.52	89	171.93
80	100.14	90	187.08
81	108.60	91	207.65
82	115.65	92	234.42
83	119.23	93	264.00
84	124.41	94	297.57
85	133.70	95	316.91

주기가 짧은 하중이 가해지면 위의 현상이 더욱 심각하게 나타난다. 하중주기 157.1Hz의 충격하중일 경우, 구조물의 거동이 고차 모드의 영향을 심하게 받게 되고, 정확한 동적거동을 구하기 위해서는 고차모드의 영향력을 무시할 수 없게 된다.

리츠 벡터 평가 결과가 Table 3에 주어졌다. 결과에서 157.1Hz의 하중을 포함하기 위해서는 축소시스템이 최소 88번째 모드까지를 정확히 포함해야만 한다. 따라서, 그보다 충분히 많은 개수의 주자유도가 선정되어야만 한다. 그러나, 가해진 하중주기를 포함하기 위해서는 축소시스템이 지나치게 커지게 되므로, 이것은 축소시스템의 효율성을 감소시키는 것이다. 본 연구에서는 하중주기의 영향력이 가장 큰 지

점을 정하중 해석에 의해 선정하여 주자유도로 추가하는 방법을 택하였다.

결과적으로, 90개의 주자유도와 9개의 하중위치를 주자유도로 선정하여 시간 응답을 비교하였다. 그 결과는 Fig. 14에 주어졌다.

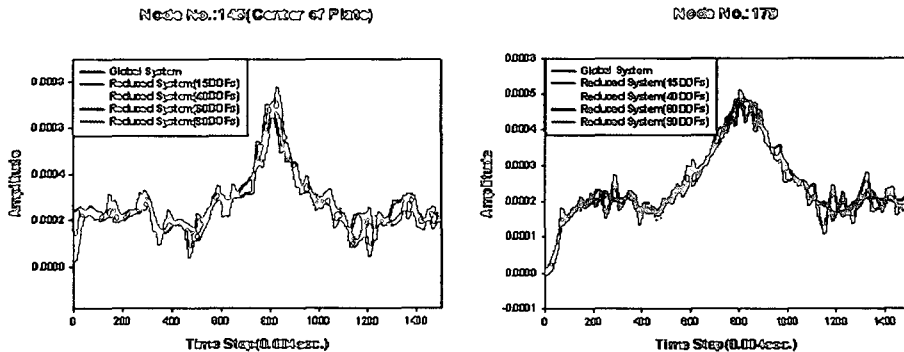


Fig 14. 절점 145와 179에서 전치시스템과 축소시스템의 거동 비교(하중주기 157.1 Hz)

Fig.14의 결과로부터 고주파의 영향이 커짐에 따라 축소시스템의 구성을 위한 주자유도 개수 증가는 필수적이며, 지나치게 커지는 축소시스템의 크기는 하중 주기의 영향력이 큰 지점을 적절히 선정하여 주자유도로 추가함으로써 효율성과 함께 동적 거동의 신뢰성을 보장할 수 있음을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 효율적이고 신뢰성 높은 2단계 축소기법을 사용하여 최종적인 축소시스템을 구성하였다. 2단계 축소법은 요소단위의 레일리 에너지 평가를 위해 후보영역을 선정하는 첫 번째 단계와, 순차적 소거법에 의해 최종적인 주자유도를 선정하는 두 번째 단계로 나뉘어 진다. 일반적으로 순차적 소거법의 문제점은 많은 계산 비용과 전산자원을 요구하는 것이지만, 2단계 축소기법에서는 1단계 축소과정을 거친 축소시스템에 순차적 소거법이 적용되므로, 많은 계산시간과 전산 자원을 필요로 하지 않는다. 적절하게 구성된 축소시스템은 동적해석이나 반복 계산이 요구되는 해석에서 시간 절감과 전산자원 절약의 효과가 매우 확연하다. 축소시스템은 고유치문제 뿐만 아니라, 최적화문제나 구조물의 동적 거동을 계산하는 데에도 매우 유용하다.

구조물의 시간응답은 많은 계산 시간을 요구하고, 전산자원의 충분한 확보가 필요하다. 본 연구에서는 이 문제의 개선을 위해 축소시스템을 통해서 시간응답을 계산하는 방법을 제안하였다. 그러나, 축소시스템은 주자유도 선정에 따라 포함할 수 있는 주파수 범위 제한이 있으므로 작용하는 하중 형태와 주파수에 따라서 그 신뢰성을 확보해야만 한다.

본 연구에서는 입력 하중 주파수가 다양하게 변화할 때, 그에 따른 주자유도 선정 위치와 고려되어야 할 사항에 대해서 살펴봄으로써, 축소시스템에서 주자유도 선정 개수와 그 위치에 대한 판별 기준을 제안하였다. 그리고, 제안된 방법으로 각각의 수치 예제에서 신뢰할 수 있는 시간응답 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

본 연구는 적용 범위 확장과 효율성 증대를 위해서 대형 구조물에서 영역 분할 문제와 연동시키는 문제로 확장하고, 축소모델(Reduced Order Model)과의 연계를 통한 공력/구조 연계 문제로 적용될 계획이다.

참고 문헌

- [1] Guyan, 1978, "Reduction of stiffness and mass matrices," AIAA Journal, Vol.3, p.380
- [2] O'Callahan, J., 1989, "A procedure for an improved reduced system(IRS) model" Proceedings of the 7th international modal analysis conference, Union college, Schenectady, NY. pp. 17-21
- [3] Zhang, D.W., Li, S., 1995, "Succession-level approximate reduction(SAR) technique for structural dynamic model," Analysis conference(Nashville,TN), Union college press, Schenectady, NY, pp.435-441.
- [4] Andrew, Leung.Y.T., 1978, "An accurate method of dynamic condensation in structural analysis," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.12, pp.1705-1715
- [5] H.Kim, M.Cho, 2004, "Two-level scheme for selection of degrees of freedom by energy estimation combined with sequential elimination," International Journal of Solids and Structures, Submitted.
- [6] Shah, V.N., Raymund, M., 1982, "Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem," *Int.J.Numer,Mech.Engng.*, Vol.18, pp.89-98
- [7] Kim, K.O., Y.J.Choi, 2000, "Energy method for selection of degrees of freedom in condensation," AIAA Journal, Vol.38, pp.1253-1259
- [8] M.Cho, H.Kim, 2004, "Element-based node selection method for reduction of eigenvalue problems," AIAA Journal, Vol.42, No.8, pp. 1677-1684
- [9] H,Kim, M.Cho, 2004, "Construction of reduced system by two-level scheme and refined semi-analytic sensitivity analysis based on the reduced system," Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/ASC 45th Structures, Structural Dynamcis and Materical Conf., Palmspring, CA, AIAA-2003-17317
- [10] H.Kim, M.Cho, 2004, "Two-level scheme for selection of degrees of freedom by energy estimation combined with sequential elimination," Proceedings of 24th Congress of the international Council of the Aeronautical Sciences(ICAS 2004), YOKOHAMA, JAPAN