

다중 층간 분리부가 내재된 복합재 셸  
고차 지그재그 모델의 유한요소 해석

A Finite Element Analysis based on Higher-Order Zig-Zag Shell  
Theory for Laminated Composites with Multiple Delamination

오진호\*            조맹효†  
Jinho Oh            Maenghyo Cho

---

ABSTRACT

A new three-node triangular shell element based on higher order zig-zag theory is developed for laminated composite shells with multiple delaminations. The present higher order zig-zag shell theory is described in a general curvilinear coordinate system and in general tensor notation. All the complicated curvatures of surface including twisting curvatures can be described in an exact manner in the present shell element because this element is based on geometrically exact surface representation. The displacement field of the proposed finite element includes slope of deflection, which requires continuity between element interfaces. Thus the nonconforming shape function of Specht's three-node triangular plate bending element is employed to interpolate out-of-plane displacement. The present element passes the bending and twisting patch tests in flat surface configurations. The developed element is evaluated through the buckling problems of composite cylindrical shells with multiple delaminations. Through the numerical examples it is demonstrated that the proposed shell element is efficient because it has minimal degrees of freedom per node. The accuracy of the present element is demonstrated in the prediction of buckling loads and buckling modes of shells with multiple delaminations. The present shell element should serve as a powerful tool in the prediction of buckling loads and modes of multi-layered thick laminated shell structures with arbitrary-shaped multiple delaminations.

---

1. 서론

고강도와 강성을 요구하는 항공기, 잠수함, 자동차등의 발전으로 인해, 복합재료 구조물에 대한 해석, 설계, 제작 등이 중요한 문제가 되었다. 특히, 이러한 구조물은 곡률을 가지는 셸로 구성되기 때문에, 셸 복합재 구조물의 정확한 해석은 매우 중요하다고 할 수 있다. 현재 셸 복합재 구조물의 해석에 대한 많은 연구가 보고 되고 있다[1,2]. 확장된 셸 복합재료 해석 기법으로 세가지 형태의 고차 이론이 개발 되었다. 그러나, 첫 번째로, 제안된 근사단층 이론[3,4]은 복합재 구조물의

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원생  
† 서울대학교 기계항공공학부 부교수

두께방향으로 횡전단응력 연속조건을 만족하지 못하기 때문에 이 이론에 기초하여 정확한 해석을 할 수가 없다. 두 번째로, 두께방향으로 층마다 자유도를 부과하는 층별 이론[5]이 있다. 이 이론은 자유도가 층의 수에 의존하기 때문에, 계산량이 너무 많아지는 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위한 방법으로 전체/국소 지그재그 방법[6-8]이 제안 되었다. 마지막으로 단순화된 지그재그 이론[9-11]이 있다.

세 가지 해석방법 중 단순화된 지그재그 이론은 정확성과 효율성으로 인해 가장 주목을 받고 있는 이론이다. 변위와 횡전단 응력연속조건을 층 경계면 마다 만족하고 또한, 변위장을 모사하기 위해 층의 수와 상관없이 5개 변수만 필요하게 된다. 그 결과, 지그재그 이론은 계산상에서 많은 장점을 갖게 된다.

그러나, 층간 분리가 내재된 판 과 셸 구조물에는 열림과 미끄러짐 변형이 발생하기 때문에, 위의 이론을 적용할 경우 해석방법은 더욱 복잡해진다. 다중 층간분리부가 내재된 복합재 보[12], 판 [13], 셸[14]을 해석하기 위한 방법이 최근 개발 되어왔다. 지금까지 층간분리부가 내재된 복합재 셸에 적용된 지그재그 이론은 두께가 얇다는 가정하의 두 방향 곡선 셸이론[15]이 적용되었다. 두께가 얇다는 가정 없이 층간 분리가 내재된 기하학적으로 정확한 셸 이론이 Kim 과 Cho에 의해 개발 되었다[14]. 본 연구에서는, 층간분리가 내재된 복합재 구조물 해석이론을 유한요소로 확장하여 임의의 하중과 경계조건에서도 해석이 가능하도록 하였다. 일반 텐서표현을 사용함으로써, 임의의 곡면인 경우에도 해석 가능하도록 하였다.

현재 이론의 타당성을 검토하기 위해, 층간분리가 내재된 실린더의 좌굴문제를 해석 하였고, 현재 이론에 기초를 둔 유한요소 결과를 이전에 발표된 준 해석적 기법의 결과와 비교 하였다. 제안된 변위장은 층간분리의 수, 모양, 크기, 위치가 변하더라도 합리적인 해석결과를 도출 할 수 있다. 결국, 현재 제안된 지그재그 이론에 기초를 둔 유한 요소 해석 기법은 다중 층간분리가 내재된 셸 구조물을 해석할 때, 최소한의 자유도만으로 정확한 해석이 가능함을 확인 할 수 있다.

## 2. 변위장 모델

층간분리가 내재된 복합재 셸을 모델하기 위해서, 변위장은 다음과 같이 가정 된다.

$$U_\alpha(x^1) = u_\alpha + \psi_\alpha x^3 + \xi_\alpha (x^3)^2 + \phi_\alpha (x^3)^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)} (x^3 - x_{(k)}^3) H(x^3 - x_{(k)}^3) + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_\alpha^{(k)} H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (1)$$

$$U_3(x^1) = u_3 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_3^{(k)} H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (2)$$

여기서,  $u_i$  는 기준면에서 정의된 변위이고,  $\psi_\alpha$  는 기준면에 수직은 축으로부터 시작된 회전각도이다.  $N$  은 층의 수이고,  $H(x^3 - x_{(k)}^3)$  는 단위계단 함수이다.  $S_\alpha^{(k)}$  는 각 층 사이의 횡전단 각도의 변화량이다.  $\bar{u}_i^{(k)}$  는 층간분리부에서 미끄러짐과 열림 변위를 나타낸다.

일반 좌표계에서의 그린 변형을 텐서는 다음과 같다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (V_{ij} + V_{ji} + V_{ii}^* V_{kk}^*) \quad (3)$$

본 칼만 비선형을 고려함으로써, 셸의 변형을 성분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha} + V_{3|\alpha}V_{3|\beta} + V_{3|\alpha}V_{3|\beta}^0 + V_{3|\alpha}^0V_{3|\beta})$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(V_{\alpha|3} + V_{3|\alpha}), \quad e_{33} = V_{33} \quad (4)$$

벡터  $\vec{a}$ 에 대한 쉘의 공변 횡전단 변형을 성분은 다음과 같다.

$$2e_{\alpha 3} = U_{\alpha,3} + U_{3|\alpha} + b_\alpha^\beta(U_\beta - x^3 U_{\beta,3}) \quad (5)$$

쉘의 2차 피올라 키르히호프 응력성분들은 다음과 같이 얻어 질 수 있다.

$$\sigma^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\lambda\nu} e_{\lambda\nu}, \quad \sigma^{\alpha 3} = 2E^{\alpha 3\lambda 3} e_{\lambda 3} \quad (6)$$

여기서,  $E^{ijkl}$ 은 탄성 텐서 성분들이고,  $H^{\alpha\beta\lambda\nu} = E^{\alpha\beta\lambda\nu} - E^{\alpha\beta 33} E^{\lambda\nu 33} / E^{3333}$ 로 정의 된다.

식(1)과 (2)를 식(4)에 대입함으로써, 아래와 같이 횡전단 변형을 성분을 변위 표현으로 나타낼 수 있다.

$$2e_{\alpha 3} = \psi_\alpha + u_{3|\alpha} + b_\alpha^\beta u_\beta + \{2x^3 \delta_\alpha^\beta - (x^3)^2 b_\alpha^\beta\} \xi_\beta + \{3(x^3)^2 \delta_\alpha^\beta - 2(x^3)^3 b_\alpha^\beta\} \phi_\beta$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \{(\delta_\alpha^\beta - x_{(k)}^3 b_\alpha^\beta) S_\beta^{(k)} + \bar{u}_{3|\alpha}^{(k)} + b_\alpha^\beta \bar{u}_\beta^{(k)}\} H(x^3 - x_{(k)}^3)$$

$$= \psi_\alpha + u_{3|\alpha} + b_\alpha^\beta u_\beta + 2(x^3)(\mu_1)_\alpha^\beta \xi_\beta + 3(x^3)^2 (\mu_2)_\alpha^\beta \phi_\beta + \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\alpha^\beta T_\beta^{(k)} H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (7)$$

여기서,

$$(\mu_1)_\alpha^\beta = (\delta_\alpha^\beta - \frac{1}{2} x^3 b_\alpha^\beta),$$

$$(\mu_2)_\alpha^\beta = (\delta_\alpha^\beta - \frac{2}{3} x^3 b_\alpha^\beta),$$

$$(\mu_{(k)})_\alpha^\beta = (\delta_\alpha^\beta - \frac{1}{2} x_{(k)}^3 b_\alpha^\beta) \quad (8)$$

$$T_\beta^{(k)} = S_\beta^{(k)} + (\mu_{(k)}^{-1})_\beta^\alpha \bar{u}_{3,\alpha}^{(k)} + (\mu_{(k)}^{-1})_\beta^\alpha b_\alpha^\gamma \bar{u}_\gamma^{(k)}$$

초기에 모든 경계층 사이가 층간 분리 되어있다고 가정하자. 그러면, 층간 분리 수와 전체 쉘 구조물의 층 경계면 수가 일치하게 된다. 결국, 층간 분리가 되지 않은 경계면은  $\bar{u}_i^{(k)}$  값을 0로 만들고 층간 분리가 내재된 경계면에서는  $\bar{u}_i^{(k)}$  자유도를 추가하여, 시뮬레이션 할 수 있다. 윗면과 아랫면의 횡 전단 구속조건  $e_{\alpha 3}|_{x^3=0,h} = 0$  을 부과 하면, 다음과 같다.

$$e_{\alpha 3}|_{x^3=0} = \psi_\alpha + u_{3|\alpha} + b_\alpha^\beta u_\beta = 0 \quad (9)$$

$$e_{\alpha 3}|_{x^3=h} = 2h(\hat{\mu}_1)_\alpha^\beta \xi_\beta + 3h^2(\hat{\mu}_2)_\alpha^\beta \phi_\beta + \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\alpha^\beta T_\beta^{(k)} = 0 \quad (10)$$

식(9), (10) 으로부터, 횡 전단 변형률은 다음과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$2e_{\alpha 3} = d_\alpha^\gamma \phi_\gamma + \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\alpha^\gamma T_\gamma^{(k)} \{ \delta_\alpha^\beta H(x^3 - x_{(k)}^3) - c_\alpha^\beta \frac{x^3}{h} \} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_\alpha^\gamma &= 3(x^3)^2(\mu_2)_\alpha^\gamma - 3h(x^3)(\mu_1)_\alpha^\beta(\bar{\mu}_1^{-1})_\beta^\lambda(\bar{\mu}_2)_\lambda^\gamma, \\ c_\alpha^\lambda &= (\mu_1)_\alpha^\beta(\bar{\mu}_1^{-1})_\beta^\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

현재이론에서는 층간 분리 경계면에서의 제로 횡 전단 응력은 응력연속 조건을 만족하기 때문에, 층 사이의 모든 경계면에서 횡 전단 응력 연속조건이 만족된다. 이러한, 연속조건을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$${}^{(k)}\sigma^{\sigma 3} \Big|_{x^3=x_{(k)}^3} = {}^{(k+1)}\sigma^{\sigma 3} \Big|_{x^3=x_{(k)}^3}, \quad (k=1,2,\dots,N-1) \quad (13)$$

식(6) 과 (11)로부터,  $2(N-1)$  개의 대수 방정식을 얻을 수 있다. 대수 방정식과 식(8)로부터 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$T_\gamma^{(k)} = (a^{(k)})_\gamma^\omega \phi_\omega \quad (14)$$

$$S_\gamma^{(k)} = (a^{(k)})_\gamma^\omega \phi_\omega - \{(\mu_{(k)}^{-1})_\gamma^\omega \bar{u}_{3,\omega}^{(k)} + (\mu_{(k)}^{-1})_\gamma^\lambda b_\lambda^\omega \bar{u}_\omega^{(k)}\} \quad (15)$$

결국, 식(9), (10) 식(14), (15) 를 식(1), (2) 에 대입하면, 아래와 같은 변위장을 얻을 수 있다.

$$U_\alpha = \mu_\alpha^\beta u_\beta - u_{3|\alpha} x^3 + f_\alpha^\beta \phi_\beta + \sum_{k=1}^{N-1} (g_{(k)})_\alpha^\beta \bar{u}_{3|\beta}^{(k)} + \sum_{k=1}^{N-1} (h_{(k)})_\alpha^\beta \bar{u}_\beta^{(k)} \quad (16)$$

$$U_3 = u_3 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_3^{(k)} H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f_\alpha^\beta &= \delta_\alpha^\beta (x^3)^3 - \frac{3h}{2} (x^3)^2 (\bar{\mu}_1^{-1})_\alpha^\gamma (\bar{\mu}_2)_\gamma^\beta - \frac{1}{2h} (x^3)^2 (\bar{\mu}_1^{-1})_\alpha^\lambda \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\lambda^\gamma (a^{(k)})_\gamma^\beta \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} (a^{(k)})_\alpha^\beta (x^3 - x_{(k)}^3) H(x^3 - x_{(k)}^3) \end{aligned} \quad (18)$$

$$(g_{(k)})_\alpha^\beta = -(\mu_{(k)}^{-1})_\alpha^\beta (x^3 - x_{(k)}^3) H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (19)$$

$$(h_{(k)})_\alpha^\beta = \{\delta_\alpha^\beta - (\mu_{(k)}^{-1})_\alpha^\lambda b_\lambda^\beta\} (x^3 - x_{(k)}^3) \quad (20)$$

얇은 쉘 가정은 아래와 같다.

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \quad \mu \rightarrow 1 \quad (21)$$

위 가정이 식(16)과 (17)에 적용되어 지면, 아래와 같은 변위장이 얻어 진다.

$$\begin{aligned} U_\alpha &= (\delta_\alpha^\beta - \underline{b_\alpha^\beta x^3}) u_\beta - u_{3,\alpha} x^3 - \Lambda_\alpha^\beta \phi_\beta (x^3)^2 + \phi_\alpha (x^3)^3 + \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \{ (a^{(k)})_\alpha^\beta \phi_\beta - \bar{u}_{3,\alpha}^{(k)} \} (x^3 - x_{(k)}^3) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}_\beta^{(k)} \{ \delta_\alpha^\beta - \underline{b_\alpha^\beta (x^3 - x_{(k)}^3)} \} \right] H(x^3 - x_{(k)}^3) \end{aligned} \quad (22)$$

$$U_3 = u_3 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_3^{(k)} H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (23)$$

여기서,

$$\Lambda_\alpha^\beta = \frac{3h}{2} \delta_\alpha^\beta + \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{N-1} (a^{(k)})_\alpha^\beta \quad (24)$$

밑줄 친 부분을 제외하면 곡률이 없는 평판의 변위장이 된다.

### 3. 유한요소 모델

층간분리의 모양과 위치에 따라 임의의 하중과 경계조건을 부과하기 위해서는 유한요소법의 개발이 필요하다. 유한요소 모델의 타당성을 검증하기 위해, 띠 모양 층간분리를 갖는 실린더 쉘의 좌굴 문제를 수행하였다. 실린더 쉘에서 면내 양 텐서, 크리스토펠 심볼, 곡률 텐서는 아래와 같이 나타내 진다.

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^v = 0, \quad [b_{\alpha\beta}] = [b_{\beta}^{\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad (25)$$

현재 다중 층간분리가 내재된 쉘이론은 횡 방향변위  $w$ 의 2번 미분이 요구되어 진다. 그 결과,  $C^1$  (기울기 연속)함수가 사용되어야 한다. 그러나, 일반적으로 임의의 삼각 또는 사각요소 경계에서 연속성을 부과하기가 어렵다. 이러한 문제점을 극복하기 위해서 굽힘 패치 시험을 통과하는 비적합 specht[16] 요소를 적용하였다. 이 요소는 절점에서는  $C^1$  조건을 만족하지만, 요소끼리 접하는 interface에서는 만족하지 못한다. 또한, Specht의 삼각형 요소는 임의의 경계조건을 적용 할 때도 유용하다.

유한요소 정식화에서는 파라메트릭 좌표계  $x_1$  과  $x_2$  를 사용한다. 노드 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\{a\} = \{u_1, u_2, u_3, u_{3,1}, u_{3,2}, \phi_1, \phi_2, \bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3, \bar{u}_{3,1}^k, \bar{u}_{3,2}^k\} \quad (26)$$

면적 좌표계로,  $L_1$ ,  $L_2$ , 와  $L_3$  가 내삽함수로 사용되어진다.

전체 포텐셜 에너지는 굽힘(멤브레인 포함)에너지와 횡 전단 변형에너지로 나눌 수 있다. 굽힘 에너지와 횡방향 전단 에너지식은 아래와 같이 주어진다.

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_0^h \{e\}^T [Q_{mb}]^{(k)} \{e\} dz dA^e = \int_{A^e} \{e\}^T [A_{mb}] \{e\} dA^e \quad (27)$$

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \int_0^h \{\gamma\}^T [Q_s]^{(k)} \{\gamma\} dz dA^e = \int_{A^e} \{\gamma\}^T [A_s] \{\gamma\} dA^e \quad (28)$$

여기서,  $[A_{mb}]$ 과  $[A_s]$  은 멤브레인 굽힘 강성 행렬과 횡 전단 강성 행렬을 두께방향으로 적분한 행렬이다. 주 변위장은 아래와 같은 형상함수와 절점 미지수로 표현된다.

$$u_1 = \sum_{i=1}^3 L_i u_{1i}^o \quad u_2 = \sum_{i=1}^3 L_i u_{2i}^o \quad u_3 = \sum_{i=1}^3 \{u_{3i} N_i + u_{3,1i} N_{xi} + u_{3,2i} N_{yi}\} \quad (29)$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^3 L_i \phi_{1i} \quad \phi_2 = \sum_{i=1}^3 L_i \phi_{2i} \quad (30)$$

$$\bar{u}_1^k = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{u}_{1i}^{ko} \quad \bar{u}_2^k = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{u}_{2i}^{ko} \quad \bar{u}_3^k = \sum_{i=1}^3 \{\bar{u}_{3i}^k N_i + \bar{u}_{3,1i}^k N_{xi} + \bar{u}_{3,2i}^k N_{yi}\} \quad (31)$$

여기서, 형상함수  $N_i$ ,  $N_{xi}$ , 와  $N_{yi}$  는 Specht[16]로부터 얻어진다.

체적력을 무시한 가상일의 원리는 다음과 같이 주어진다.

$$\int_V (\sigma^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \delta e_{\alpha 3}) dv - \int_A N^{(0)\alpha\beta} U_{3,\alpha} \delta U_{3,\beta} dA = 0 \quad (32)$$

식 (29)-(31)을 식 (32)에 대입함으로써, 아래와 같은 고유치 해석 식을 얻을 수 있다.

$$([K] - \lambda[S])\{u\} = \{0\} \quad (33)$$

여기서,

$$[K] = \sum_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} ([B]_b^T [A_b] [B_b] + [B]_s^T [A_s] [B_s]) J d\xi d\eta \quad (34)$$

$$[S] = \sum_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} [B]_s^T \begin{bmatrix} n_{\alpha\beta} & n'_{\alpha\beta} \\ n'_{\alpha\beta} & n''_{\alpha\beta} \end{bmatrix} J d\xi d\eta \quad (35)$$

여기서,  $\lambda$  와  $\{u\}$ 는 각각 좌굴 하중과 좌굴 하중에 따르는 좌굴 모드를 나타낸다.

#### 4. 수치예

고차 지그재그 셸이론에 기초를 둔 삼각형 셸 요소의 정확성을 조사하기 위해서, 띠 모양의 층간분리를 갖는 실린더 셸의 좌굴 하중을 구하여, 준 해석적 방법과 비교 하였다. 이러한 비교는 현재 셸 요소의 타당성을 보여준다.

메쉬 형상은 Fig. 1에서 보여 진다. 실린더 셸의 양단 고정 경계조건이 부과 된다. 양단 고정 경계조건은 아래와 같다.

$x = 0, L$

$$u_\alpha = 0, u_3 = 0, u_{3,\alpha} = 0, \phi_\alpha = 0, \bar{u}_\alpha^t = 0, \bar{u}_3^t = 0, \bar{u}_{3,\alpha}^t = 0 \quad (36)$$

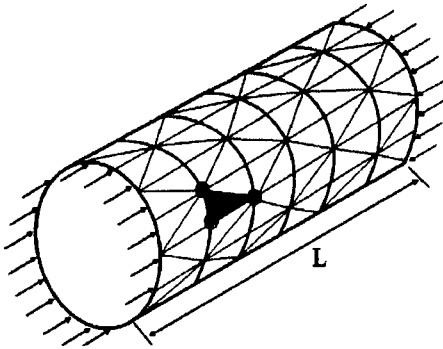


Fig.1 Triangular mesh configuration of cylindrical shells model

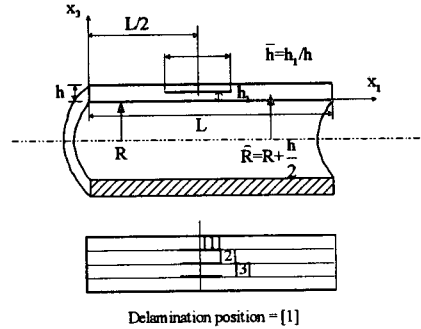


Fig.2 Configuration of finite element model for the number of delaminations and their delamination thickness

#### 4.1 층간분리를 갖는 등방성 셸

등방성 셸 모델의 형상은  $L/\hat{R} = 5, \hat{R}/h = 30$  이다. 여기서,  $L$ 은 셸의 축방향 길이이고,  $\hat{R}$ 은  $R + h/2$  (Fig. 2) 이다. 재료 상수는 아래와 같이 주어진다.

$$E_1 = 1 \times 10^6 \text{ psi}, E_2 = E_1, \nu_{12} = 0.25, G_{12} = E_1 / (2(1 + \nu)), G_{23} = G_{12}, G_{31} = G_{12} \quad (37)$$

Fig. 3 은 현재 유한요소와 고전 셸 유한요소 사이의 좌굴 하중을 여러 가지 층간 분리부 크기에 따라 도시 하였다. 그 결과, 현재 셸 요소가 준 해석적 방법과 고전 셸 이론의 결과들과 매우

잘 일치함을 알 수 있었다. 또한, 좌굴 하중을 두께방향으로 층간 분리부의 위치에 따라 도시 하였다. 특히, 쉘의 중앙 부분에 층간 분리를 갖는 경우가 가장 큰 좌굴 하중을 갖는다는 사실도 알 수 있다.

#### 4.2 층간분리를 갖는 복합재 쉘 [0/90/90/0]

수치에 3.1 과 같은 형상이 사용되어 진다. 복합재 쉘의 재료 상수는 아래와 같다.

$$E_2 = 1 \times 10^6 \text{ psi}, E_1 = 25E_2, \nu_{12} = 0.25, G_{12} = 0.5E_2, G_{23} = 0.4E_2, G_{31} = G_{12}, \nu_{23} = 0.25, \nu_{13} = 0.25 \quad (38)$$

Fig. 4에서는 현재 쉘 요소의 좌굴 하중과 준 해석적 방법의 결과를 비교하였다. 그리고, 이중 슬래쉬(//) 은 층간 분리부의 위치를 나타낸다. Fig. 5는 띠 모양의 층간 분리부 크기를 변화함에 따라 여러 가지 좌굴 모드 형상이 나타남을 보여준다.

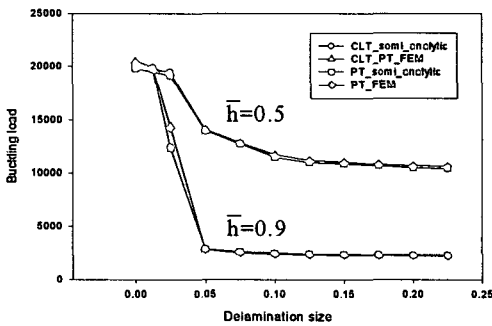


Fig.3 Buckling load with varying delamination size for isotropic shell

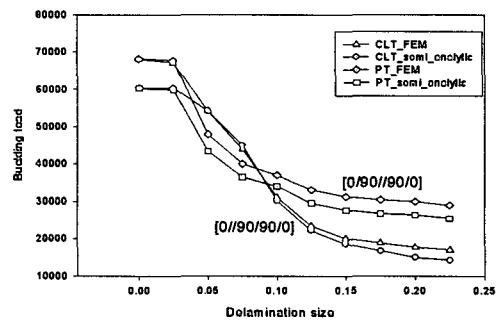


Fig.4 Buckling load with varying delamination size for composite [0/90/90/0] shell

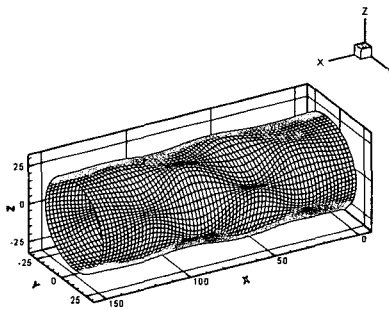


Fig.5(a) Buckling mode of composite cylindrical shell [0/90/90/0] without delamination

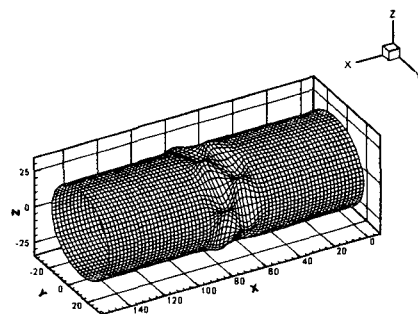


Fig.5(b) Buckling mode of composite cylindrical shell [0/90/90/0] with 22% delamination zone of the whole cylinder

## 5. 결론

층간 분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물에 적용할 수 있는 고차 지그재그 쉘이론에 기초를 둔 3절점 유한요소를 개발 하였다.

쉘의 윗면과 아랫면에 횡 전단 제로 구속 조건과, 층 사이에 횡 전단 응력 연속 조건을 부과함

으로써, 층에 의존하는 변수가 제거 되어 진다. 즉, 층간 분리가 없는 부분의 변위장은 기준면에서 정의된 주 변수만을 가지게 되고, 층간분리부가 내재된 경계층에서만 자유도 수가 증가하게 된다. 결국, 최소한의 자유도의 수만으로 층간분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물의 해석이 가능하게 되었다. 또한, 굽힘 패치 테스트를 통과하는 비직합  $C^1$  삼각형 요소를 통해, 임의의 형상을 가진 층간분리부 문제도 해석이 가능하게 되었다.

유한요소의 타당성과 효율성을 검증하기 위해서, 실린더의 경우의 선형 좌굴 해석을 수행하였다. 현재 유한요소 결과는 이전에 보고된 준 해석적 방법과 비교하여 잘 일치함을 알 수 있었다. 그러므로, 본 연구에서 개발된 유한요소 법을 통해 층간 분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물의 좌굴 거동을 예측할 수 있는 강력한 도구로 사용 될 수 있다고 사료된다.

## 참고 문헌

1. Noor, A.K., Burton, W.S., 1990, "Assessment of computational models for multilayered composite plates and shells." *Applied Mechanics Reviews*, Vol.45, No.4, pp.67-97.
2. Reddy, J.N., Robbins, Jr., D.H., 1994, "Theories and Computational models for composite laminates." *Applied Mechanics Reviews*, Vol.47, No.1, pp.147-169.
3. Whitney, J.M., Sun, C.T., 1974, "A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells." *J. Appl. Mech.*, Vol.41, pp.471-476.
4. Reddy, J.N., Liu, C.F., 1985, "A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells." *Int. J. Engng Sci.*, Vol.23, No.3, pp.319-330.
5. Barbero, E.J., Reddy, J.N., 1990, "General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells." *AIAA J.*, Vol.28, No.3, pp.544-553.
6. Cho, M., Kim, J. S., 1997, "Bifurcation buckling analysis of delaminated composites using global-local approach." *AIAA J.*, Vol.35, No.10, pp.1673-1676.
7. Kim, J.S., Cho, M., 1999, "Postbuckling of delaminated composites under compressive loads using global-local approach." *AIAA J.*, Vol.37, No.6, pp.774-778.
8. Cho, M., Lee, S.G., 1998, "Global/local analysis of laminated composites with multiple delaminations of various shapes." *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/ASC 39th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Long Beach, CA, AIAA, Reston, VA, pp. 76-86.
9. Di Sciuva, M., 1987, "An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates." *J. Appl. Mech.*, Vol.54, Sep., pp.589-596.
10. He, L.-H., 1994, "A linear theory of laminated shells accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at layer interfaces." *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, No.5, pp.613-627.
11. Ossadzow, C., Touratier, M., and Muller, P., 1999, "Deep doubly curved multilayered shell theory." *AIAA J.*, Vol.37, No.1, pp.100-109.
12. Cho, M., Kim, J.S., 2001, "Higher order zig-zag theory of laminated composites with multiple delaminations." *J. of Appl. Mech.*, Vol.68, No.6, pp.869-877.
13. Kim, J.S., Cho, M., 2002, "Buckling analysis for delaminated composites using plate bending elements based on higher-order zig-zag theory." *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol.55, No.11, pp.1323-1343.
14. Kim, J.S., Cho, M., 2003, "Efficient higher order shell theory for laminated composites with multiple delaminations." *AIAA J.*, Vol.41, No.5, pp.941-950.
15. Gu, H., Chattopadhyay, A., 1996, "Delamination buckling and postbuckling of composite cylindrical shells." *AIAA J.*, Vol.34, No.6, pp.1279-1286.
16. Specht, B., 1988, "Modified shape functions for the three-node plate bending element passing the patch test," *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, Vol.26, pp.705-715.