

## 비선형 열탄성 연성 구조물에 대한 위상 최적설계

### Topology Design Optimization of Nonlinear Thermoelasticity Problems

문 세 준\*  
Moon, Sejoon

하 윤 도\*  
Ha, Yoondo

조 선 호\*\*  
Cho, Seonho

#### ABSTRACT

Using an efficient adjoint variable method, we develop a unified design sensitivity analysis (DSA) method considering both steady state nonlinear heat conduction and geometrical nonlinear elasticity problems. Design sensitivity expressions with respect to thermal conductivity and Young's modulus are derived. Beside the temperature and displacement adjoint equations, another coupled one is defined regarding the obtained adjoint displacement field as the adjoint load in temperature field. The developed DSA method is shown to be very efficient and further extended to a topology design optimization method for the nonlinear weakly coupled thermo-elasticity problems using a density approach.

#### 1. 서 론

위상 최적설계의 목적은 구조물에서 요구되는 성능에 대하여 적절한 레이아웃을 결정하는 것이다. Bendsøe와 Kikuchi[1]의 균질화 방법(Homogenization Method)을 이용한 위상 최적설계 이후에 수많은 위상 최적 설계가 선형과 비선형 구조물에 대해서 발전되어 왔다[2]. 최근 정규 재료 밀도 함수를 이용한 밀도 방법(density method)이 균질화 방법에 비해 다루기가 쉽기 때문에 널리 쓰이고 있다. 연속체 기반의 설계 민감도해석은, 변분 방정식을 1차 변분을 취해서 얻을 수 있다. 다양한 설계민감도해석 방법 중에서, 어드조인트 방법[3]이 가장 효율적이고, 정확하기 때문에 위상최적설계에서 많이 이용되고 있다. 본 연구에서는 정상상태에서의 비선형 열해석 및 기하학적 비선형 열탄성 연성 문제에 대해 다룰 것이다. 2 장에서는 정상 상태 비선형 열탄성 연성 문제에 대한 지배 방정식과 약형식(Weak Formulation)을 유도 하였고, 3 장에서는 연속체 기반으로 한 직접 미분법(Direct Differentiation Method)과 어드조인트 법(Adjoint Variable Method)을 사용한 설계민감도를 유도하였다. 4 장에서는, 열전도 문제에 대해 3 장에서 유도한 설계 민감도를 사용하여 위상 최적 설계에 대한 식을 유도하였다. 마지막으로 5 장에서는 몇 가지 수치적 예제를 통하여 해석적인 설계 민감도를 유한 차분법과 비교함으로써 정확성을 보이고, 유도된 어드조인트 법이 계산시간 측면에서 매우 효율적임을 보였다. 그리고, 위상 최적화에 관한 예제를 통하여 얻은 결과가 물리적인 관점에서 매우 타당함을 확인하였다.

\*학생회원, 서울대학교 조선해양공학과 석사과정

\*\*정회원, 서울대학교 조선해양공학과 교수

## 2. 비선형 열탄성 연성 문제의 지배방정식 및 변분식

그림 1과 같은 3차원 영역  $\Omega$  를 생각해 보자. 물체는 등방성, 균질성을 가지며, 여러 경계조건으로 구성되어있다.

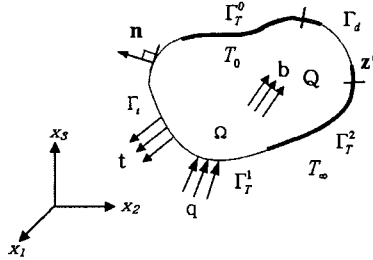


그림 1 3차원 탄성체

여기서  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_d$ ,  $\Gamma_r^0$ ,  $\Gamma_r^1$ ,  $\Gamma_r^2$ ,  $\Gamma_r^3$ ,  $T$ ,  $T_\infty$ ,  $q$ ,  $t$ ,  $b$  는 각각 표면력(Traction) 경계, 변위(Displacement) 경계, 온도(temperature) 경계, 열유속(Heat flux) 경계, 대류(Convection) 경계, 복사(Radiation) 경계, 온도, 외부온도, 열유속, 표면력, 체적력(Body force intensity)를 나타낸다. 경계  $\Gamma_r^0$  에서  $T_0$  의 온도가 주어지고, 경계  $\Gamma_r^1$  에서는  $q$  만큼의 열속이 주어진다. 그리고, 경계  $\Gamma_r^2$  에서 외부의 온도  $T_\infty$  에 대해서 열 대류가 이루어진다. 세 가지 경계 영역은 서로 겹치지 않는 조건인  $\Gamma_r^0 \cup \Gamma_r^1 \cup \Gamma_r^2 = \partial\Omega$  을 만족한다. 그리고  $\partial\Omega$  는 영역  $\Omega$  의 경계를 나타낸다. 변위장(Displacement field)은 다음과 같은 경계조건이 주어진다. 경계  $\Gamma_i$  에서 표면력  $t$  가 주어지고, 경계  $\Gamma_d$  에서 변위  $z^0$  가 주어진다. 경계 영역들은 서로 겹치지 않고, 온도장에서와 같이  $\Gamma_i \cup \Gamma_d = \partial\Omega$  인 조건을 만족한다. 정상상태에서의 열전도 방정식(Heat conduction equation)은 다음과 같이 주어진다.

$$-T_{,ii}\kappa(T) = Q \text{ in } \Omega \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

$\kappa$  는 열전도 계수(Conduction coefficient)이고,  $Q$  는 내부 발열율(Rate of internal heat source)이다. 열 전도 해석에 필요한 경계조건은 다음과 같다.

$$T = T_0 \text{ on } \Gamma_r^0 \quad (2)$$

$$T_{,i}n_i\kappa(T) = q \text{ on } \Gamma_r^1 \quad (3)$$

$$T_{,i}n_i\kappa(T) + (T - T_\infty)h_c(T) = 0 \text{ on } \Gamma_r^2 \quad (4)$$

$$T_{,i}n_i\kappa(T) + (T - T_r)h_r(T) = 0 \text{ on } \Gamma_r^3 \quad (5)$$

여기서,  $h_c(T)$  와  $h_r(T)$  는 온도에 따라 값이 변하는 대류 계수(Convection coefficient) 와 복사 계수(Radiation coefficient)를 나타내며 Stefan-Boltzmann 식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_r(T) = \gamma\theta[(T_r)^2 + (T)^2](T_r + T), \quad (6)$$

여기서  $\theta$  는 표면 흡수율(Surface emissivity) 이고,  $\gamma$  는 Stefan-Boltzmann 상수를 나타낸다.

변위장에서 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (7)$$

여기서  $\sigma$  는 코시응력(Cauchy stress) 이고,  $b$  는 체적력(Body force intensity)이다. 경계 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}n_j = t_i \text{ on } \Gamma_t \quad (8)$$

$$z_i = z_i^0 \text{ on } \Gamma_d \quad (9)$$

다음과 같은 응력-변형을 관계(Stress-strain relation)를 이용하여 열문제와 탄성문제를 연성한다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}[\varepsilon_{kl} - \alpha T \delta_{kl}] = s_{ij} - \alpha T C_{ijkl} \delta_{kl}, \quad (10)$$

여기서,  $C$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $s$  는 각각 탄성텐서(4<sup>th</sup> order elasticity tensor), 크로네커 델타(Kronecker delta) 함수, 열전도 계수(Thermal expansion coefficient), 열응력을 포함하는 코시 응력을 의미한다.

균일 경계조건을 만족하는 영역  $\bar{Y}$  에 속하는 가상함수  $\bar{T}$  를 사용하고, 경계조건을 대입해서 식(1)을 약형식(Weak form)의 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A(T, \bar{T}) = L(\bar{T}), \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (11)$$

여기서 열에너지식(Thermal energy form)은 다음과 같이 정의한다.

$$A(T, \bar{T}) \equiv \int_{\Omega} T_{,i} \kappa(T) \delta_{ij} \bar{T}_{,j} d\Omega + \int_{\Gamma_2^T} (T - T_{\infty}) h_c(T) \bar{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_1^T} (T - T_r) h_r(T) \bar{T} d\Gamma \quad (12)$$

온도에 대한 하중식(Load form) 역시 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$L(\bar{T}) \equiv \int_{\Omega} Q \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_1^T} q \bar{T} d\Gamma. \quad (13)$$

본 연구에서는, 열변형이 일어나도 그 변형에 의해서 온도 분포가 바뀌지 않는다는 가정하에 해석을 수행하였다. 즉, 온도 분포는 변형에 영향을 미치지 않지만, 변형은 온도 분포에 변형을 미치지 않게 된다.

변위장에 대해서도, 가상일의 원리와 균일 경계조건을 만족하는 영역  $\bar{Z}$  에 속하는 가상함수  $\bar{z}$  및 경계조건을 이용해서 식(7)을 약형식(weak form)으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{z} \in Z \text{ such that } a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \alpha(\mathbf{z}; T, \bar{\mathbf{z}}) + \ell(\bar{\mathbf{z}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{z}} \in \bar{Z}. \quad (14)$$

여기서, 평형방정식에 대해서 변형에너지, 열하중식, 구조하중식은 각각 다음과 같이 정의한다.

$$a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \equiv \int_{\Omega} s_{ij}(\mathbf{z}) \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}) d\Omega, \quad (15)$$

$$\alpha(\mathbf{z}; T, \bar{\mathbf{z}}) \equiv \int_{\Omega} \beta T \delta_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}) d\Omega, \quad (16)$$

$$\ell(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \int_{\Omega} b_i \bar{z}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{z}_i d\Gamma. \quad (17)$$

또한  $\beta$  는 다음과 같이 정의한다.

$$\beta = \alpha \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (18)$$

가상변형률텐서(virtual strain tensor)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial x_i} \frac{\partial z_m}{\partial x_j} + \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial x_j} \right) \equiv \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}). \quad (19)$$

위에서 유도한 에너지식은 비선형 형태이기 때문에, 직접 해를 구할 수는 없다. 따라서, 비선형

문제를 풀기 위해 점증 반복형 뉴튼방법(Incremental-iterative Newton-Raphson method)을 적용했다. 외부 열유속과 구조하중을 점차 증가시켜가면서, 이전 단계의 평형식을 사용하여 각 단계에서의 해를 구하였다.

### 3. 연속체 기반의 설계 민감도 해석

#### 3.1 Direct differentiation method

열전달 문제와 열탄성 문제에서 재료 특성치로 구성된 비 형상설계 변수  $\mathbf{u}$  를 고려할 때, 주어진 설계 변수에 대해서 식(11)와 식(14)는 각각의 마지막 평형상태인  $(n+1)$ 번째에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A_{\mathbf{u}}({}^{n+1}T, \bar{T}) = L_{\mathbf{u}}(\bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y} \quad (20)$$

$$\text{Find } \mathbf{z} \in Z \text{ such that } a_{\mathbf{u}}({}^{n+1}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) - \alpha_{\mathbf{u}}({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}T, \bar{\mathbf{z}}) = \ell_{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{z}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{z}} \in \bar{Z} \quad (21)$$

식(20)에서 1차 변분을 취하게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A^*({}^{n+1}T; {}^{n+1}T', \bar{T}) = L'_{\alpha_{\mathbf{u}}}(\bar{T}) - A'_{\alpha_{\mathbf{u}}}({}^{n+1}T, \bar{T}). \quad (22)$$

여기서 선형화된 쌍일차(bilinear) 열에너지 식은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} A^*({}^{n+1}T; {}^{n+1}T', \bar{T}) \equiv & \int_{\Omega} (\kappa_0 + \kappa_1 {}^{n+1}T) \delta_{ij} {}^{n+1}T'_{i,j} \bar{T}_j d\Omega + \int_{\Omega} \kappa_1 {}^{n+1}T' \delta_{ij} {}^{n+1}T_{i,j} \bar{T}_j d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_f^2} (h_0 + h_1 {}^{n+1}T) {}^{n+1}T' \bar{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_f^2} h_1 {}^{n+1}T' ({}^{n+1}T - T_{\infty}) \bar{T} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_f^2} 4\gamma\theta ({}^{n+1}T)^3 {}^{n+1}T' \bar{T} d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

또한 식(21)을 1차 변분을 취하게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$a_{\mathbf{u}}^*({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}) - \alpha_{\mathbf{u}}^*({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}T, \bar{\mathbf{z}}) = \ell'_{\alpha_{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{z}}) - a'_{\alpha_{\mathbf{u}}}({}^{n+1}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + \alpha'_{\alpha_{\mathbf{u}}}({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}T, \bar{\mathbf{z}}) + \alpha_{\mathbf{u}}({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}T', \bar{\mathbf{z}}) \quad (24)$$

여기서, 선형화된 변형에너지식과 열하중식은 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a^*({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}) \equiv \int_{\Omega} s_{ij}({}^{n+1}\mathbf{z}) \hat{\eta}_{ij}({}^{n+1}\mathbf{z}'; \bar{\mathbf{z}}) d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl}({}^{n+1}\mathbf{z}; {}^{n+1}\mathbf{z}') \hat{\epsilon}_{ij}({}^{n+1}\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (25)$$

$$\alpha^*({}^{n+1}\mathbf{z}'; {}^{n+1}T, \bar{\mathbf{z}}) \equiv \int_{\Omega} \beta {}^{n+1}T \delta_{ij} \hat{\eta}_{ij}({}^{n+1}\mathbf{z}'; \bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (26)$$

식(22)와 (24)는  ${}^{n+1}T'$  와  ${}^{n+1}\mathbf{z}'$  에 대해서 선형식이다. 따라서 따로 반복계산을 할 필요가 없고, 열 및 열탄성 해석시  $(n+1)$ 번째 상태에서 구했던 수렴된 탄젠트 강성(Tangent stiffness)만 필요하게 된다.

#### 3.2 Adjoint Variable method

이 문제에서 사용하게 될 목적함수를 적분 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\psi = \int_{\Omega} g(\mathbf{u}, {}^{n+1}\mathbf{z}, {}^{n+1}T) d\Omega \quad (27)$$

목적함수의 1차 변분을 취하게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} \left[ g_{,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + g_{,{}^{n+1}\mathbf{z}} {}^{n+1}\mathbf{z}' + g_{,{}^{n+1}T} {}^{n+1}T' \right] d\Omega \quad (28)$$

먼저, 열전달 문제에 대한 어드조인트 식을 정의한다. 식(28)에서 암시적 종속항(Implicit dependence term)인  ${}^{n+1}T'$  대신 균일 경계 조건을 만족하는 가상의 온도  $\bar{\lambda}$  를 대입한 후,

선형화된 열에너지 식  $A^\circ({}^{n+1}T; \bar{\lambda}, \lambda)$  과 비교하여 어드조인트 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_u^\circ({}^{n+1}T; \bar{\lambda}, \lambda) = \int_{\Omega} g_{,n+1} \bar{\lambda} d\Omega \text{ for all } \bar{\lambda}, {}^{n+1}T' \in \bar{Y} \quad (29)$$

여기서 어드조인트 응답값인  $\lambda$  는 균일경계 조건을 만족한다. 다음으로, 열탄성 문제에 대해서 어드조인트 식을 정의한다. 마찬가지로 식(28)에서 암시적 종속항인  ${}^{n+1}z'$  대신 균일 경계 조건을 만족하는 가상의 변위인  $\bar{\xi}$  를 대입한 후에, 선형화된 변형 에너지식인  $a_u^\circ({}^{n+1}z; \bar{\xi}, \bar{\xi}) - \alpha_u^\circ(\bar{\xi}; {}^{n+1}T, \bar{\xi})$  과 비교하여 어드조인트 방정식을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$a_u^\circ({}^{n+1}z; \bar{\xi}, \bar{\xi}) - \alpha_u^\circ(\bar{\xi}; {}^{n+1}T, \bar{\xi}) = \int_{\Omega} g_{,n+1} \bar{\xi} d\Omega \text{ for all } \bar{\xi}, {}^{n+1}z' \in \bar{Z} \quad (30)$$

여기서 어드조인트 응답값인  $\xi$  는 균일경계 조건을 만족한다. 식(29)와 (30)을 식(28)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{,u} \delta u d\Omega + L'_{\delta u}(\lambda) - A'_{\delta u}({}^{n+1}T, \lambda) + \ell'_{\delta u}(\xi) - a'_{\delta u}({}^{n+1}z, \xi) + \alpha'_{\delta u}({}^{n+1}z, {}^{n+1}T, \xi) + \alpha_u({}^{n+1}z, {}^{n+1}T', \xi) \quad (31)$$

식(31)을 계산하기 위해서는  ${}^{n+1}T$ ,  ${}^{n+1}z$ ,  $\lambda$ ,  $\xi$  뿐만 아니라  ${}^{n+1}T'$  가 필요하게 되는데,  ${}^{n+1}T'$  를 계산하기 위해서는 많은 시간이 걸린다. 다음으로 열과 탄성 부분이 연성되어 있는 영역을 생각해보자. 온도와 변위장 사이에는 에너지 손실이 없다고 가정하면, 온도장에서 발생하는 에너지는 변위장의 온도에 의한 외력과 같다.  $\alpha_u({}^{n+1}z, {}^{n+1}T', \xi)$  식을 효율적으로 계산하기 위한 연성된 어드조인트 방정식은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$A^\circ({}^{n+1}T; \bar{\eta}, \eta) = \alpha_u({}^{n+1}z; \bar{\eta}, \xi) \text{ for all } \bar{\eta} \in \bar{Y} \quad (32)$$

여기서 어드조인트 응답값인  $\eta$  는 균일경계 조건을 만족한다. 식(32)를 이용하여, 식(31)을 다시 쓰면 다음과 같은 목적함수의 설계 민감도식을 얻을 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{,u} \delta u d\Omega + \ell'_{\delta u}(\xi) - a'_{\delta u}({}^{n+1}z, \xi) + \alpha'_{\delta u}({}^{n+1}z, {}^{n+1}T, \xi) + L'_{\delta u}(\lambda + \eta) - A'_{\delta u}({}^{n+1}T, \lambda + \eta) \quad (33)$$

#### 4. 위상최적설계의 정식화

온도와 변위장이 동일한 영역에 존재하는 비선형·열탄성 연성 문제에 관한 위상 최적 설계를 수행하였다. 열탄성 연성 문제에서 목적함수는 다음과 같이 컴플라이언스로 두었다.

$$\text{Minimize } \Pi = \int_{\Omega} \beta^{n+1} T \varepsilon_{ii}({}^{n+1}z, {}^{n+1}z) d\Omega + \int_{\Omega} {}^{n+1}b_i {}^{n+1}z_i d\Omega + \int_{\Gamma} {}^{n+1}t_i {}^{n+1}z_i d\Gamma, \quad (34)$$

$$\text{Subject to } \int_{\Omega} u d\Omega \leq V_{allowable}, \quad (35)$$

여기서  $\Pi$ ,  $V_{allowable}$ ,  $u$  는 각각  $(n+1)$  상태에서의 컴플라이언스, 허용 재료량, 정규 재료밀도 함수를 뜻한다. 설계 변수는 각 요소의 탄성계수 및 열전도 계수와 관련된 재료밀도 함수이다.

$$E_i = u_i^P E_0, \quad \kappa_i = u_i^P \kappa(T), \quad (i=1, 2, \dots, NE). \quad (36)$$

$P$  는 집중된 재료 분포를 얻기 위한 벌칙인자(Penalty parameter) 이다. 수치적 특이점(Singularity)을 피하기 위해 최소점  $u_{min}$  을 부여하였다.

$$0 < u_{min} \leq u_i \leq 1. \quad (37)$$

앞서 언급한 어드조인트 식에 따라서, 컴플라이언스의 민감도식을 유도하면 다음과 같다.

$$\psi' = 2\alpha'_{\delta u}({}^{n+1}z; {}^{n+1}T, {}^{n+1}z) + \ell'_{\delta u}({}^{n+1}z) - a'_{\delta u}({}^{n+1}z, {}^{n+1}z) + L'_{\delta u}(2\lambda) - A'_{\delta u}({}^{n+1}T, 2\lambda) \quad (38)$$

## 5. 수치 예제

### 5.1 설계 민감도 해석

앞서 유도한 설계민감도 식의 정확성 및 효율성을 알아보자. 설계 민감도가 정확하게 구해졌는지 확인하기 위해서, 유한차분법을 이용하여 검증한다. 그림 2와 같은 간단한 2차원 평판 모델을 생각해 보자. 평판의 왼쪽은 고정되어 있고, 400개의 요소로 구성되어 있다.

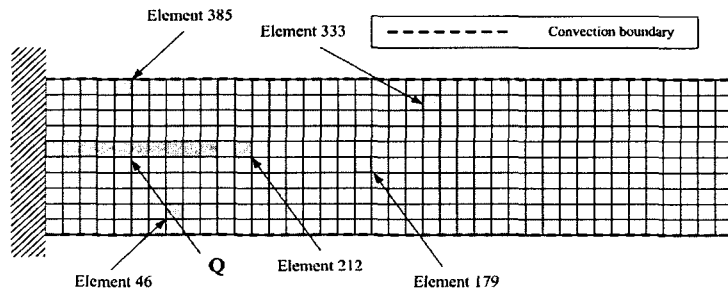


그림 2 2차원 사각 평판 모델

모델의 재료 특성치는 다음과 같다. 탄성 계수는  $10^3 N/m^2$ , 푸아송비(Poisson's ratio)는 0.33, 열전도 계수는  $\kappa(T) = 10.0 + 0.2T(W/m \cdot ^\circ C)$ 이다. 또한 대류 계수(Convection coefficient)는  $h_c = 120.0(W/m^2 \cdot ^\circ C)$ , 외부온도(Ambient temperature)는  $10^\circ C$ 이다. 내부발열률은  $Q = 5000 (w/m^2)$ 이며, 열팽창 계수는  $\alpha = 5 \times 10^{-5} / ^\circ C$ 이다. 설계 변수는 각 요소의 정규 재료밀도 함수  $u$ 이며, 탄성 계수 및 열전도 계수와 연관이 된다. 각 요소의 정규재료밀도 함수에 대한 컴플라이언스의 설계 민감도 해석 결과를 그림 3에 나타내었다.



그림 3 정규재료밀도함수에 대한 컴플라이언스의 설계민감도

표 1에서 어드조인트 방법을 이용하여 구한 컴플라이언스의 설계민감도 값과 유한차분법을 이용하여 구한 설계민감도 값을 비교하였다.  $dC/du_i$ 는 어드조인트 방법을 이용하여 구한 설계민감도 값을,  $\Delta C/\Delta u_i$ 는 유한차분법을 이용하여 구한 설계민감도 값을 나타낸다. 유한차분법과 비교하였을 때 거의 일치하므로 어드조인트 방법에 의한 설계 민감도 결과는 매우 정확함을 알 수 있다. 어드조인트 방법으로 설계 민감도 해석을 수행하였을 때, 계산시간 역시 현저하게 감소하였다. 유한차분법은 11768.4 초가 소요된 반면 어드조인트 방법은 단지 0.48 초 밖에 걸리지 않았다. 따라서 어드조인트 방법은 매우 정확하고 효율적인 방법임을 알 수 있다.

표 1 설계 민감도의 비교

Design Variable	$dC/du_i$	$\Delta C/\Delta u_i$	$dC/du_i / \Delta C/\Delta u_i$ (%)
$u_{46}$	-3.08384E-03	-3.08381E-03	99.999%
$u_{179}$	6.66987E-04	6.66925E-04	99.991%
$u_{212}$	2.18683E-03	2.18653E-03	99.987%
$u_{333}$	-6.59016E-04	-6.58993E-04	99.997%
$u_{385}$	5.44644E-04	5.44621E-04	99.996%

5.2 열탄성 연성문제의 위상최적설계

기계적 하중과 열하중에 동시에 가해진 구조물에 대해서 위상 최적설계를 수행하였다. 그림 4와 같은 400개 요소로 이루어진 모델을 생각해보자. 이 모델의 탄성 계수는  $210 \times 10^9 N/m^2$ , 푸아송 비는 0.33, 열전도 계수는  $\kappa = 15.0(W/m \cdot C)$ , 열 팽창 계수는  $\alpha = 2.5 \times 10^{-5} / C$  이다. 외력은  $10^6 N$  을 주었으며, 설계변수는 다음과 같은 정규재료밀도 함수이다.

$$E_i = u_i^{NPE} E_0, \quad \kappa_i = u_i^{NPK} \kappa_0, \quad (i = 1, 2, \dots, NE)$$

이 예제에서는 비선형 문제를 풀 때 생기는 수렴성 문제를 피하기 위해서 탄성 계수와 열전도 계수의 벌칙인자 값을 따로 주었다.  $NPK = 1, NPE = 3$  이며, 허용재료량은 원래 재료량의 40%를 사용하였다.

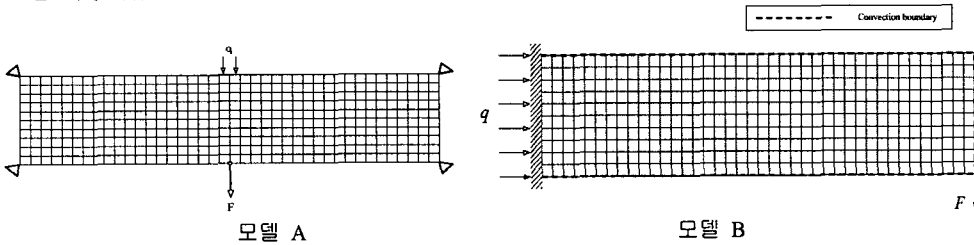


그림 4 2차원 사각 평판 모델

위상 최적설계 결과는 그림 5 및 그림 6과 같다. 모델 A의 경우 그림 5-(b)와 같이 열하중이 증가하면 열하중에 의한 에너지 유입이 최소화되도록 재료가 다른 곳으로 분포하고 있는 경향을 보이며 그 분포를 통하여 매우 변화된 최적 재료분포를 발견할 수 있다. 따라서 열하중 및 기계적 하중의 비율에 따라 최적의 재료분포는 변화될 수 있음을 알 수 있다.

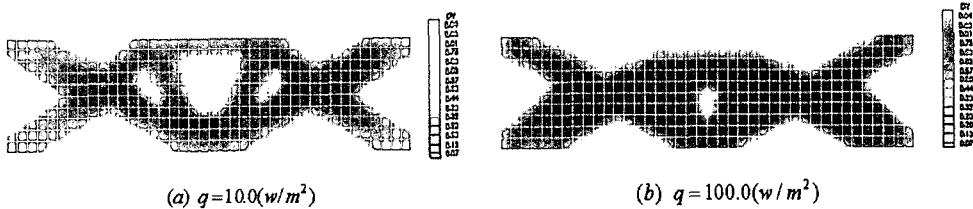


그림 5 모델 A의 위상 최적 설계의 결과

그림 6에서는 기계적 하중이 열 하중에 비해서 지배적일 때는 재료가 기계적 하중 및 경계조건에 의해 분포하게 되지만, 열 하중의 비중이 커지면 재료는 열 하중에 의한 에너지 유입을 최소화하고 에너지의 방출을 위하여 대류가 일어나는 가장자리로 분포하고 있음을 알 수 있다.

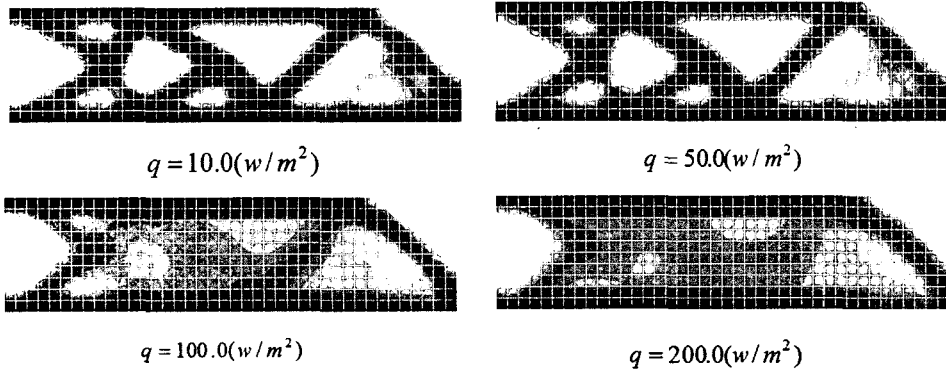


그림 6 모델 B의 위상 최적 설계의 결과

## 6. 결론

본 연구에서는 정상상태의 비선형 열탄성 문제에 대한 지배 방정식에서 출발하여 유한요소법을 이용한 열전도 문제와 열탄성 문제 해석을 수행하였다. 탄성 계수 및 열전도 계수에 대해서 어드조인트 방법을 이용한 연속체 기반의 설계민감도 방정식을 유도하였고, 유한차분법과 비교하여 효율성 및 정확성을 확인하였다. 온도와 변위장이 연성된 어드조인트 방정식을 정의하고 이미 구해진 시스템 행렬을 이용함으로써 계산 시간을 대폭 줄일 수 있었고 또한 위상 최적 설계에 적용되었다. 여러 가지 수치 예제를 통해서, 유도된 식으로 구한 설계 민감도 값이 매우 정확함을 확인하였고 이를 이용하여 수행된 위상 최적화 결과는 물리적으로 타당한 결과를 주었고 주어진 하중 조건에 따라 다른 위상을 얻을 수 있음을 확인하였다.

## References

1. Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using homogenization method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **71**, (1988), 197-224.
2. S. Cho, H. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; **192**: 2539-2553.
3. E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov, Design sensitivity analysis of structural systems. Academic Press, New York, 1986