

## 소성-손상 모델을 이용한 콘크리트의 파괴해석 Fracture Analysis of Concrete using Plastic-Damage Model

남진원\*  
Nam, Jin-Won

송하원\*\*  
Song, Ha-Won

김광수\*\*\*  
Kim, Kwang-Soo

---

### ABSTRACT

The modeling of crack initiation and propagation is very important for the failure analysis of concrete. The cracking process in concrete is quite different from that of other materials, such as metal and glass, in that it is not a sudden onset of new free surface but a continuous forming and connecting of microcracks. The failure process of concrete by cracking causes irreversible deformations and stiffness degradation. Those phenomenon can be modeled using plasticity and damage theory in macroscopic aspect.

In this study, a plastic-damage model based on homogenized crack model considering velocity discontinuity and damage variable which is a function of plastic strain is proposed for fracture analysis of concrete. Finally, the plastic-damage model is verified with experimental data.

---

### 1. 서론

콘크리트의 파괴거동 해석을 위해서는 균열의 생성 및 전파를 모델링하는 것이 매우 중요하다. 금속이나 유리질 재료와는 달리 준취성 파괴거동을 보이는 콘크리트는 급작스런 균열면의 생성에 의해 파괴가 진행되는 것이 아니라 연속적인 미세균열들의 연결 및 진행에 의해 변형을 국소화와 응력의 재분배가 이루어지면서 파괴가 진행된다. 균열에 의한 콘크리트의 파괴진행은 회복되지 않는 변형을 발생시키며 동시에 전체 강성도를 저하시키게 되는데, 이러한 두 가지 현상학적 거동은 각각 소성과 손상으로 모델링 될 수 있다. 거시적인 측면에서 균열에 의한 콘크리트의 현상학적 거동은 고전적인 소성 이론을 이용해서 모델링이 가능하지만, 미세균열에 의한 강성도 저하현상은 고전적인 소성 이론만으로는 모델링하기가 어렵고, 응력과 유효 응력간의 관계를 정의하는 연속체 손상역학을 적용하여야 한다.<sup>(1)</sup>

한편, 균열에 의한 콘크리트의 연화거동을 모델링하기 위해서는 적절한 균열모델이 필요한데, 그동안 이러한 콘크리트의 파괴거동을 재현하기 위해 많은 모델들이 제안되어 왔다. 1980년대에는 주로 이산균열모델과 분산균열모델의 개발을 위한 많은 연구가 이루어졌으며, 1990년대에는 분산균열모델의 장점을 유지하면서 요소의 재구성 없이 국소화된 손상을 모델링할 수 있는 유한요소모델을 개발하기 위한 많은 노력이 이루어졌고, 그 결과 매입불연속접근법이 개발되었다.<sup>(2)</sup> 각종 균열모델을 이용해서 콘크리트의 변형을 연화 현상을 수

---

\* 연세대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 정희원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수

\*\*\* 연세대학교 토목공학과 석사과정

치적으로 해석하는 과정에서는 지배방정식의 타원성이 손실되거나 경계치 문제가 ill-posed 되는 등의 수치적 결함이 발생할 수 있다. 또한, 이러한 수치적 결함은 유한요소해석상에서 요소의존성과 같은 문제를 야기하게 되는데, 최근까지 이러한 문제들을 해결하기 위한 여러 가지 정규화 모델들이 제안되었다. Oliver<sup>(3)</sup>는 변형을 국소화 문제에서 콘크리트의 파괴를 불연속 현상으로 가정한 불연속 모델을 제안하였고, 내부 불연속면을 도입한 매입균열법을 유한요소해석을 통하여 콘크리트의 파괴진행을 해석한 경우도 나타났다.<sup>(4)</sup> 최근에는 속도불연속성을 고려하여 유한요소 해석 시 요소에민성을 해결한 혼합균열모델이 제안되었으며,<sup>(5)</sup> 이는 각종 수치적 문제없이 콘크리트의 연화거동을 잘 표현할 수 있는 균열 모델이라 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 준취성 재료인 콘크리트에 대한 파괴해석을 위하여 혼합균열모델과 소성변형률의 함수인 손상변수를 포함하는 소성-손상 모델을 구성하였으며, 이를 이용한 유한요소해석을 통해 콘크리트의 파괴해석을 실시하였다.

## 2. 소성과 손상의 모델링

거시적으로 볼 때, 소성과 손상은 응력-변형률 거동에서 각기 다른 역할을 하게 된다. 다음의 그림 1과 같이 하중을 한번 재하한 후 0으로 재하시키는 경우의 응력-변형률 관계를 살펴보기로 하자. 처음에 하중이 가해지면 탄성영역을 지나는 시점부터 점차적으로 탄성계수가 감소하게 되어 처음과는 다른 탄성계수  $E^*$ 에 이르게 되며, 하중을 완전히 제거하였을 때는 회복되지 않는 영구변형률  $\epsilon^p$ 가 존재하게 된다. 이러한 과정에서 손상은 탄성계수의 저하에 기여하게 되고, 소성은 회복되지 않는 영구 변형률을 발생시키는데 기여하게 된다. 미세역학적 측면에서 볼 때, 하중이 가해짐에 따라 분자 간 미끄러짐이 발생하여 결정구조에 영구적인 변화가 발생하는 것은 소성으로 모델링하며, 물질내 공극과 미세균열이 발생하여 성장함에 따라 강성도에 변화가 생기는 것은 손상으로 모델링하게 된다.<sup>(6)</sup>

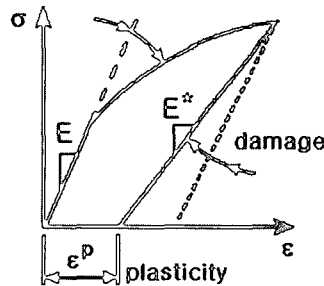


그림 1. 응력-변형률 관계에서 소성과 손상의 역할<sup>(6)</sup>

본 연구에서는 준취성재료인 콘크리트의 파괴거동을 나타내기 위해, 연속체모델의 일종인 혼합균열모델과 강성도 저하를 나타낼 수 있는 Lubliner의 손상변수<sup>(7)</sup> 및 연화함수를 사용하여 콘크리트의 소성-손상모델을 구성하였다.

## 2.1 혼합균열모델

그림 2에 나타난 대표체적요소내에서 콘크리트와 균열의 응력속도 및 변형률속도는 각각  $\dot{\sigma}^i$ ,  $\dot{\epsilon}^i$ ,  $\dot{\sigma}^j$ ,  $\dot{\epsilon}^j$ 로 나타낼 수 있으며 이를 이용해 식 (1)과 같은 혼합법칙을 구성할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = \mu_i \dot{\sigma}^i + \mu_j \dot{\sigma}^j, \quad \dot{\epsilon} = \mu_i \dot{\epsilon}^i + \mu_j \dot{\epsilon}^j \quad (1)$$

여기서,  $\mu_i$  와  $\mu_j$ 는 각각 콘크리트와 균열의 체적비를 나타낸다. 만일 유한요소의 크기에 비해 콘크리트내의 균열 두께가 매우 작다면( $t \ll H$ ), 각각의 체적비는 1과  $t/H$ 에 근접하게 된다. 즉, 각각의 체적비는

$$\mu_i = \frac{BW(H-t)}{HBW} \cong 1, \quad \mu_j = \frac{BWt}{HBW} \cong \frac{t}{H} \text{로 표현할 수 있다.}$$

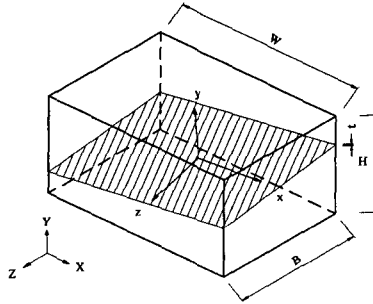


그림 2. 대표체적요소

콘크리트와 균열면간의 경계면에서 평형방정식 및 적합조건은 균열의 수직강성과 전단강성을 가정함으로써 성립된다. 국부 좌표계에서 이러한 방정식들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{yy} = \dot{\sigma}^i_{yy} = \dot{\sigma}^j_{yy}, \quad \dot{\tau}_{xy} = \dot{\tau}^i_{xy} = \dot{\tau}^j_{xy}, \quad \dot{\tau}_{yz} = \dot{\tau}^i_{yz} = \dot{\tau}^j_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}^i_{xx} = \dot{\epsilon}^j_{xx}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}^i_{zz} = \dot{\epsilon}^j_{zz}, \quad \dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}^i_{zx} = \dot{\gamma}^j_{zx} \end{aligned} \quad (2)$$

다음으로 균열의 수직방향 및 전단방향에 대한 속도불연속들은 식 (3)과 같이 나타낼 수 있고, 평균균열변형률은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{g} = \{ \dot{g}_y, \dot{g}_x, \dot{g}_z \}^T, \quad [\delta] \dot{\sigma}^j = [K] \dot{g} \quad (3)$$

$$\frac{1}{t} \dot{g} = [\delta] \dot{\epsilon}^j \quad (4)$$

$\mu$ 를 균열면적과 대표체적요소간의 비( $\mu=1/H$ )로 생각한다면, 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$[\delta] \dot{\epsilon} \approx [\delta] \dot{\epsilon}^i + \mu \dot{g} \quad (5)$$

한편, 콘크리트의 구성방정식은 구성행렬  $[D]$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\sigma}^i = [D] \dot{\epsilon}^i \quad (6)$$

식 (3)~(6)을 재구성하고, 적절한 행렬식  $[A]$ ,  $[B]$  및  $[S_1]$ 을 이용하면 콘크리트의 변형률 속도에 대한 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\delta] \dot{\epsilon}^i = [A] \dot{\epsilon} + [B] \dot{g}, \quad \dot{\sigma}^i = [S_1] \dot{\epsilon} \quad (7)$$

결국, 균열을 포함한 콘크리트의 평균화된 구성관계식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\dot{\sigma} = [D^{eq}] \dot{\epsilon}, \quad [D^{eq}] = [D][S_1] \quad (8)$$

최종적으로 식 (8)과 같이 유도된 혼합균열모델의 평균화된 구성관계식은 합리적으로 균열의 폭을 요소내에 포함시켜 정규화함으로써 균열의 두께에 대한 항목을 제거할 수가 있으며, 이로써 요소 의존성을 해결할 수 있게 된다.

## 2.2 소성-손상 모델의 구성

소성의 증분 이론에서, 변형률은 다음과 같이 탄성부분  $\epsilon^e$  와 소성부분  $\epsilon^p$  로 분리할 수 있다.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (9)$$

탄성 강성을 나타내는 행렬  $D$  를 이용하면 응력-변형률관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = D : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (10)$$

연속체의 손상은 강성, 강도 등과 같은 재료 특성의 저감(degradation) 현상으로 정의할 수 있다.<sup>(8)</sup> 강성 저감에 의한 손상을 나타내기 위하여 스칼라 손상을 고려하면, 식 (10)의 탄성강성은 다음의 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = (1-d) D_0 \quad (11)$$

여기서,  $d$ 는 강성저감변수(degradation variable)이고,  $D_0$ 는 초기 탄성 강성 텐서이다. 식 (10)과 식 (11)로부터 응력은 다음과 같이 강성저감을 나타내는  $(1-d)$ 와 유효응력  $\bar{\sigma}$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = (1-d) \bar{\sigma} \quad (12)$$

여기서, 유효응력  $\bar{\sigma}$ 는 다음과 같이 나타내고, 강성저감변수  $d$ 는 손상변수  $\kappa$ 에 의해 결정된다.

$$\bar{\sigma} = D_0 : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (13)$$

콘크리트의 파괴상태를 결정할 수 있는 항복면을 함수  $\tilde{F} = 0$ 으로 정의하고  $\kappa$ 가 상태를 나타내는 변수라고 한다면,  $\kappa$ 와 관련된 허용응력상태는 다음과 같이 제한된다.

$$\tilde{F}(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (14)$$

또한, 강성 저감 변수  $d$ 는 다음과 같이  $\kappa$ 의 함수로써 표현할 수 있다.

$$d = d(\kappa) \quad (15)$$

결국 식 (12), (14) 및 (15)로부터 유효응력과 손상변수에 관한 함수로 나타낸 파괴면의 등가형태를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$F(\bar{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (16)$$

고전적 소성의 개념으로 생각한다면 식 (16)은 항복면이고,  $\kappa$ 는 경화변수라 할 수 있다. 강성의 손상은 식 (15)로 표현되며, 강도의 손상은 식 (16)으로 결정된다. 손상변수는 축적된 에너지 소산의 형태로 정의된다. 한편 손상변수의 전개법칙은 다음 식 (17)로써 정의될 수 있다.

$$\dot{\kappa} = f(\kappa, \sigma) : \dot{\epsilon}^p \quad (17)$$

결국, 손상변수  $\kappa$ , 유효응력  $\bar{\sigma}$ , 소성변형률  $\epsilon^p$  을 산정한 후, 강성 저감 변수를 산정하고, 유효응력과

함께 전개하면, 규정된 변형률에 대한 응력을 구할 수 있다.

### 2.3 손상전개

Lubliner모델에서  $\sigma_{\kappa}$  으로 표현되는 응력과  $\epsilon^p$  로 표현되는 소성변형률간의 관계는 다음과 같은 형태로 나타낸다.<sup>(7)</sup>

$$\sigma_{\kappa} = f_{\kappa 0} [(1+a_{\kappa})\exp(-b_{\kappa} \epsilon^p) - a_{\kappa} \exp(-2b_{\kappa} \epsilon^p)] \quad (18)$$

여기서,  $f_{\kappa 0}$ 은 초기항복응력,  $\kappa$  은 일축인장 혹은 일축압축 응력상태를 나타내는 상태변수,  $a_{\kappa}$  과  $b_{\kappa}$  은 상수이다. 초기항복응력은 초기상태에서 허용탄성응력의 최대치로 정의된다. 식 (18)의 일축 응력-소성 변형률 관계를 식 (12)에서와 같이 저감 부분과 유효응력부분으로 나눌수 있는데, 우선 손상 저감을 지수함수의 형태로 가정하면 다음과 같다.

$$1-d_{\kappa} = \exp(-c_{\kappa} \epsilon^p) \quad (19)$$

여기서,  $c_{\kappa}$  은 상수이다. 또한 유효응력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{\sigma}_{\kappa} = f_{\kappa 0} \left[ (1+a_{\kappa})(\exp(-b_{\kappa} \epsilon^p))^{1-\frac{c_{\kappa}}{b_{\kappa}}} - a_{\kappa}(\exp(-b_{\kappa} \epsilon^p))^{2-\frac{c_{\kappa}}{b_{\kappa}}} \right] \quad (20)$$

결국,  $\kappa_{\kappa}$  으로 표시되는 일축 손상변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa_{\kappa} = \frac{1}{g_{\kappa}} \int_0^{\epsilon^p} \sigma_{\kappa}(\epsilon^p) d\epsilon^p \quad (21)$$

여기서,

$$g_{\kappa} = \int_0^{\infty} \sigma_{\kappa}(\epsilon^p) d\epsilon^p \quad (22)$$

$\kappa$  는 0부터 1까지의 범위를 갖는다.  $g_{\kappa}$  은 미소균열이 발생하는 동안 소산되는 에너지 밀도를 나타내며, 균열 띠 폭에 해당하는 국소화영역의 크기에 의존한다고 알려져 있다. 그림 3에  $g_{\kappa}$  을 응력과 소성 변형률의 그래프로 나타내었고, 응력과 일축 손상변수의 관계도 도시하였다.  $g_{\kappa}$  은  $\kappa_{\kappa}$  을 정의하기 위한 재료특성으로 고려할 수 있다.

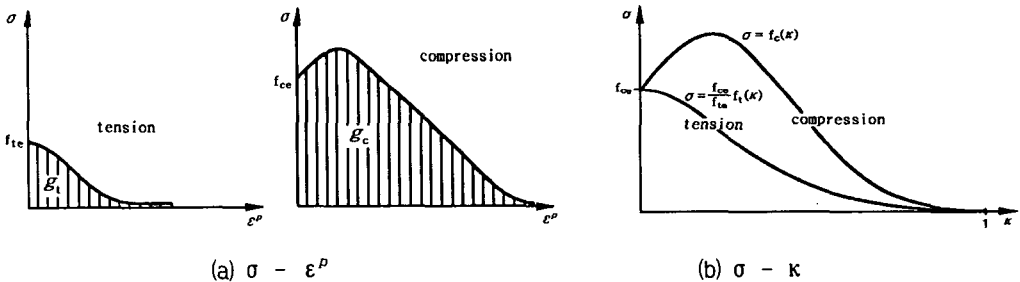


그림 3. 일축 하중에 대한 응력-소성변형률 및 응력-손상변수 관계<sup>(7)</sup>

식 (18)과 식 (22)로부터, 다음과 같이 상수간의 관계를 구할 수 있다.

$$g_N = \frac{f_{N0}}{b_N} \left( 1 + \frac{a_N}{2} \right) \quad (24)$$

또한, 식 (18)과 식 (21)로부터,  $\kappa_N$  과  $\varepsilon^p$  간의 관계가 도출된다. 이것을 식 (18)에 다시 대입하면 응력을  $\kappa_N$  의 항으로 응력을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_N &= f_N(\kappa_N) \\ &= \frac{f_{N0}}{a_N} [(1 + a_N)\sqrt{\Phi_N(\kappa_N)} - \Phi_N(\kappa_N)] \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,

$$\Phi_N = 1 + a_N(2+a_N)\kappa_N \quad (26)$$

유사하게, 유효응력과 저감 변수를  $\kappa_N$  의 항으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_N &= \bar{f}_N(\kappa_N) \\ &= f_{N0} \left[ \left( \frac{1}{a_N} \right) (1 + a_N - \sqrt{\Phi_N(\kappa_N)}) \right]^{1 - \frac{c_N}{b_N}} \sqrt{\Phi_N(\kappa_N)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$d_N = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a_N} \right) (1 + a_N - \sqrt{\Phi_N(\kappa_N)}) \right]^{\frac{c_N}{b_N}} \quad (28)$$

### 3. 수치해석

본 연구에서 제안한 소성-손상 모델의 검증을 위해서 다음 그림 4와 같은 직사각형 콘크리트 시편에 대해 수치해석을 실시하였다. 해석에 사용된 시편크기와 콘크리트의 물성치는 실제 실험<sup>(9)</sup>과 동일한 값들을 사용하였고, 875개의 절점과 144개의 요소분할을 사용한 다른 해석결과<sup>(6)</sup>와 비교하기 위해서 동일한 144개 요소분할을 하여 모델링하였다. 그림 5에서와 같이 수치해석 결과는 콘크리트의 압축파괴거동을 잘 재현하고 있다. 응력-변형률 곡선에서 나타난 바와 같이, 제안된 모델을 사용하여 수치해석한 결과는 기존 해석결과에서 잘 묘사하지 못했던 최대응력 이전의 비선형 거동을 잘 묘사하고 있으며, 최대응력 이후의 연화거동 또한 잘 나타내고 있다. 다만, 실제실험결과와 최대응력 이후 연화거동에서 다소의 차이를 보이는 것은 대상 콘크리트 시편이 고강도 콘크리트이기 때문에 최대응력 이후 급격하게 기울기가 변하는 비교적 취성적인 연화거동을 나타냄으로써 발생하는 것으로 판단된다.

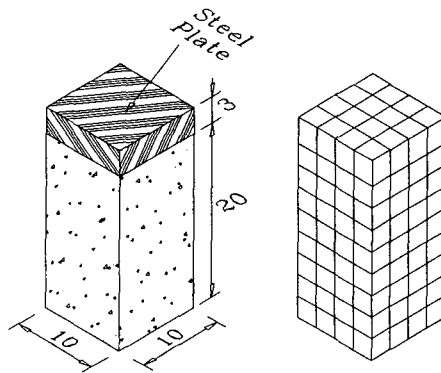


그림 4. 콘크리트 시편 및 요소분할

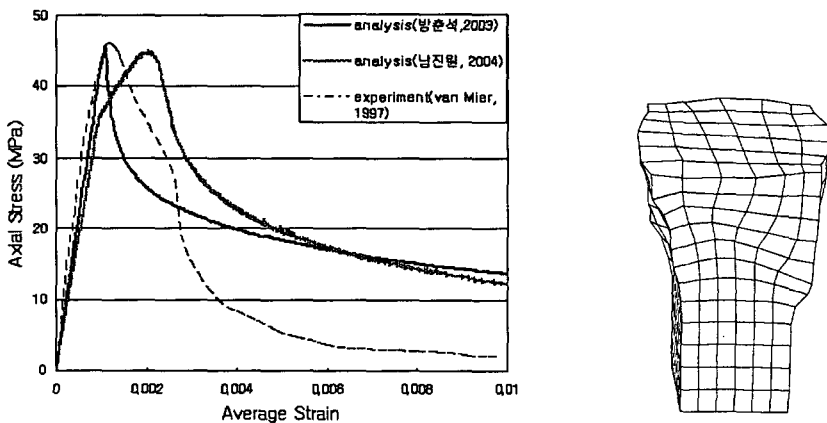


그림 5. 일축압축에 대한 응력-변형률 곡선과 시편의 변형 형상

#### 4. 결론

본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 본 연구에서는 준취성 재료인 콘크리트에 대한 파괴해석을 위하여 혼합균열모델과 소성변형률의 함수인 손상변수를 포함하는 소성-손상 모델을 전개하였고, 이를 이용한 유한요소해석을 통해 콘크리트의 파괴해석을 실시하였다.
- 2) 일축압축을 받는 콘크리트 재료의 연화영역에 대한 응력-변형률 곡선을 기존의 실험자료 및 해석자료와 비교 분석함으로써 모델의 타당성을 검증하였다.
- 3) 기존 혼합균열모델의 연화함수를 수정하고 손상변수를 반영하여 해석한 결과 일반 압축파괴시 나타나는 최대응력 이전의 경화현상을 나타낼 수 있었으며, 연화영역 또한 실험값에 근사함을 보였다.

#### 참고문헌

1. Lee, J. and Fenves, G. L., "Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124, No.8, 1999, pp.892~900
2. Fernandez, L.E. and Ayala, G., "Constitutive Modeling of Discontinuities by means of Discrete and Continuum Approximations and Damage Models," *Int. J. of Solids & Structures*, 41, 2004, pp.1453~1471
3. Oliver, J., "On the Discrete Constitutive Models Induced by Strong Discontinuity; Kinematics and Continuum Constitutive Equations," *Int. J. of Solids & Structures*, 37, 2000, pp.7202~7229
4. Song, H. W., Shim, B., Woo, S. M. and Koo, J. C., "Progressive fracture analysis of concrete using finite element with embedded displacement discontinuity," *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 11, No. 6, 2001, pp.591~604
5. Song, H.-W., Bang, C.-S., Nam, J.-W. and Byun, K.-J., "Homogenized Crack Model for Finite Element Analysis of Concrete Fracture," *Proceedings of The Fifth International Conference on FraMCoS*, Vol. 1, 2004, pp.213~220
6. Alfredsson, K. S. and Stigh, U., "Continuum Damage Mechanics Revised a Principle for Mechanical and Thermal Equivalence," *International Journal of Solids Structures*, 2004
7. Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. and Onate, E., "A Plastic-Damage Model for Concrete," *International Journal of Solids Structures*, Vol.25, No.3, 1989, pp.299~326
8. Ju, J. W., "On Energy-based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, No. 7, 1989, pp. 803-833.
9. van Mier, J. G. M., Shah, S. P. et. al., "Strain-softening of concrete in uniaxial compression", *Materials & Structures, RILEM*, Vol. 30, 1997, pp.195~209