유체 이송 연직 외팔송수관의 동적안정성에 미치는 중력 효과

류봉조*(한밭대 기계설계공학과), 류시웅(한국 기초과학지원연구원)

Gravitational Effect on Dynamic Stability of a Vertical Cantilevered Pipe Conveying Fluid

B. J. Ryu (Mech. Design Eng. Dept., HNU), S. U. Ryu (KBSI)

ABSTRACT

The paper deals with gravitational effect on dynamic stability of a cantilevered pipe conveying fluid. The eigenvalue branches and modes associated with flutter of cantilevered pipes conveying fluid are fully investigated. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the solutions are sought by Galerkin's method. Root locus diagrams are plotted for different values of mass ratio of the pipe, and the order of branch in root locus diagrams is defined. The flutter modes of the pipe at the critical flow velocities are drawn at every one of the twelfth period. The transference of flutter-type instability from one eigenvalue branches to another is investigated thoroughly.

Key Words : Eigenvalue branches(고유치 분기), Critical flow velocity (임계유속), Gravitational effect(중력효과), Material damping(재질감쇠), Quasi-mode order (준-모드 차수)

1. 서론

내부 유동유체에 의한 연직 외팔 송수관의 동적 안정성에 관한 연구는 기계공학, 항공우주공학, 자동차공학, 토목·건축공학 등 많은 공학 분야에서 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어져 왔다. 외팔 송수관의 동적안정성에 관한 지금까지의 대부분의 연구들은 이론적 연구 뿐만아니라 실험적 연구에 있어서도 주로 임계유속 값을 구하는데에만 집중되어져 왔다[(1)~(4)]. 그러나 불안정일 때의 송수관의 모드 형상은 불안정 메카니즘의 이해 뿐만아니라 불안정 진동을 제어하는 방법을 찾기 위해서라도 상세하게 조사될 필요가 있다. 송수관 안정성문제의 권위자인 Paidouss[(5)]의 연구에서 조차도 고유치 분기와 불안정 모드를 혼동하여 쓰고 있다. 이러한 상황 하에서 최근 저자들[(6)]은 수평 외팔 송수관 모델에 대해 고유치 분기의 차수와 이에 상응하는 플러터 모드 형상을 정의하였다. 본 연구에서는 연직 외팔 송수관에 대해 플러터에 관계하는 고유치 분기와 이때의 불안정 모드에 대하여 연구하며, 중력을 고려하였을 때와 그렇지 않은 경우에 대한 임계 유속값을 구하는데 그 목적이 있다.

2. 이론

2.1 운동방정식

Fig. 1은 송수관의 전체 길이가 L이고, 단위 길이당 m_f의 비압축성 유체가 일정한 유속 U로 아래 방향으로 흐르고 있는 연직 외팔 송수관이다.

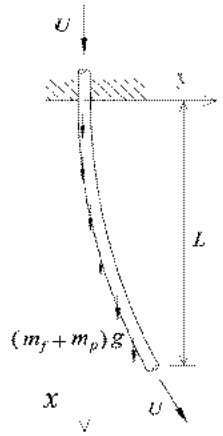


Fig. 1 A mathematical model of a vertical cantilevered pipe conveying fluid.

Fig. 1에서 송수관의 단위 길이당 질량은 m_p이고, x-y평면에서 미소 운동을 한다고 가정한다.

Fig. 1 모델에 대한 운동 방정식은 식(1)과 같다.

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4\partial t} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_f\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y + m_p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$+ (m_f + m_p)g\left[\frac{\partial y}{\partial x} + (L - x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = 0 \qquad (1)$$

식 (1)에 있어서 좌변의 제1항은 내부 감쇠에 의한 항, 제2항은 송수관의 굽힘강성에 의한 항, 제3항은 유동유체의 가속도에 의한 항, 제4항은 송수관의 질량관성에 의한 항, 제5항은 중력에 의한 항을 나타내고 있다.

한편, 경계조건에 관한 식은 다음과 같다.

$$y(0,t) = 0\ ,\quad -\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0\ ,$$
$$EI\frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^2\partial t} + EI\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0\ ,$$
$$EI\frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^2\partial t} + EI\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (2)$$

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표와 파라미터들을 이용한다.

$$\xi = \frac{x}{L}\ ,\quad \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}\ ,\quad \tau = \frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}\ ,$$
$$\eta = \frac{y}{L}\ ,\quad \gamma = \frac{EI}{LT}\sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}\ ,\quad u = VL\sqrt{\frac{m_f}{EI}}\ ,$$
$$\rho = -\frac{(m_f + m_p)gL^3}{EI} \qquad (3)$$

여기서, ξ와 η는 각각 무차원화된 x와 y의 좌표를 나타내고, τ는 무차원화된 시간을 나타낸다. 또한, β는 송수관의 질량비, γ는 내부감쇠 파라미터, ρ는 중력파라미터, u는 무차원화된 유속을 나타낸다.

식 (3)을 식 (1)과 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\gamma\frac{\partial^5\eta}{\partial\xi^4\partial\tau} + \frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4} + \frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^3} + 2u\beta^{1/2}\frac{\partial^4\eta}{\partial\tau\partial\xi^3} + u^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}$$
$$(1 - \beta)\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} + \rho\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0 \qquad (4)$$

$$\eta(0,\tau) = 0\ ,\quad -\frac{\partial\eta(0,\tau)}{\partial\xi} = 0$$
$$-\frac{\partial^2\eta(1,\tau)}{\partial\xi^2\partial\tau} - \gamma\frac{\partial^2\eta(1,\tau)}{\partial\xi^2} = 0\ ,$$
$$-\frac{\partial^3\eta(1,\tau)}{\partial\xi^2\partial\tau} - \gamma\frac{\partial^3\eta(1,\tau)}{\partial\xi^3} = 0 \qquad (5)$$

2.2 갤러킨 방법의 적용

식 (4)의 운동방정식의 해를 구하기 위해 갤러킨 방법을 이용한다.

$$\eta(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\tau)\,\phi_n(\xi) \qquad (6)$$

식 (6)에서 좌표함수 $\phi_n(\xi)$는 다음과 같다.

$$\phi_n(\xi) = \cosh\lambda_n\xi - \cos\lambda_n\xi - \sigma_n(\sinh\lambda_n\xi - \sin\lambda_n\xi) \qquad (7)$$

여기서, λ_n은 외팔송수관의 고유치이고, 계수 σ_n은 다음 식으로 주어진다.

$$\sigma_n = \frac{\cosh\lambda_n + \cos\lambda_n}{\sinh\lambda_n + \sin\lambda_n} \qquad (8)$$

식 (6)을 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\sum_{n=1}^{N}(A_{mn}\ddot{a}_n + B_{mn}\dot{a}_n + C_{mn}a_n) = 0\ ,$$
$$(m = 1,2,\cdots,N) \qquad (9)$$

여기서, 계수 A_{mn} , B_{mn} , C_{mn}은 다음과 같다.

$$A_{mn} = \delta_{mn}$$
$$B_{mn} = (\lambda^4_n\gamma)\delta_{mn} + 2u\beta^{1/2}\int_0^1\phi_n\phi'_m d\xi$$
$$C_{mn} = \lambda^4_n\delta_{mn} + u^2\int_0^1\phi_n\phi''_m d\xi + (u^2 - \rho)\int_0^1\phi_n\phi'''_m d\xi$$
$$+ \rho\int_0^1\xi\phi_n\phi''_m d\xi \qquad (10)$$

최종적으로 식 (9)는 다음과 같은 행렬형태 식으로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{\ddot{q}\}+[B]\{\dot{q}\}+[C]\{q\}=0 \quad (11)$$

한편, 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\dot{Z}\}=[P]\{Z\} \quad (12)$$

여기서,

$$\{Z\}=\begin{Bmatrix}\{q\}\\ \{\dot{q}\}\end{Bmatrix},$$

$$[P]=\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ [I] & [0]\end{bmatrix}$$

이고, $[I]$, $[0]$는 각각 단위행렬과 영행렬이다.

식 (11)을 다시 표현한 식 (12)의 해를

$$q_n(t)=\bar{q}_n e^{\lambda t} \quad (13)$$

와 같이 놓고 식 (13)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$|[P]-\lambda[I]|=0 \quad (14)$$

식 (14)의 특성근 λ는 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda=\sigma+i\omega_n \quad (i=\sqrt{-1}) \quad (15)$$

계의 안정성은 특성근 λ의 실수부분인 σ의 부호에 의해 다음과 같이 판별된다.

$$\begin{aligned}&\sigma<0 \ : \text{안정}\\ &\sigma=0 \ : \text{임계}\\ &\sigma>0 \ : \text{불안정}\end{aligned} \quad (16)$$

2.3 임계플러터 형상

플러터 불안정이 발생하는 임계유속 (u_{cr}, ω_{cr})에서의 특성 근은

$$\lambda_{cr}=i\omega_{cr} \quad (17)$$

가 된다.

따라서 변위벡터는 다음과 같이 된다.

$$q(x,t)=\{X_r\}\cos(\omega_{cr}t-\phi_r) \quad (18)$$

여기서, $\{X_r\}$는 고유벡터이고, 위상각 ϕ_r는 다음과 같다.

$$\tan\phi_r=\mathrm{Im}\{X_r\}/\mathrm{Re}\{X_r\} \quad (19)$$

3. 수치해석결과 및 고찰

3.1 고유치 분기의 유착과 전환

Fig. 2는 중력파라미터가 $\gamma=0.1$이고 내부감쇠가 없는 경우($\gamma=0.0$), 질량비 β가 0.520일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생하고, 이때의 임계유속 값 u_{cr}은 9.46이다. β값을 조금 증가시킨 $\beta=0.530$에서 내부감쇠가 없는 경우의 고유치 곡선을 Fig. 3에 나타내고 있는데, 여기서는 2차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 또한 임계유속값 u_{cr}은 9.52이다. 질량비의 변화에 따른 플러터가 발생하는 고유치 분기의 차수가 다른 것을 알 수 있다.

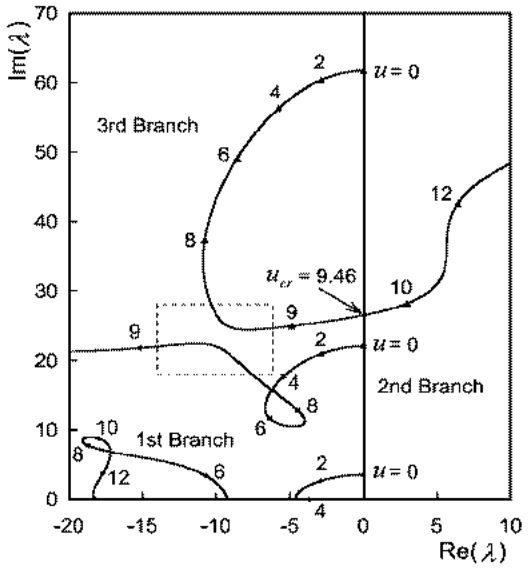


Fig. 2 diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for $\beta=0.520$ ($\gamma=0.1$, $\zeta=0.0$).

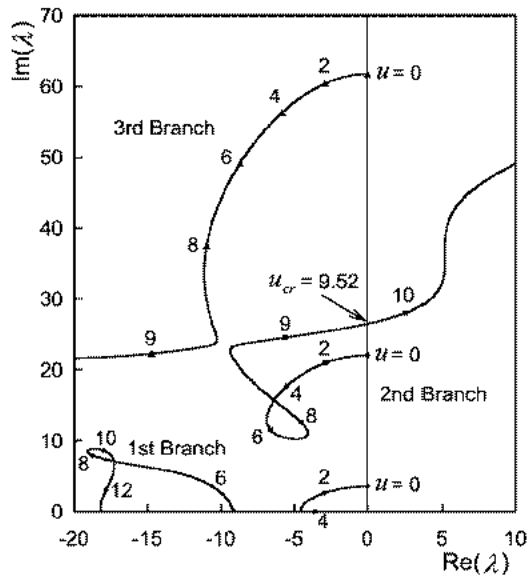


Fig. 3 Diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for β 0.200 (γ 0.1, ν 0.0).

이제 플러터가 발생하는 고유치 분기를 상세히 관찰하기 위해서 Fig. 4에서는 Fig. 2의 점선부분과 β= 0.525, 0.528, 0.529일 때의 고유치 분기의 궤적을 확대하여 나타내었다. 3차 분기와 2차 분기가 유착하고 전환이 발생하여 β=0.529에서는 2차 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다.

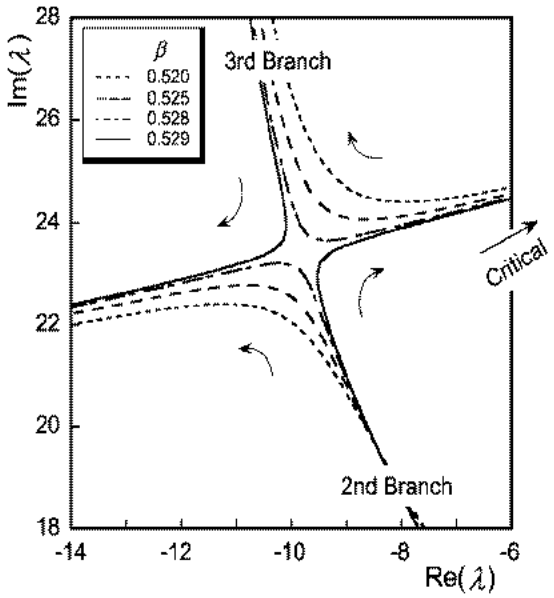
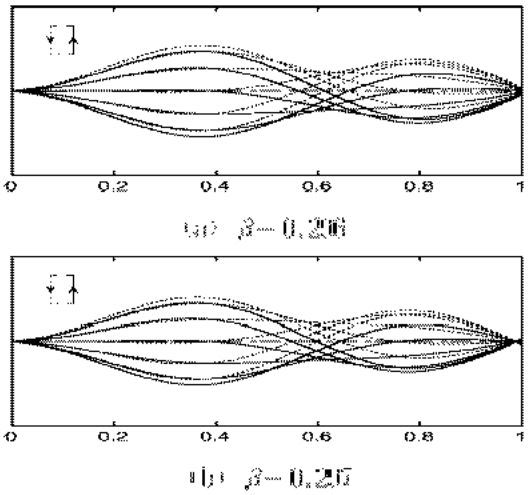


Fig. 4 Transfer of instability branch from the third to the second branch.

3.2 플러터 모드형상

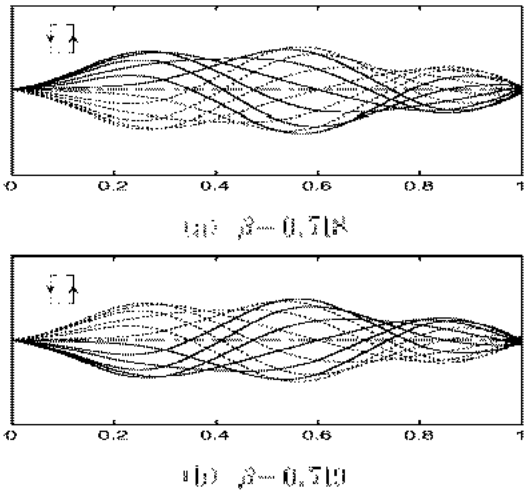
Fig. 5와 Fig. 6은 중력파라미터 γ가 0.1이고 각각 내부감쇠가 없는 경우와 있는 경우에 대해 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림들이며, 각각 1/12의 주기로 최대진폭이 송수관 전체길이의 1/10에 해당된다. 먼저 Fig. 5(a)는 γ 0.1, ν 0.0이고 β가 0.296일 때의 플러터 모드형상으로 하나의 이동절점(moving node)을 가지며 준(quasi) 2차 모드 형이다. Fig. 5(b)는 β가 0.297일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 두개의 이동절점을 가지는 준3차 모드형인 것을 알 수 있다.



(a) β= 0.296

(b) β= 0.297

Fig. 5 Flutter mode configurations for the gravity parameter γ 0.1 (ν 0.0).



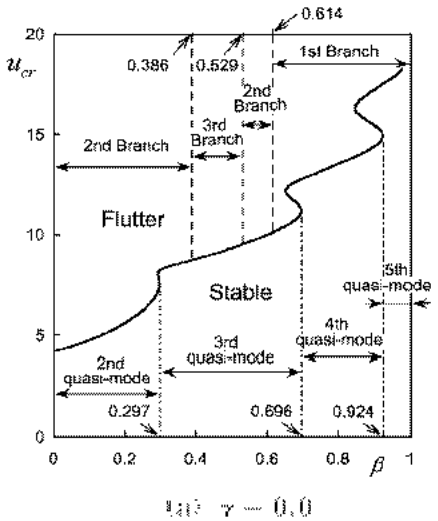
(a) β= 0.518

(b) β= 0.519

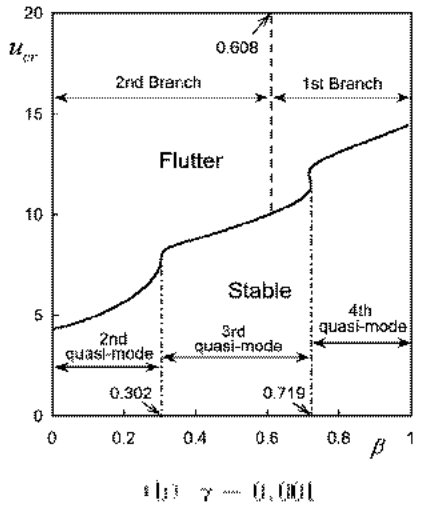
Fig. 6 Flutter mode configurations for the gravity parameter γ 0.1 (ν 0.001).

Fig. 6(a)는 α 0.1, γ 0.001이고 β가 0.718일 때의 플러터 모드 형상으로 두개의 이동절점(moving node)을 가지며 준3차 모드 형이다. Fig. 6(b)는 β가 0.719일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 세개의 이동절점을 가지는 준4차 모드형인 것을 알 수 있다.

3.3 안정성 선도



(a) $\gamma = 0.0$

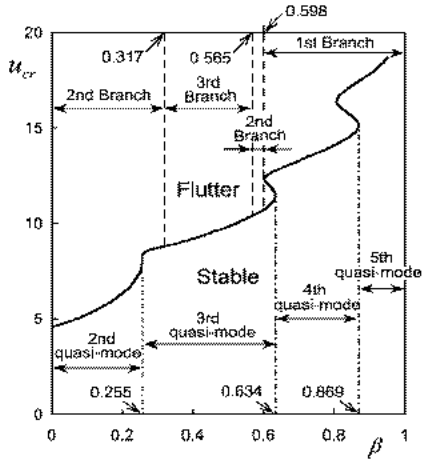


(b) $\gamma = 0.001$

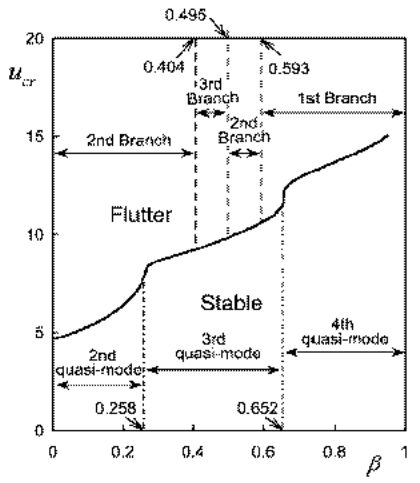
Fig. 7 Stability map and the critical mass ratios for $\alpha = 0.1$.

Fig. 7은 중력 파라미터가 α 0.1이고, 내부 감쇠를 무시한 경우와 내부 감쇠를 고려한 경우의 안정성 선도이다. Fig. 7(a)의 내부 감쇠를 무시한 경우, $0 < \beta < 0.385$의 구간에서는 2차 고유치 분기에서 플러터가 발생하고, β 0.385에서 2차 고유치 분기에서 3차 고유치 분기로 전환이 발생한다. 따라서 $0.385 < \beta < 0.524$의 구간에서는 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 또한 $0.524 < \beta < 0.613$에서는 다시 2차 고유치 분기에서 플러터가 발생하고, $0.613 < \beta < 1$에서는 1차 고유치 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다.

Fig. 7(b)는 내부 감쇠를 고려한 경우로 이 그림에서는 $0 < \beta < 0.005$의 구간에서 2차 고유치 분기에서 플러터가 발생하고, β 0.005에서 2차 고유치 분기에서 1차 고유치 분기로 전환이 발생한다. 그리고 나머지 모든 구간에서는 1차 고유치 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다.



(a) $\gamma = 0.0$



(b) $\gamma = 0.001$

Fig. 8 Stability map and the critical mass ratios for $\alpha = 10$.

Fig. 7과 동일한 방법으로 중력파라미터가 $\gamma = 10$일 때 내부 감쇠를 무시한 경우와 내부 감쇠를 고려한 경우의 안정성 선도를 Fig. 8에 나타내었는데 중력파라미터 값의 큰 차이에 따라 임계유속뿐만 아니라 고유치 분기 차수 및 플러터를 유발하는 진동형 모드차수가 상이함을 알 수 있다.

3.4 질량비와 중력효과

Fig. 9와 Fig. 10은 각각 내부감쇠가 없는 경우와 있는 경우, 질량비 β의 변화에 따르는 중력효과를 나타낸 그림들이다. 동일 질량비에 대해 내부감쇠의 유무에 관계없이 중력파라미터가 큰 경우가 큰 임계유속 값을 보임을 알 수 있다.

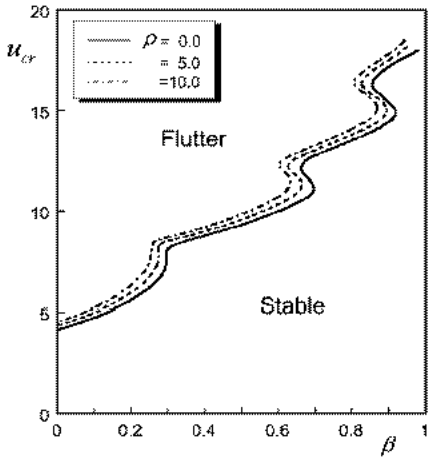


Fig. 9 Critical flow velocity depending on the mass ratio of the pipe and gravity parameter ($\gamma = 0.0$).

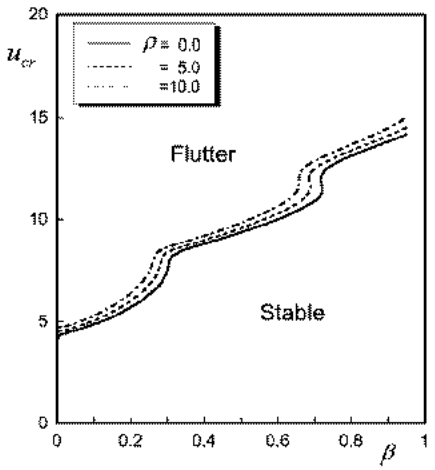


Fig. 10 Critical flow velocity depending on the mass ratio of the pipe and gravity parameter ($\gamma = 0.001$).

4. 결론

본 논문에서는 내부 유동유체의 흐름을 받는 연직 외팔 송수관의 동적안정성에 미치는 중력효과를 다루었으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1)내부감쇠가 없는 경우와 있는 경우 모두 동일 질량비에 대해 중력효과가 클수록 임계유속값은 증가된다.

(2)중력효과가 작은 경우나 큰 경우 모두에 있어, 내부감쇠의 유무에 관계없이 플러터가 발생하는 고유치 분기의 차수와 불안정 모드의 차수와의 관계가 일치하지 않는다.

참고문헌

1. Benjamin, T. B., "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp.457 ~ 486, 1961.
2. Benjamin, T. B., "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp.487 ~ 499, 1961.
3. Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 293, pp.512 ~ 527, 1966.
4. Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (II.Experiment)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol.293, pp.528 ~ 542, 1966.
5. Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., "Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid", Journal of Sound and Vibration, Vol.100, pp.257 ~ 270, 1985.
6. Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Computers and Structures, Vol. 80, pp.1231 ~ 1241, 2002.