

강소성 유한요소해석에서 해의 수렴 가속화에 관한 연구

최영* (인제대 기계자동차공학부)

A Study on the Acceleration of the Solution Convergence for the Rigid Plastic FEM

Y. Choi (Mecha. & Automotive Eng. Dept. INJE Univ.)

ABSTRACT

In this paper, the acceleration is studied for the rigid-plastic FEM of metal forming simulation. In the FEM, the direct iteration and Newton-Raphson iteration are applied to obtain the initial solution and accurate solution respectively. In general, the acceleration scheme for the direct iteration is not used. In this paper, an Aitken accelerator is applied to the direct iteration. In the modified Newton-Raphson iteration, the step length or the deceleration coefficient is used for the fast and robust convergence. The step length can be determined by using the accelerator. The numerical experiments have been performed for the comparisons. The faster convergence is obtained with the acceleration in the direct and Newton-Raphson iterations.

Key Words : Acceleration(가속화), Direct Iteration(직접반복법), Newton-Raphson Iteration(뉴턴-랩슨 반복법), Rigid Plastic FEM(강소성 유한요소법), Step Length(스텝 길이), Convergence(수렴)

1. 서론

현재 금속성형 공정에 대한 해석법으로 강소성 유한요소법¹이 널리 이용되고 있다. 강소성 유한요소법에서는 주어진 시간에 대해 반복법을 이용하여 절점속도를 결정한다. 절점속도가 수렴된 해에 오차가 큰 경우, 직접반복법(direct iteration)을 이용하며, 수렴된 해에 근사할 경우, 뉴턴랩슨 반복법(Newton-Raphson iteration)을 이용한다.

Oh^2 가 제한한 직접반복법은 수렴성이 우수하여 초기 해를 구할 경우와 다공질 재료³(porous material)의 성형해석과 같은 해의 수렴성이 낮은 공정의 해석에 이용된다. 뉴턴-랩슨 반복법은 수렴속도가 빠른 장점이 있으나 반복과정에서 해가 발산(divergence)할 수 있다. 일반적으로 해의 발산을 막고 빠른 수렴을 위해, 수정된 뉴턴-랩슨법(modified Newton-Raphson)이 이용된다.

강소성 유한요소 해석의 가속화를 위해, 수정된 뉴턴-랩슨법에서 이용되는 스텝길이(step length) 혹은 감속계수(deceleration coefficient)를 결정하는 방법에 관해 몇 가지 방법이 발표되었다.

Im^4 는 3차원 형상압연(shape rolling) 공정의 강소성 유한요소 해석에서 수정된 뉴턴-랩슨 반복법의

스텝길이를 뉴턴법으로 결정하였다. Hwang⁵는 수정된 뉴턴-랩슨 반복법의 스텝길이를 다항식 보간을 이용하여 결정하는 방법을 제안하였다. Liu⁶등은 DFP(Davidon Fletcher and Powell)법과 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)법을 이용하여 스텝길이를 결정하는 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 Aitken가속화 방법⁷(an Aitken accelerator)을 강소성 유한요소 해석에 도입하여 직접 반복법과 뉴턴-랩슨 반복법의 수렴속도를 향상시키고자 한다.

2. 강소성 유한요소법

2.1 강소성 유한요소법

강소성 유한요소법에서 비압축성 조건을 포함하는 범함수의 변분은 아래와 같다.¹

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta\bar{\epsilon} dV + K_p \int_V \dot{\epsilon}_v \delta\dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_f} \bar{I}_I \delta I_I dS = 0 \quad (1)$$

여기서, $\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2)\sigma'_y \sigma'_y}$, $\bar{\epsilon} = \sqrt{(2/3)\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$ 이며, $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii}$ 이다.

2.2 직접반복법

Oh²가 제안한 직접반복법은 식(1)을 선형화하여 절점속도를 직접 구하는 방법으로 수렴성이 우수한 장점이 있다. 구성방정식(constitutive equation)을 선형으로 가정하고 상대 미끄럼 속도와 마찰 응력과 의 관계를 선형으로 가정하면, 식(1)은 선형화 된다.¹

유한요소 이산화 절차를 거쳐 아래와 같은 연립 방정식을 반복적으로 해석하여 수렴된 절점 속도를 구한다.

$$K_d v = f_d \quad (2)$$

여기서, K_d 는 직접반복법에서 얻어지는 강성행렬이며, f_d 는 경계조건이며, v 는 절점속도이다.

본 연구에서는 직접반복법의 수렴한계는 아래와 같이 설정하였다.

$$\left\| \frac{\Delta v}{v} \right\| \leq 5 \times 10^{-3} \quad (3)$$

강소성 유한요소법에서 직접반복법을 사용하는 방법은 3가지이다. 먼저 해석초기에 초기 해를 얻기 위해 사용하고, 뉴턴-랩슨 반복법이 수렴하지 않을 경우, 사용하는 방법이 있으며, 매 시간스텝(time step)에서 직접반복법으로 수렴된 해를 얻고 뉴턴-랩슨 반복법을 사용하는 방법이 있다. 또한 다공질 재료와 같은 경우, 직접반복법만 사용하여 수렴된 해를 얻는 방법이 있다.

본 연구에서는 시간스텝(time step)마다 직접반복법을 사용하는 방법과 해석초기와 뉴턴-랩슨 반복법이 수렴하지 않을 경우에만 직접반복법을 사용하는 방법에 대해 가속화 기법을 적용하였다.

2.3 뉴턴-랩슨 반복법

유한요소 이산화 절차를 거쳐 뉴턴-랩슨법을 이용하면, 식(1)은 아래 식(4)과 같은 선형화된 연립방정식으로 변화되고 해를 반복적으로 갱신하여 수렴된 절점속도를 구한다.

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial v_j} \right]_{v=v_0} + \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial v_j \partial v_j} \right]_{v=v_0} \Delta v_j = 0 \quad (4)$$

식(4)의 초기해는 직접반복법으로 구한다. k 번째 반복과정에서 수정된 뉴턴-랩슨 반복법(modified Newton-Raphson iteration method)의 절점속도의 갱신은 식(5)와 같다.

$$v_{k+1} = v_k + \alpha \cdot \Delta v_k \quad (5)$$

여기서, α 는 스텝길이(step length) 혹은 감속계수(deceleration coefficient)라 하며, 양의 값을 갖는다.

본 연구에서는 뉴턴-랩슨 반복법의 수렴한계는 아래와 같이 설정하였다.

$$\left\| \frac{\Delta v}{v} \right\| \leq 10^{-5}, \left\| \frac{\partial \pi}{\partial v} \right\| \leq 10^{-5} \quad (6)$$

3. 가속화

3.1 Aitken 가속화

Irons⁷가 제안한 Aitken 가속화 방법은 반복적인 계산을 통해 수렴된 해를 얻을 경우에 적용될 수 있는 방법이다.

반복 기법은 아래와 같이 초기 해를 이용하여 새로운 해를 얻는 방법이다. i 번째 반복을 식(7)에 나타낸다. V 는 반복법을 통해 구하고자 하는 벡터(unknown vector)이며 강소성 유한요소법에서는 절점속도(nodal velocity)이다.

$$V_{i,new} = V_{i,pre} + \Delta V_i \quad (7)$$

여기서, ΔV_i 는 직접 반복법, 식(2) 혹은 뉴턴-랩슨 반복법, 식(4)으로 구한다.

식(7)의 해의 수렴성과 수렴 속도를 향상시키는 가속화 방법은 아래와 같다.

$$V_{i,mod} = V_{i,new} - R_i \cdot \Delta V_i \quad (8)$$

식(8)은 식(5)와 유사한 개념을 나타낸다. 식(8)의 R_i 값은 아래와 같다.

$$R_i = R_{i-1} + (R_{i-1} - 1) \frac{(\Delta V_{i-1} - \Delta V_i)^T \Delta V_i}{\|(\Delta V_{i-1} - \Delta V_i)\|^2} \quad (9)$$

식(8)을 이용하면, 아래와 같이 R_i 값을 이용하여 i 번째 반복에서 얻어진 V 를 수정한다. 식(9)은 반복초기에 사용할 수 없으며, 반복초기의 R_i 값은 통상 영(zero)을 사용한다. 가속화가 없는 경우, R_i 값이 영(zero)이다.

$$\begin{aligned} V_{i,mod} &= V_{i,new} - R_i \cdot \Delta V_i \\ &= V_{i,pre} + \Delta V_i - R_i \cdot \Delta V_i \\ &= V_{i,pre} + (1 - R_i) \cdot \Delta V_i \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)은 식(5)와 같은 형태임으로 뉴턴-랩슨법의 스텝길이를 가속화 방법으로 결정할 수 있음을

보인다. 또한 직접반복법에서는 갱신된 절점 속도를 식(2)로부터 얻을 수 있으므로 식(10)을 이용하여 가속화된 해를 얻을 수 있다.

3.2 뉴턴-랩슨 반복법의 스텝길이

뉴턴-랩슨 반복법에서 스텝길이는 식(9)~(10)을 이용하여 결정할 수 있으며, 또한 최적화 기법을 통하여 결정될 수 있다. 즉, 식(5)에서 목적함수의 강하방향인 Δv_k 라면, 변수가 $\alpha \cdot \Delta v_k$ 만큼 변화하여 목적함수가 최소가 되도록 α 를 결정한다.

식(1)로부터, 스텝길이에 대해 아래 식(11)을 얻는다.

$$g(\alpha) = \frac{d\pi}{d\alpha} = \frac{\partial \pi}{\partial v_i} \Delta v_i = 0 \quad (11)$$

식(11)은 스텝길이를 최적화 개념으로 결정하는 방법으로 식(11)의 해를 뉴턴-랩슨 반복법을 이용하여 결정할 수 있으며 식(11)을 다항식으로 가정하여 스텝길이를 결정할 수 있다.⁵

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \frac{g(\alpha_n)}{g'(\alpha_n)} \\ &= \alpha_n - \left(\frac{\partial \pi}{\partial v_k} \Delta v_k / \left(\Delta v_i^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_i \partial v_j} \Delta v_j \right) \right) \alpha = \alpha_n \end{aligned} \quad (12)$$

스텝길이를 결정하는 방법으로 식(5)의 반복과정이 수렴되고 있으면 스텝길이를 증가시키고 해가 수렴하지 않거나 발산하게 되면 스텝길이를 작게하여 사용하는 경험적인 방법(empirical method)¹이 있다.

본 연구에서는 스텝길이를 결정하기 위해, 경험적 방법, 뉴턴-랩슨법 및 가속화 방법을 적용하여 결과를 비교하였다.

4. 결과 및 고찰

본 연구에서는 강소성 유한요소법에서 반복해석법의 가속화를 위해 업세팅(upsetting), 사이드 압축(side pressing) 및 압출(extrusion) 공정을 해석한다. 개발된 프로그램은 AMD Athlon XP 2400+ CPU를 이용하여 연산되었다.

4.1 업세팅

축대칭 업세팅 공정을 가속화 기법을 적용하여 강소성 유한요소 해석을 수행하고자 한다. 절점수는 441이고 요소수는 400인 1/4단면에 대한 유한요

소모형을 사용한다. 이를 Fig. 1에 나타낸다. 마찰상수 $m=0.5$ 이며, 유동응력(flow stress)는 식(13)와 같다. 대칭면을 기준으로 높이는 25mm이고, 반경이 25mm이다. 압축 종료 위치는 초기 높이에 대해 60%인 10mm로 한다. 초기 속도는 -1mm/sec 이다. 시간증분은 0.1로 하였다.

$$\bar{\sigma} = 10\bar{\epsilon}^{0.1} \text{ (MPa)} \quad (13)$$

직접반복법에서 가속화법의 효율성을 살펴보기 위해 아래와 같은 조건으로 업세팅 공정을 해석하였다. 초기 해를 구하기 위해 직접반복법을 사용하는 경우와 각 시간스텝에 직접반복법을 적용하는 방법을 직접반복법에 가속화 기법을 적용하여 비교하고자 한다. 뉴턴-랩슨 반복법에서 스텝길이는 경험적 방법을 이용하였다. 각 경우의 해석에서, 반복과정을 아래 Table 1과 2에 정리하였다.

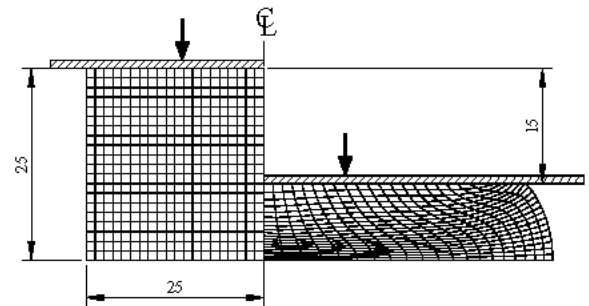


Fig. 1 FE-model for the upsetting of solid billet

Table 1은 직접반복법이 전체 해석과정에서 1회 적용되었을 경우의 해석결과로서, 가속화 기법을 적용함으로써 직접반복법의 반복횟수는 34% 감소하였다. 그러나 뉴턴-랩슨법에서 스텝길이를 경험적인 방법으로 결정함으로 해석시간과 뉴턴-랩슨 반복법의 반복횟수는 거의 동일하다.

Table 1 Direct Iteration applied to the initial time step on the simulation of the upsetting

Method	Direct	Newton-Raphson	Total	Time [Sec]
Accelerated	12	1079	1091	86
Non	18	1082	1100	87

Table 2에 각 시간 스텝에 직접반복법으로 수렴시킨 후, 뉴턴-랩슨법으로 수렴시킨 해석과정을 나타낸다. 가속화된 직접반복법은 약 7.4% 반복횟수

가 작았으며, 수렴된 해의 정밀도가 높아서 뉴턴-랩슨 반복법의 반복횟수도 약 17.5% 줄어 들었음을 알 수 있다. 그리고 초기에만 직접반복법을 적용하는 방법에 비해 해석시간이 약 13% 단축되었다.

가속화된 직접반복법을 사용할 경우, 직접반복법의 반복회수를 줄일 수 있었다. 그리고 높은 정밀도의 해를 얻어 뉴턴-랩슨 반복법의 반복회수가 줄었다.

Table 2 Direct Iteration applied to the each time step on the simulation of the upsetting

Method	Direct	Newton-Raphson	Total	Time [Sec]
Accelerated	325	519	844	67
Non	351	629	980	77

4.2 사이드 압축

뉴턴-랩슨 반복법에 가속화 기법의 적용성을 알아보기 위해, 사이드 압축(side pressing) 공정의 해석에 해석한다. 절점수가 228이고 요소수는 198인 1/4 단면에 대한 유한요소모델을 이용하였다. 이를 Fig. 2에 나타낸다. 다른 해석조건은 업세팅의 경우와 같다.

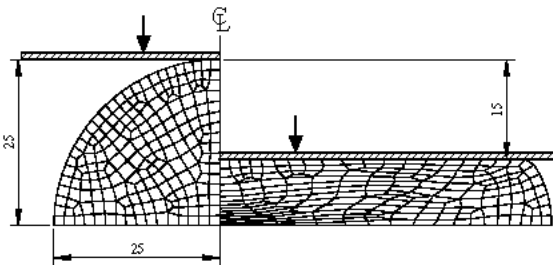


Fig. 2 FE-model for the side-pressing

가속화된 직접반복법은 전체 해석과정에서 초기 해를 얻기 위해 1회 적용하였으며, 뉴턴-랩슨 반복법에서 스텝길이를 경험적 방법, 뉴턴-랩슨법 및 가속화 방법을 이용하여 해석하였다. 해석결과를 Table 3에 나타낸다.

Table 3의 반복 해석결과를 살펴보면, 경험적 방법¹으로 뉴턴-랩슨 반복법의 해를 구한 경우보다 가속화 기법을 사용한 경우 해석결과가 우수하다. 반복회수는 단지 16%에 불과하며 해석시간 역시 17%에 불과하다. 식(12)를 이용한 경우, 즉 뉴턴법을 이용하여 스텝길이를 결정한 경우에는 수렴된 해를 얻을 수 없었다.

Table 3 Step length in Newton-Raphson iteration for the simulation of side pressing

Method for Step length	Direct	Newton-Raphson	Total	Time [Sec]
Accelerated	11	774	785	23
Empirical	11	4715	4726	134
Newton	11	-	-	-

5. 결론

본 연구에서는 강소성 유한요소법의 해 수렴 과정에서 수렴속도의 향상을 위한 가속화 기법이 수치적 실험으로 평가되었다.

각 시간스텝에서 직접반복법을 이용한 후 뉴턴 반복법을 사용하는 것이 수렴성이 좋고 수렴속도 또한 빠름을 알 수 있었다.

가속화 기법을 적용할 경우, 직접반복법 및 뉴턴-랩슨 반복법에서 보다 빠른 수렴성을 보이는 것을 알 수 있었다.

향후 보다 복잡한 압출공정에 가속화 기법을 적용하여 그 타당성을 고찰하고자 한다.

참고문헌

1. Kobayashi S., Oh, S. I. and Altan T., Metal forming and the finite element method, New York: Oxford University Press, 1989.
2. Oh, S. I., "Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with Arbitrarily Shaped Dies," Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, p.479, 1982.
3. Deform Co., Manual of Deform 3D Ver. 5.0, pp. 29
4. 임장근, BFGS 반복법에 의한 선재압연 공정의 시뮬레이션, 대한 기계학회 '95년도 고체 및 구조역학부문 학술대회 논문집, PP.5~12, 1995.
5. 황상무, 3차원 소성가공 공정 CAE 시스템 개발, 연구보고서, 한국과학재단, 1998.
6. Liu, Xiao-Lin, Lam, Y. C. and Thomson, P. F., "Single Parameter Accelerated Modified Newton-Raphson Methods for Rigid Plastic FE Analysis", J. of Materials Processing Technology," Vol. 123 pp. 385-392, 2002.
7. Irons, Bruce M., "A Version of the Aiken Accelerator for Computer Iteration," Int. J. of Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, 275-277, 1969.