

## 면내 회전 자유도가 추가된 hybrid Trefftz 평면 요소와 DKMQ 요소를 이용한 4 절점 평면 셸 요소의 개발

최누리\*, 추연석, 이승규, 이병채(한국과학기술원 기계공학과)

Development of a flat shell element by using the hybrid Trefftz plane element with drilling D.O.F. and the DKMQ element

N. Choi, Y. S. Choo, S. K. Lee, B. C. Lee(Mechanical Eng. Dept., KAIST)

### ABSTRACT

We develop a new four-node flat shell element which is accurate, efficient, and suitable to be used on general purpose. The new element has a hybrid Trefftz element with drilling degrees of freedom as a membrane part. We define the two independent displacement field: the internal displacement field that satisfies governing equations in the domain a priori and the boundary displacement field that is usually used as a conventional finite element method. The hybrid Trefftz variational formulation connects these two displacement fields on the boundary of the domain. To add drilling degrees of freedom, we introduce the Allman's quadratic displacement field to the boundary displacement field. As a result, our flat shell element has 6 degrees of freedom per a node. We also use the well-known DKMQ plate bending element for the plate part of the proposed element. The DKMQ element satisfies Mindlin-Reissner's plate theory along the edge of the element and gives proper behavior regardless of the thickness. A series of numerical experiments shows that the performance of the new element such as accuracy, rate of convergence, robustness to mesh quality, and so on.

**Key Words** : Finite element (유한 요소), drilling degrees of freedom (면내 회전 자유도), Flat shell element(평면 셸 요소), Hybrid Trefftz (하이브리드 트레프트츠), DKMQ element (DKMQ 요소)

### 1. 서론

셸 요소는 막 변형과 굽힘 변형을 동시에 표현할 수 있어 보 요소와 함께 유한 요소법에서 3 차원 구조물을 해석할 때 가장 많이 사용되며, 가장 중요한 역할을 하고 있는 요소이다. 셸 요소는 그 수식화에 따라 크게 평면 셸 요소, 곡면 셸 요소, 그리고 응축 셸 요소로 나뉠 수 있다(1). 곡면 셸 요소는 곡면 형상을 잘 표현할 수 있지만, 그 형상에 따라 수식화 과정이 달라져야 하며, 요소 사이의 적합 조건을 만족하기 힘들고, 수식화가 까다로운 단점이 있어 근래에는 잘 쓰이지 않고 있다. 등매개 변수법의 개발에 따라 3 차원 연속체 요소의 절점을 응축시켜 만든 응축셸 요소는 3 차원 지배 방정식을 앓은 구조인 셸 요소에 맞도록 절점에서의 방향 벡터를 도입하는 외에 별다른 가정 없이

사용하였다. 평면 셸 요소는 막 요소와 평판 요소의 단순한 조합으로 만들어지며, 수식화 과정이 비교적 간단하고, 형상이 단순하여 사용하기 편리한 장점을 가지고 있어 수식화가 내포하고있는 몇가지 단점들에도 불구하고 많은 상용 프로그램들이 평면 셸 요소를 기본으로 사용하고 있다.

셸 요소는 3 차원 공간상에서 정의되기 때문에 절점당 6 자유도를 모두 가지고 있는 경우가 유리한데, 이를 위해 막 강성 부분에 면내 회전 자유도를 가지고 있어야 한다. 면내 회전 자유도는 Allman 이 2 차 변위장을 사용하여 도입하여 요소의 면내 거동을 개선시킨 이후로 많은 발전이 있어왔다(2,3). Cook 은 2 차 요소의 강성 행렬에 변환 행렬을 곱하는 방법으로 Allman 과 동일한 결과를 얻었으며(4), MacNeal 과 Harder 는 Allman 의 요소가 가진 가상 모드(spurious mode)를 적절히 제거하여 성

능을 개선하였다(5).

셀 요소의 굽힘 거동은 굽힘 강성에 의해 좌우 되는데, 초기의 연구들은 대부분 Kirchhoff 의 얇은 판 이론에 근거하여 이루어졌다. 가장 주목할만한 요소인 DKT(discrete Kirchhoff triangle) 요소는(6,7,8) 요소의 변을 따라 Kirchhoff 의 얇은 판 이론을 적용하였다. 이후 Mindlin-Reissner 의 두꺼운 판 이론에 따라 전단 변형이 고려된 요소들이 개발되었고(9), Katili 는 Mindlin-Reissner 의 두꺼운 판 이론을 DKT/DKQ 요소와 비슷한 방법으로 요소의 변을 따라 적용하여 DKMT/DKMQ(discrete Kirchhoff - Mindlin triangle / quadrilateral) 요소를 개발하였다(10,11).

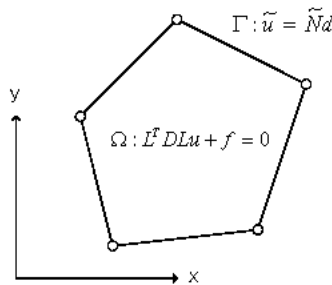


Fig. 1 Two independent displacement fields.

한편, 혼합법의 일종인 hybrid Trefftz 방법은 Fig. 1 과 같이 요소의 내부와 경계에서 독립적으로 변위를 근사하고, 이 두 변위장이 요소의 경계에서 서로 같다는 조건을 변분적으로 부여한다. Jirousek 은 hybrid Trefftz 의 변분 원리에 근거하여 평면 요소를 개발하였으며(12,13,14), Piltner 는 내부 변위장을 구성할 때 구멍이나 크랙 등의 요소 내부 특이성을 고려할 수 있는 함수를 추가하는 연구를 하였다(15). 그러나 이러한 장점에도 불구하고 hybrid Trefftz 평면 요소들은 기본적인 정확성과 수렴 속도 등의 성능이 많이 떨어졌다.

본 논문에서는 hybrid Trefftz 의 평면 요소에 Allman 의 변위장을 도입하여 면내 회전 자유도를 추가함으로써 요소의 성능을 높임과 동시에(16), DKMQ 요소와 결합하여 평면 셀 요소를 만들어 절점당 6 자유도를 모두 가지면서 성능이 우수한 평면 셀 요소를 개발하고자 한다.

## 2. 셀 요소 수식화

### 2.1 면내 회전 자유도를 가진 hybrid Trefftz 평면 요소

Hybrid Trefftz 요소는 Fig. 1 과 같이 독립적으로 근사된 두 변위장을 Hybrid Trefftz 변분 수식화에

의해 요소의 경계에서 같도록 조건을 주게 된다. 이를 위한 변분 수식화는 다음과 같다.

$$J(u, \tilde{u}) = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{T}_i \tilde{u}_i d\Gamma_T - \int_{\Gamma} t_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma. \quad (1)$$

식에서  $u$  는 요소 내부에서 지배 방정식을 만족하는 내부 변위장을,  $\tilde{u}$  는 요소 경계에서 정의되는 전통적인 유한 요소 근사에 의한 경계 변위장을 의미한다. 이 식에 변분을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\delta J(u, \tilde{u}) = - \int_{\Gamma} \delta T_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{T}_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma \quad (2)$$

이 식에서 사용될 내부 변위장과 외부 변위장을 근사하여 대입하면 요소의 수식화가 마무리 된다. 먼저 내부 변위장은 지배 방정식을 만족해야 하므로, 평면 문제의 지배 방정식을 만족하는 일반해와 특이해를 다음과 같이 구한다.

$$\{u\} = \{u_p\} + [N]\{c\} \quad (3)$$

식에서 특이해는 문제의 특성에 따라 만족시켜 게 되며, 일반해는 Mushkelishvili 의 복소함수식에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$2\mu u = \text{Re}[\kappa F(z) - z\bar{F}'(\bar{z}) - \bar{G}(\bar{z})] \quad (4a)$$

$$2\mu v = \text{Im}[\kappa F(z) - z\bar{F}'(\bar{z}) - \bar{G}(\bar{z})] \quad (4b)$$

여기에서 상수  $\mu$  는 전단 계수,  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  이며, 복소수  $z = x + iy$  이다. 복소 함수 F 와 G 는 각각 복소수 z 의 단순한 멱급수로 나타나는 조합을 사용하였다. 이에 따라 변위와 응력 관계를 적용해보면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = \{\sigma_p\} + \sum_j \Psi_j c_j = \{\sigma_p\} + [\Psi]\{c\}$$

$$\{T\} = [A]\{\sigma\} = \{T_p\} + \sum_j \Theta_j c_j = \{T_p\} + [\Theta]\{c\}$$

한편, 경계 변위장은 회전 자유도를 추가하기 위해 요소의 한 변에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u = \tilde{N}_{11}u_1 + \tilde{N}_{12}u_2 + \frac{(y_2 - y_1)}{2} \tilde{N}_{11}\tilde{N}_{12}(\omega_2 - \omega_1) \quad (5a)$$

$$v = \tilde{N}_{11}v_1 + \tilde{N}_{12}v_2 + \frac{(x_2 - x_1)}{2} \tilde{N}_{11}\tilde{N}_{12}(\omega_2 - \omega_1) \quad (5b)$$

이렇게 근사된 변위를 식 (2)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta\{c\}^T \left[ \int_{\Gamma} \Theta^T \{u_p\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \Theta^T N d\Gamma \{c\} - \int_{\Gamma} \Theta^T \tilde{N} d\Gamma \{d\} \right] = 0 \quad (6a)$$

$$\delta\{d\}^T \left[ \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \{T_p\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \Theta d\Gamma \{c\} - \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \{\bar{T}\} d\Gamma \right] = 0 \quad (6b)$$

이 식에서 내부 변수  $c$  를 소거하여 하나의 식으로 정리하면 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\{g\} - [G]^T [H]^{-1} \{h\} + [G]^T [H]^{-1} [G] \{d\} = 0 \quad (7)$$

여기서  $\{h\} = \int_{\Gamma} \Theta^T \{u_p\} d\Gamma$ ,  $[H] = \int_{\Gamma} \Theta^T N d\Gamma$ ,  $[G] = \int_{\Gamma} \Theta^T \tilde{N} d\Gamma$ 이며, 이 식은 결국 다음과 같이 간단하게 써여질 수 있다.

$$[K] \{d\} = \{f\} \quad (8)$$

## 2.2 평면 셀 요소의 수식화

DKMQ 평판 요소의 수식화는 Katili 의 연구(11)에 자세히 나와있으므로 본 논문에서는 이를 이용한 셀 요소의 수식화에 대해 기술한다. 평면 요소와 평판 요소를 결합하여 일반적인 평면 셀 요소를 만드는 과정은 다음과 같다.

$$[K_{shell}] \{d\} = \begin{bmatrix} K_m & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ d_p \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서  $K_{shell}$ ,  $K_m$ ,  $K_p$ 는 각각 셀 요소의 전체 강성, 막 강성, 판 요소의 강성을 의미한다. 이 경우 회전 자유도에 대한 강성을 막 강성이 가지고 있기 때문에 식 (9)와 같이 단순한 행렬 결합으로 간단히 평면 셀 요소를 구성할 수 있다.

## 3. 수치 예제

### 3.1 조각 시험(Patch test)

MacNeal 과 Harder 의 제안에 따른 조각 시험을 실행하였다(17). 막 거동에 경우 새롭게 제안된 요소가 면내 회전 자유도를 가지고 있기 때문에 조각의 경계에서 회전 자유도를 고정시키는 조건을 더

해주었으며 굽힘 거동의 경우 MacNeal 과 Harder 의 제안대로 시험하였다. 제안된 요소는 두가지 시험에 대해 모두 조각시험을 통과하였다.

### 3.2 Cook 의 문제

제안된 셀 요소의 막 거동의 정확성과 수렴 성능을 평가하기 위해 Cook 의 문제를 해석해 보았다. 해석 결과는 MSC/NASTRAN 의 CQUAD4 요소, STRA-D 의 MEAS4 요소(18), QM6 요소(19), Allman 의 요소(ALLMAN), Jirousek 의 hybrid Trefftz 평면 요소(HT)와 비교하여 Fig. 2 에 나타내었다.

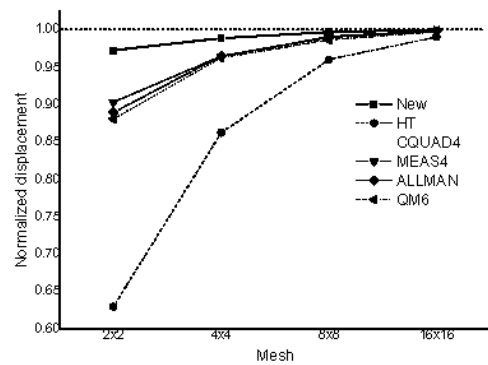


Fig. 2 Tip displacement of Cook's problem.

결과를 살펴보면, 제안된 요소의 정확도와 수렴 속도가 다른 비교 요소들에 비해 가장 좋은 것을 알 수 있다. 특히 회전 자유도가 추가되지 않은 hybrid Trefftz 요소에 비해 성능 향상이 매우 큰 것을 볼 수 있다.

### 3.2 직선 보 문제

요소의 면내 전단 변형에 대한 구속 현상의 발생 여부와 더불어 격자 왜곡 및 품질에 대한 해석 결과의 강건성을 평가하기 위해 직선 보를 Fig. 3 과 같이 격자를 구성하여 해석해 보았다.



Fig. 3 Distorted mesh models of cantilever beam subjected to unit shear load.

Fig. 5 의 결과를 보면 제안된 요소가 격자 왜곡에 대해 가장 강건한 결과를 주고 있으며 정확도 또한 가장 뛰어난 것을 알 수 있다.

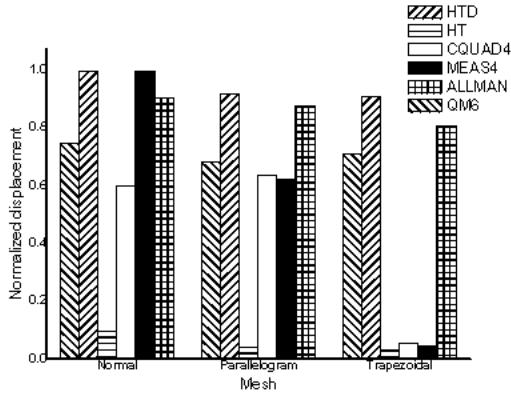


Fig. 4 Tip displacement of Cook's problem.

### 3.3 집중 하중을 받는 원통

셀 요소의 성능을 평가하기 위해 옆면 중앙에 집중 하중을 받는 원통 문제를 해석해 보았다. 비교해는  $1.8248 \times 10^{-5}$  을 사용하였으며, 대칭성을 이용하여  $1/8$  모델을 사용하였다. 제안된 요소와 비교된 요소들은 STRAD의 4절점 셀 요소(STRAD4), MSC/NASTRAN의 CQUAD4, QM6 요소와 Allman의 요소이며 QM6와 Allman의 요소 역시 DKMQ와 조합시켜 해석해 보았다. Fig. 5의 결과를 보면 CQUAD4가 약간 떨어지는 결과를 주고 있으며 나머지 요소들은 모두 거의 같은 성능을 보이고 있다.

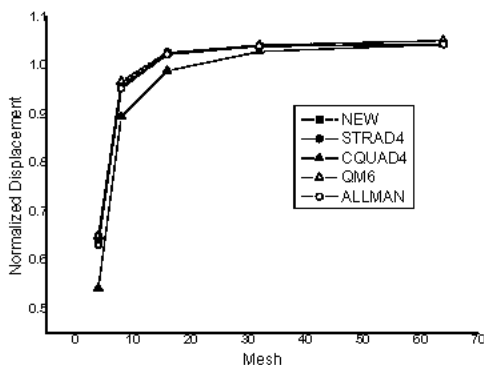


Fig. 5 Normalized displacement of pinched cylinder.

### 3.4 구멍 뚫린 반구

마지막으로 회전 자유도에 의해 막 변형과 굽힘 변형의 연성(coupling) 효과가 심하게 나타나는 천장에 구멍이 뚫린 반구 문제를 해석해 보았다. Fig. 6의 결과를 보면, 면내 회전 자유도를 가지지 않은 요소인 QM6+DKMQ와 CQUAD4의 경우 매우 빠르게 수렴하고 있지만, 면내 회전 자유도가 있는 요소들은 초기 수렴 성능이 떨어지는 것을 볼 수 있다. 그러나 회전 자유도가 있는 요소 가운데 제안된 요소는 좋은 결과를 보이고 있다.

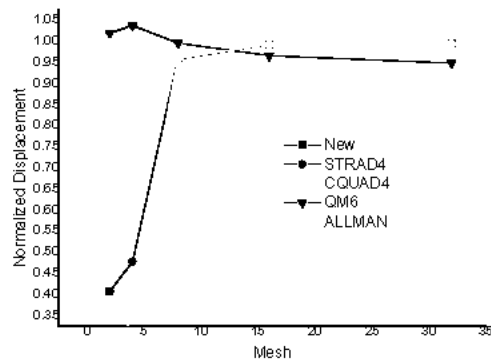


Fig. 6 Normalized displacement of pinched hemisphere.

## 4. 결론

Hybrid Trefftz의 방법에 의한 막 요소와 DKMQ 요소를 결합하여 평면 셀 요소를 개발하였다. 막 거동의 개선과 더불어 절점당 6 자유도를 갖는 셀 요소를 만들기 위해 hybrid Trefftz 평면 요소의 경계 변위장에 Allman의 2차 변위장을 도입하여 회전 자유도를 추가하였다. 굽힘 강성은 전단 변형이 고려되어 두꺼운 판 거동을 잘 표현하면서 두께가 얇아지면 얇은 판의 거동으로 잘 수렴하는 DKMQ 요소를 사용하였다. 수치 실험 결과 제안된 셀 요소는 여러가지 문제에 대해 정확도가 높았으며, 수렴 속도도 비교적 빠른 것으로 나타났다. 셀 문제의 경우 회전 자유도의 추가에 의한 막 거동과 굽힘 거동이 강하게 연성(coupling)된 문제를 제외하고 상용 프로그램들과 비교하여 좋은 성능을 보였다.

## 후기

본 과제는 KISTEP 공학용 S/W 개발 사업을 통해 연구비를 지원받아 수행된 연구이다.

## 참고문헌

1. Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J., *Concepts and applications of finite element analysis*, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 2002.
2. Allman, D. J., "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1 - 8, 1984.
3. Allman, D. J., "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 717 - 730, 1988.
4. Cook, R. D., "On the Allman triangle and a related quadrilateral element," *Computers & Structures*, Vol. 22, pp. 1065-1067, 1986.
5. MacNeal, R. H. and Harder, R. L., "A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom," *Computers & Structures*, Vol. 28, pp. 75-84, 1988.
6. Streicklin, J. A., Haisle, W., Tisdale, O., and Gunderson, R., "A rapidly converging triangular plate element," *AIAA J.*, Vol. 7, pp. 180-181, 1969.
7. Dhatt, G., "An efficient triangular shell element," *AIAA J.*, Vol. 8, pp. 2100-2102, 1970.
8. Irons, B. M., "The semiloof shell element," in *Finite elements for thin shells and curved members*, ed. Ashell, D. and Gallagher, R. H., John Wiley and Sons, Chapter 11, 1976.
9. Batoz, J. L. and Lardeur, P., "A discrete shear triangular nine D.O.F. element for the analysis of thick to very thin plates," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 533-560, 1989.
10. Katili, I., "New discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields. Part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 1859-1883, 1993.
11. Katili, I., "New discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields. Part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 1885-1908, 1993.
12. Jirousek, J., "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 14, pp. 65-92, 1978.
13. Jirousek, J. and Teodorescu, P., "Large finite elements methods for the solution of problems in the theory or elasticity," *Computers & Structures*, Vol. 15, pp. 575-587, 1982.
14. Jirousek, J. and Venkatesh, A., "Hybrid Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol 35, pp. 1443-1472, 1992.
15. Piltner, R., "Special finite elements with holes and internal cracks," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol 78, pp. 1471-1485, 1985.
16. Choi, N., Choo, Y. S., and Lee, B. C., "Hybrid Trefftz plane elements with drilling degrees of freedom," WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Beijing, China, 2004.
17. MacNeal, R. H. and Harder, R. L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 3-20, 1985.
18. Yeo, S. T. and Lee, B. C., "New stress assumption for hybrid stress elements and refined four-node plane and eight-node brick elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 40, pp. 2933-2952, 1997.
19. Taylor, R. L., Beresford, P. J., and Wilson, E. L., "A nonconforming element for stress analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 1211-1219, 1976.