

## 드릴링 자유도를 가진 매크로 삼각형 요소를 이용한 평면 응력 해석

엄재성\*(한국과학기술원), 김영태(한국과학기술원), 이병채(한국과학기술원)

Construction of a macro plane stress triangle element with drilling d.o.f.'s

J. S. Eom(Mechanical Eng. Dept, KAIST), Y.T. Kim(Mechanical Eng. Dept.,KAIST), B. C. Lee(Mechanical Eng. Dept.,KAIST)

### ABSTRACT

A simple macro triangle with drilling d.o.f.'s is proposed for plane stress problems based on IET(Individual element test) and finite element template. Three-node triangular element has geometrical advantages in preprocessing but suffers from bad performance comparing to other shapes of elements -especially quadrilateral. Main purpose of this study is to construct a high-performance linear triangular element with limited supplementary d.o.f.'s. A triangle is divided by three sub-triangles with drilling d.o.f.'s. The sub-triangle stiffness come from IET passing force-lumping matrix, so this assures the consistency of the element. The macro element strategy takes care of the element's stability and accuracy like higher-order stiffness in the F.E. template. The resulting element fits on the uses of conventional three-node. Benchmark examples show proposed element in closed form stiffness from CAS (Computer algebra system) gives the improved results without more computational efforts than others.

Key Words : 매크로 요소, 드릴링 자유도, Individual element test

### 1. 서론

유한 요소를 사용하는 현장에서 삼각형 요소를 사용하는 것은 복잡한 실제 구조물의 모델링을 위해 피할 수 없는 과정이다. 자동 요소망 생성 기법을 사용하여 유한 요소 모델링을 하는 경우 3 절점 삼각형 요소는 다른 형상의 요소에 비해 뚜렷한 장점을 가지고 있다.

일반적인 삼각형 요소의 성능은 사각형 요소와 비교해볼 때 아직 개선의 여지가 많다. 삼각형 요소는 자유로운 형상의 모델링에 사용될 수 있으나 형상비(Asspect ratio)나 최대/최소 각도 등, 요소망의 품질에 민감한 특성을 가지고 있고 구속 현상을 가지고 있을 수 있어 이들을 고려하여 사용해야만 원하는 결과를 얻을 수 있다.

3 절점 삼각형 요소의 성능을 향상시킬 수 있는 방법은 요소 내의 적은 자유도 개수로 인해 제한적이다. 그 중 한가지는 드릴링 회전 자유도를 사용하는 방법으로 요소 변에 절점을 생성하지 않

고도 성능을 향상시킬 수 있고, 쉘의 경우 보요소와의 결합시에 유용하게 쓰일수 있다. Allman 의 수식화 과정을 따라 요소 경계의 변형을 이용하여 회전 자유도를 기술하는 방법이 있다[2].

다른 방법은 매크로 요소 기법을 활용하는 것이다. 요소 중앙에 가상의 절점을 생성하여 강성을 만들고 다시 이 절점을 정적 응축 과정을 통해 소거 하여 하나의 요소 강성으로 만드는 방법이다.

본 연구에서는 체계적으로 매크로 요소를 생성하는 기법을 제안하였으며, 쉬운 방법으로 강건한 고성능의 요소를 만들어 내었다. 체계적인 요소 생성을 위해 Bergan[6]등이 제안하고 Felippa 가 발전 시켜온 Individual element test 에 기반한 유한 요소 템플릿(Finite element template)기법을 사용하였다. 매크로 요소의 서브 삼각형의 강성으로는 역시 유한 요소 템플릿 기법에 의해 개발된 최적화된 ANDES(Assumed natural deviatoric strain) 삼각형 요소의 강성을 이용하였다. 이렇게 구성된 매크로 요소는 Individual element test 에 의해 또 다시 다른 형태

의 고차 강성을 만들어 내는 것을 확인하였으며, 수치 실험에서도 요소망 품질에 강건하고 보다 정확한 결과를 보여주었다.

## 2. IET(Individual element test) & ANDES F.E. Template

### 2.1 Individual element test and F.E. template

IET 는 패치 테스트의 일종으로 Bergan 등에 의해 일정 변형률 상태(Constant strain state)에서 패치 테스트를 통과하는 요소 사이에 쌍으로 트래션이 소거되는 성질(Pairwise traction cancellation)을 이용하여 제안되었다.

일반적인 요소 강성은 IET 의 이러한 성질을 이용하여 패치 테스트에 통과하기 위해 필요한 일정 변형률 상태를 표현하는 기본 강성(Basic stiffness)과 좀더 고차의 변형 모드를 표현하며 기본 강성의 변형 모드와는 직교인 고차 강성(Higher order stiffness)으로 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$K = K_b(\alpha_i) + K_h(\beta_j) \quad (1)$$

직접 강성 생성법 중의 하나인 유한 요소 템플릿은 강성을 매개 변수를 가진 대수적인 행렬 형태로 표현하는 방법으로 적절한 관계를 지닌 각각의 강성 조합을 모아 직접 강성을 생성하는 방법이다. 본 연구에서는 Felippa[1]가 제안한 템플릿을 사용하여 최적화된 ANDES 삼절점 삼각형 요소를 서브 삼각형의 기본 강성으로 사용하였다.

### 2.2 The basic stiffness

드릴링 자유도를 가진 선형 변형률 삼각형 요소의 구체적인 기본 강성은 다음과 같다.

$$K_b = V^{-1} L E L^T \quad (2)$$

여기서 V 는 요소의 부피를 , E 는 구성 방정식 행렬, L 은 force-lumping 행렬로써 free formulation 에서의 평균 변형률-변위 행렬을 1 점 적분한 값과 같다. 기본 강성의 주목할만 점은 같은 절점과 자유도 조건을 가지고 있는 어떤 요소라도 IET 를 통과하기 위해서는 식 2 와 같은 형태로 유일하게 표현된다는 점이다. 따라서 이러한 대수적인 형태의 강성 행렬을 포함한 요소는 수렴을 위한 일관성을 보장 받을 수 있다.

## 3. 매크로 삼각형 요소

### 3.1 매크로 요소 구성

IET 로부터 구성된 기본 강성은 요소 수식화와 관계 없이 3 절점 선형 삼각형 요소에 대해 일관성을 만족시키는 동일한 대수적 행렬 형태를 갖는다. 그러나 기본 강성만으로는 행렬의 랭크가 부족하여

강성 행렬이 비정칙이 되므로 이를 보완하기 위해 고차 강성을 사용하게 된다. 이 장에서는 매크로 기법에 의해 생성되는 고차의 강성 행렬을 찾아 보고 가장 좋은 성능을 가진 고차 강성 행렬을 구성한다.

매크로 요소를 구성하는 방법은 다음 그림과 같다.

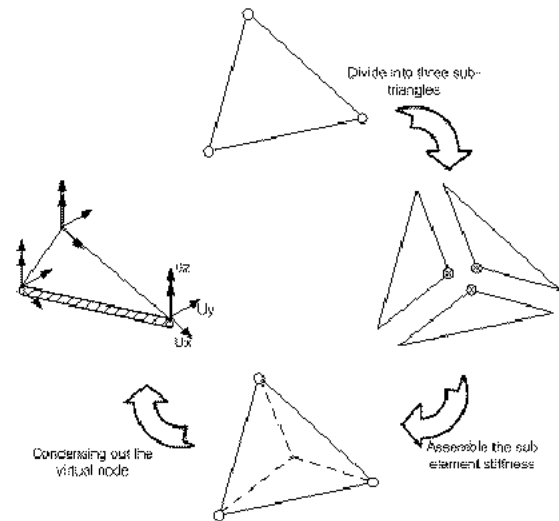


Fig. 1 Construction of a macro triangular element

요소는 하나의 삼각형을 세개의 부 삼각형으로 분할 후 각 부 삼각형에 대해 IET 을 통과하는 ANDES 요소의 템플릿을 선택적으로 삽입하여 원래 삼각형에 대해 조립한 후 중앙의 가상 절점을 응축 과정을 통해 소거하여 만들어진다. 전 과정은 심볼릭 대수 연산이 가능한 CAS(Computer abstract system)을 사용하였고, 최종 결과인 강성 행렬은 닫힌 형태로 얻어지므로 실제 프로그램에서 응축을 위한 요소 내부의 소거 과정이 필요 없다.

이상적인 부 삼각형의 강성 모델을 찾기 위해 세가지 조건에 대한 수치 실험을 해보았다.

- A. 최적화된 ANDES 템플릿(3Kb+3Kh)
- B. 부 삼각형에 대한 세개의 기본 강성과 전체 삼각형에 대한 고차 강성(3Kb+Kh)
- C. 부 삼각형에 대한 세개의 기본 강성

A 조합으로 만들어진 매크로 요소의 경우 CST(Constant strain triangle) 정도의 성능만을 보여 드릴링 자유도를 사용한 쿼지를 살리지 못하였고, B 조합의 경우 A 조합 보다는 낮지만 다른 전체 삼각형의 고차 강성이 세개의 부 삼각형의 기본 강성이 응축 과정에서 섞이며 만들어진 또다른 고차 강성의 변형 모드와 엉켜 결과적으로 낮은 성능을 보였다. C 조합은 상수 상태의 변형 모드가 정적 응축 과정을 통해 섞이면서 한 차수 높은 선형 변형

모드를 만들어 내었다.

### 3.2 매크로 고차 강성

제안된 매크로 삼각형 요소의 강성은 부 삼각형 강성의 재료로 사용된 ANDES 요소 템플릿과 같이 기본 강성과 고차 강성으로 분해 될 수 있다. 이는 앞서 설명한 바와 같이 같은 절점, 자유도 조건을 갖는 IET 를 통과할 수 있는 삼각형 요소는 모두 같은 형태의 기본 강성을 가지고 있기 때문이다. 흥미로운 부분은 기본 강성과의 직교 조건을 위해 어떠한 제한 조건을 적용하지 않았음에도 불구하고 기본 강성으로 부 삼각형을 구성한 매크로 요소의 경우 전체 삼각형의 기본 강성과 변형 모드가 직교하는 고차의 강성을 얻을 수 있다는 점이다. 하지만 만들어진 매크로 요소의 고차 강성은 보통 드릴링 자유도를 가진 요소에서 주로 발생하는 가상 영 에너지 모드(spurious zero-energy mode)를 가지고 있다.

### 3.3 True rotation 과 spurious mode control

드릴링 자유도를 가진 삼절점 삼각형 요소는 전체 9 개의 자유도를 가지고 있다. 강체운동을 위한 자유도 3 개와 변형에 해당하는 6 개의 자유도를 가지고 있다. 6 개의 변형 모드중 3 개는 변형률 모드이고 나머지 변형 모드는 고차 변형 모드를 의미한다. 제안된 매크로 요소의 가상 영 에너지 모드는 드릴링 자유도에서 영이 아닌 값을 가지며 다른 변위는 영인 변형 모드로 이전 연구자들의 의해 많은 해결방법이 제안되었다.

본 연구에서는 Kanok-Nukulchai[9]에 의해 제안된 벌칙 함수를 이용하여 가상 영 에너지 모드를 제어하였다.

$$U_i = \alpha_i G \int \left[ \alpha_3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^2 dV \quad (3)$$

## 4. 수치실험

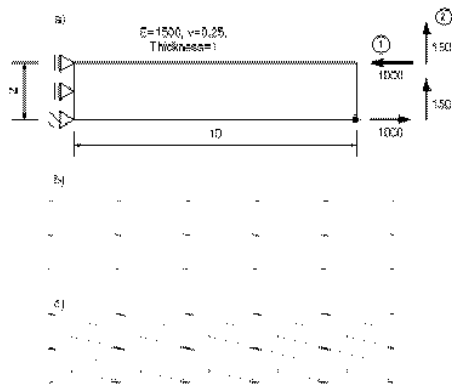


Fig. 2 The bending problem of cantilever beam: a)

Dimension and properties b) Finite element meshes for triangular element c) Equivalent patch mesh for 3×Allman and 3×Ctria3

### 4.1 외팔보 문제

12 개의 요소로 이루어진 외팔보 문제를 사용하여 성긴 요소망에서의 요소 성능을 측정해 보았다. 아래 표에서 CST 는 일정 변형률 삼각형, Allman 은 Allman 이 제안한 드릴링 자유도를 가진 삼각형, CTRIA3 는 NASTRAN 삼각형, M3b1h 는 앞서 매크로 구성 테스트에서 조합 B 를 M3b 는 조합 C, M3b+는 조합 C 에 영에너지 모드를 제거한 요소이다. 표에서 확인할 수 있듯이 성긴 요소망에서도 매크로 기법에 의해 생길 고차 강성이 평면 굽힘 변형을 잘 표현함을 알 수 있다.

Element	Tip displacement	
	Case 1	Case 2
CST	37.14	39.49
Allman	86.54	88.06
3×Allman	86.16	87.59
3×Ctria3	37.19	39.05
M3b1h	79.48	80.96
M3b	105.31	105.99
M3b+	105.15	105.84
Exact	100	102.6

Table 1 Results for cantilever beam problem

### 4.2 룩 문제

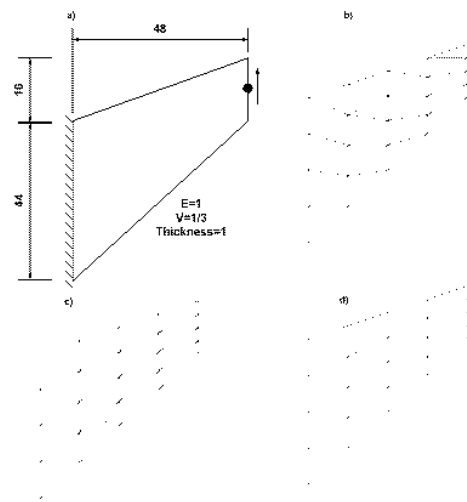


Fig. 3 Cook's problem: a) problem definition- clamped trapezoid under end shear b) Mesh A: A 8×8 mesh for shorter-diagonal-cut triangle mesh c) Mesh B: longer-diagonal-cut triangle mesh d) Mesh C: rectangular mesh

육의 문제는 직사각형이 아닌 왜곡이 있는 사각형에서의 요소 성능을 테스트 할 수 있다. 아래 표에서 처럼 제안된 요소는 사각형과 비교할만한 결과를 보였으며, 긴 대각선 방향으로 자른 요소망에서도 보다 정확한 결과를 보여 요소망 왜곡에 보다 강건함을 확인할 수 있다.

	Mesh A(Mesh B)			
	2×2	4×4	8×8	16×16
CST	11.99 (6.74)	18.28 (11.25)	22.02 (17.33)	23.41 (21.59)
Allman	19.66 (16.98)	22.41 (21.45)	23.44 (23.18)	23.8 (23.72)
CTRIA3	11.99 (6.74)	18.28 (11.25)	22.02 (17.33)	23.41 (21.59)
OPT	20.56 (16.14)	22.45 (20.1)	23.43 (22.41)	23.8 (23.4)
M3b	21.29 (21.84)	22.83 (22.81)	23.54 (23.51)	23.82 (23.82)
M3b+	21.29 (21.84)	22.83 (22.81)	23.54 (23.51)	23.82 (23.82)
	Mesh C			
FFQ	21.66	23.11	23.79	23.88
QUAD4	21.01	23.01	23.64	23.88
QM6	21.05	23.02	23.65	23.88

Table 2 Results for Cook's problem

## 5. 결론

본 연구에서는 IET 와 유한 요소 템플릿을 사용하여 체계적으로 드릴링 자유도를 가지는 매크로 평면 응력 삼각형 요소를 구성하는 방법을 제안하였다. IET 를 통과하는 요소 강성을 사용하여 부 삼각형을 사용하여 매크로 요소를 구성하는 경우 일정 변형 모드로부터 선형 변형 모드를 얻을 수 있음을 확인하였고, 고차 강성을 표현하였다. 수치 실험 결과 얻어진 고차 강성을 가진 삼각형 요소는 성긴 요소망과 왜곡을 가진 요소망에서도 우수한 성능을 보여주었다. 가상 영에너지 모드를 제거하기 위해 True rotation 에 대한 벌칙함수를 요소 강성에 적용하였다.

향후 본 연구에서 제안된 체계적인 매크로 요소 생성 방법을 사면체 요소, 삼각형 쉘 요소등에 적용하고, 매크로 요소의 부 요소로 사용된 템플릿의 매개 변수 최적화를 위한 연구를 진행 중이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)에서 지

원하는 공학용 소프트웨어 기술 개발 사업의 지원으로 이루어 졌습니다.

## 참고문헌

1. Felippa, C. A., "A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, (2003), 2125-2168.
2. D. J. Allman, "A compatible triangular element including vertex rotation for plane elasticity analysis", Comput. Struct., 19, (1984), 1-8.
3. K. Alvin, H.M. de la Fuente, B. Haugen, C.A. Felippa, Membrane triangles with corner drilling freedoms. I. The EFF element, Finite Elements Anal. Des. 12 (1992) 163-187.
4. R. D. Cook, A plane hybrid element with rotational D.O.F and adjustable stiffness, Int. J. for Num. Meth. Eng., 24, (1987), 1499-1508.
5. P.G. Bergan, L. Hanssen, A new approach for deriving good finite elements, MAFELAP II Conference, Brunel University, 1975, in: J.R. Whiteman (Ed.), The Mathematics of Finite Elements and Applications, vol. II, Academic Press, London, (1976), 483- 497.
6. P.G. Bergan, M.K. Nygard, Finite elements with increased freedom in choosing shape functions, Int. J. Numer. Methods Engrg. 20, (1984) 643- 664.
7. C.A. Felippa, C. Militello, Membrane triangles with corner drilling freedoms. II. The ANDES element, Finite Elements Anal. Des. 12 (1992) 189-201.
8. W. Kanok-Nukulchai, A simple and efficient finite element for general shell analysis, Int. J. Numer. Methods Engrg. 14, (1979) 179-200.
9. R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, Concepts and applications of finite element analysis, Newyork: Wiley, (1989).
10. R.H. Macneal and R. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, Finite Elements Anal. Des. 1 (1985) 3-20.
11. C.A. Felippa, S. Alexander, Membrane triangles with corner drilling freedoms. III. Implementation and performance evaluation, Finite Elements Anal. Des. 12 (1992) 203-239.
12. Felippa, C. A. and C. Militello, Construction of optimal 3-node plate bending triangles by templates, Computational Mechanics, 24(1), (1999), 1-13.