

## 등가정하중을 이용한 구조최적설계 방법을 이용한 비선형 거동 구조물의 최적설계

박기중\* (한양대학교 기계공학부), 박경진 (한양대학교 기계정보경영공학부)

### Non-linear Structural Optimization Using NROESL

K. J. Park (Mecha. Eng. Dept. HYU), G J. Park (Mechanical Eng. Dept., HYU)

#### ABSTRACT

Nonlinear Response Optimization using Equivalent Static Loads (NROESL) method/algorithm is proposed to perform optimization of non-linear response structures. It is more expensive to carry out nonlinear response optimization than linear response optimization. The conventional method spends most of the total design time on nonlinear analysis. Thus, the NROESL algorithm makes the equivalent static load cases for each response and repeatedly performs linear response optimization and uses them as multiple loading conditions. The equivalent static loads are defined as the loads in the linear analysis, which generates the same response field as those in non-linear analysis.

The algorithm is validated for the convergence and the optimality. The function satisfies the descent condition at each cycle and the NROESL algorithm converges. It is mathematically validated that the solution of the algorithm satisfies the Karush-Kuhn-Tucker necessary condition of the original nonlinear response optimization problem.

The NROESL algorithm is applied to two structural problems. Conventional optimization with sensitivity analysis using the finite difference method is also applied to the same examples. The results of the optimizations are compared. The proposed method is very efficient and derives good solutions.

**Key Words** : Nonlinear Response Optimization (비선형 응답 최적설계), Equivalent Static Loads (등가정하중), NROESL (등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계)

#### 1. 서론

일반적으로 구조최적설계에서는 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식과 설계조건 등을 제한 조건으로 사용한다. 현재의 설계점에서 목적함수와 제한조건함수를 가지고 최적설계 문제를 구성하게 된다. 최적화 문제를 푸는 과정에 있어 민감도 해석(sensitivity analysis)이라 부르는 설계변수에 대한 목적함수나 제한조건의 경사도(gradient)가 필요하다. 실제로 구조최적설계에서는 민감도해석이 설계과정 중에 차지하는 비중이 대단히 크며 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식으로부터 구하게 된다. 따라서 유한요소법을 이용한 구조물의 해석에 따라 민감도의 정확도나 계산 시간 등이 좌우되며 구조최적설계를 이루는데 결정적인 요인으로 작용한다.

지금까지 구조최적설계를 구성하는데 있어, 구조물에 작용하는 외력에 대해 구조물의 응답이 선

형적으로 변하는 선형 반응에 많은 관심이 집중되어 있었다. 선형 유한요소 해석의 간단함과 편리함으로 인하여 구조최적설계를 달성하는데 비용면에서 많은 이점이 있었다. 그러나 구조물이 점점 복잡해지고 사용자의 다양한 요구에 의해 더 이상 선형 반응으로는 정확한 구조물의 반응을 표현하기가 힘들어지고 있다. 기존의 강성이 크고 변형이 거의 없는 구조물에서 점차 경량화되고 유연한 구조물이 늘어가고 있다. 이러한 현상에 기인하여 구조물을 해석하는데 있어 기하학적 또는 재료상의 비선형성이 두드러지게 나타날 수 있으며 선형해석에서 한걸음 나아가 비선형을 고려해 주는 설계가 필요하게 되었다.

많은 구조물의 경우 선형해석으로는 구조물의 거동을 제대로 표현할 수 없으며, 특히 재료의 비선형성이나 대변위, 대변형의 문제에서는 비선형 해석을 통한 구조물의 반응을 구하는 것은 이미 보

편화 되어 있다. 그래서 구조물의 비선형 해석을 구조 최적설계에 이용하려는 시도가 많은 연구자들을 통해 있었으며 수학적 최적설계 정식화 또한 잘 정리되었다.

하지만 비선형 해석을 통한 구조물의 최적설계를 수행하는 것은 선형문제에 비해 고가이며, 목적함수나 제한 조건의 민감도 계산은 많은 시간이 소요된다. 민감도를 계산할 때 간단한 절차를 통하여 수행되는 유한차분법(finite difference method)은 접근 방법은 쉬우나, 증분에 의해 문제를 푸는 비선형해석의 경우 대단히 고가의 방법이다. 해석적 방법이나 준해석적 방법에 의한 민감도의 계산도 비선형 해석의 경로 의존성이나 증분 방법 또는 최적화의 복잡성으로 인하여 적용하기에 쉽지는 않다.

한편, 선형반응 최적화 기법은 비교적 많은 연구에 의해 잘 정리되어 있고, 이를 구조 최적설계에 쉽게 적용할 수 있는 상용 코드를 또한 흔히 구할 수 있다. 본 논문에서는 비선형 거동을 하는 구조물에 대한 최적화를 선형 반응 구조최적설계 방법을 이용하여 달성하는 방법을 제안한다. 비선형 특성을 갖는 응답과 같은 크기의 응답을 나타낼 수 있는 방법으로 등가정하중이 가해지는 선형 해석을 제안한다. 등가정하중이란 구조물의 비선형 해석에 의한 응답과 같은 응답을 발생시키고, 선형 해석과 최적화를 할 목적으로 만들어지는 하중을 의미한다. 등가정하중은 유한요소법을 통해 해석적 또는 수치적인 방법으로 산출한다. 비선형 구조물의 응답으로 구조물의 최적설계에 있어 많은 경우 변위와 응력을 선택하여 사용하고 있다. 산출된 변위에 대한 등가정하중과 응력에 대한 등가정하중을 기존의 선형 반응 최적화 알고리즘에 다중 하중조건으로 직접 사용하여 선형 반응 최적화를 수행하고, 이 과정을 반복함으로써 원래의 비선형 최적화 문제를 해결하였다.

## 2. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계 알고리즘

### 2.1 전통적인 비선형 응답 구조 최적설계

일반적으로 구조최적설계에서는 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식과 설계조건 등을 제한 조건으로 사용하는데, 목적함수나 제한조건의 성격에 따라 해결하는 방법이 따로 있다. 흔히 비선형 최적설계는 최적설계 문제를 구성하는 목적함수나 제한조건이 설계변수에 대하여 비선형이라는 것을 의미한다. 그러나 비선형 응답 구조 설계는 이러한 관계에 상관없이 상태방정식 즉 유한요소 방정식을 이루는 상태변수 사이의 관계가 비선형성을 갖는 것을 말한다. 전형적인 비선형 응답 구조최

적설계는 다음과 같은 수식화에 의해 정식화된다.

$$\begin{aligned} \text{Find } & \mathbf{b} & (1a) \\ \text{to minimize } & f(\mathbf{b}, \mathbf{z}) & (1b) \\ \text{subject to } & \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z})\mathbf{z} - \mathbf{f} = 0 & (1c) \\ & g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \leq 0; \quad i=1, \dots, m & (1d) \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{b}$  는 설계변수,  $\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z})\mathbf{z} - \mathbf{f} = 0$  는 상태방정식, 즉 비선형 유한요소 방정식이며,  $\mathbf{K}$  는 강성행렬,  $\mathbf{z}$  는 변위벡터,  $\mathbf{f}$  는 외력벡터이다.  $f(\mathbf{b}, \mathbf{z})$  와  $g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z})$  는 설계변수가 내재적(implicit)으로 표현된 목적함수와 제한조건 함수이다. 설계변수의 내재적 표현은 상태방정식을 풀어야만 하는 상태변수에 종속적이라는 것을 의미한다.

식 (1a)-(1d)와 같은 정식화는 대부분의 구조최적설계 문제가 그렇듯이 유한요소법을 이용하여 구조물의 응답을 계산하고, 민감도정보를 계산하는데 바탕을 두고 있다. 비선형구조물의 응답과 민감도를 계산하는 것은 선형구조물의 계산보다 비용이 훨씬 많이 든다. 따라서 유한요소를 이용한 비선형 구조물의 최적화는 대부분 고비용이고 큰 구조물에 대한 적용은 대단히 어렵다.

## 2.2 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조 최적설계

### 2.2.1 등가정하중의 정의

일반적인 유한요소법을 이용한 작용하중에 대한 구조물의 응답은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Kz} = \mathbf{f} \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{K}$  는 강성행렬(stiffness matrix),  $\mathbf{z}$  는 절점변위벡터(nodal displacement vector),  $\mathbf{f}$  는 외력벡터이다. 일반적으로 선형해석의 경우에는 변위(displacement)나 변형(deformation)이 극히 작은 것으로 간주하여 변형전의 형상(configuration)과 변형후의 형상의 차이를 무시한다. 그러나 비선형 해석은 Lagrangian 수식화(formulation)를 통한 미지의 변형형상을 이용해야만 하며 이를 위해 외력의 증분(increment) 형태로 표현하고 선형 근사화해서 주어진 하중에서 평형조건을 만족할 때까지 반복하게 된다.

비선형 해석의 경우에는 증분에 따라 강성행렬이 변한다. 따라서 각 해석 위치에서의 접선강성행렬을 따라 해를 구하게 된다. 선형해석의 경우 해석 위치에 상관없이 초기 강성행렬을 따르게 된다. 비선형해석에서의 응답장과 같은 응답장을 발생시키는 선형해석에서의 하중을 등가정하중이라 정의하며 변위장의 경우 고정된 변위에서의 비선형 강성을 따르는 하중을 선형 강성을 따르는 하중으로의 사상으로 구할 수 있다.

**정의:** 등가정하중을 이용한 비선형 반응 최적설계

(Nonlinear Response Optimization using Equivalent Static Loads; NROESL)에서 등가정하중은 비선형 시스템에서의 응답과 같은 응답을 발생시키는 정적 선형 시스템에서의 하중을 의미한다.

### 2.2.2 NROESL 알고리즘

등가정하중과 선형 반응 최적설계를 이용하여 비선형 반응 최적설계를 이룩하는 구조최적화 알고리즘의 절차는 다음과 같다.

**단계 1:** 초기값을 설정한다. (사이클  $k=0$ , 설계변수  $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(0)}$ 로 설정)

**단계 2:** 설계변수  $\mathbf{b}^{(k)}$ 에 대하여 식 (2)와 같은 비선형 유한요소 해석을 수행한다. 여기서 선형 강성행렬과 비선형 응답을 얻을 수 있다.

**단계 3:** 관심 있는 비선형 해석의 응답에 대하여 다음과 같이 등가 하중을 계산한다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{(k)} = \mathbf{K}_L \mathbf{z}_N \quad (3)$$

**단계 4:**  $k=0$ 이면 단계 5로 간다.  $k>0$ 일 때,

$$\| \mathbf{f}_{eq}^{(k)} - \mathbf{f}_{eq}^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \quad (4)$$

이면 알고리즘을 멈추고 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.

**단계 5:** 다음의 선형 응답 최적화를 수행한다.

$$\text{Find } \mathbf{b}^{(k+1)} \quad (5a)$$

$$\text{to minimize } \varphi(\mathbf{b}^{(k+1)}) \quad (5b)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k+1)})\mathbf{z}_L - \mathbf{f}_{eq} = 0 \quad (5c)$$

$$g_j(\mathbf{b}^{(k+1)}, \mathbf{z}_L) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \quad (5d)$$

$$\mathbf{b}_L^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_L^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_U^{(k+1)} \quad i=1, \dots, n \quad (5e)$$

여기서 식 (5c)와 같이 변위나 응력 등의 각각의 응답에 대하여 구해진 등가하중을 이용하여 다중 하중조건(multiple loading conditions)으로 선형 유한요소해석을 구성하게 된다.

**단계 6:** 설계결과를 갱신하고 단계 2로 간다. ( $k=k+1$ )

### 2.2.3 NROESL 알고리즘의 수렴

알고리즘의 절차에 따르면 비선형 응답을 등가정하중을 통하여 선형 응답으로 변환하여 최적화를 달성한다. 여기서 선형 응답은 최적화의 방향을 결정하는 주된 인자가 된다. 선형 응답 최적화 결과를 다시 비선형 해석하여, 선형해석으로 인한 응답의 왜곡을 바로 잡는 역할을 하게 된다. 그러나 설계가 진행됨에 따라 선형 응답과 비선형 응답 사이의 관계가 점점 멀어진다면 설계는 실패할 것이 자명하다. 따라서 선형 응답과 비선형 응답 사이의 관계가 설계변수의 영역에서 어떻게 표현되어야 하는가가 NROESL 알고리즘의 수렴에 있어 주된

요인이 된다.

일반적으로 제한조건이 없는 문제라면 목적함수를 강하함수(descend function)로 사용하여 알고리즘의 진행과정이 최적점으로 향하고 있다는 것을 보여주면 된다. 하지만 제한조건이 있는 문제에서는 강하함수를 목적함수의 값에 제한조건의 위배에 관한 벌칙을 더하여 구성할 수 있다. 강하함수 성질의 한가지는 최적점에서의 강하함수의 값이 목적함수의 값과 같아야 한다. 현재 많은 알고리즘이 강하함수로 수렴을 표현해 왔다. NROESL 알고리즘의 강하함수는 다음 식과 같이 정의 되었다.

$$\Phi(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) + R\mathcal{V}(\mathbf{b}) \quad (6)$$

여기서  $f$ 는 설계점  $\mathbf{b}$ 에서의 목적함수이고,  $\mathcal{V}$ 는 제한조건들 중에서 최대 위배량이다.  $R$ 은 충분히 큰 양수이다.

**정리:** NROESL 알고리즘에서,  $k$  번째 사이클의 비선형 상태방정식의 해를  $\mathbf{z}_N^{(k)}$ , 선형반응 최적화에서 선형 상태방정식의 해를  $\mathbf{z}_L^{(k)}$ 라 하자. 현재 설계점과 다음 설계점이 설계 영역 안에 있을 때 현재 설계점에서 선형 응답과 비선형 응답, 그리고 다음 설계점에서의 두 응답의 관계가 식 (7)와 같다면 NROESL 알고리즘에서 강하함수는 강하조건 식 (8)을 만족하고 수렴한다.

$$0 \leq z_{N,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \leq z_{L,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \quad (7)$$

$$\text{or } z_{L,M}^{(k)} - z_{L,M}^{(k+1)} \leq z_{N,M}^{(k)} - z_{N,M}^{(k+1)} \leq 0$$

$$\Phi^{k+1} - \Phi^k \leq 0 \quad (8)$$

여기서  $z_{N,M}^{(k)}$ 과  $z_{L,M}^{(k)}$ 는  $k$  번째 사이클에서 최대 위배량을 갖는 비선형 응답과 선형응답을 각각 나타낸다. 식 (7)에서 하첨자  $M$ 은 최대 위배량을 갖거나 현재는 위배량이 없지만 위배할 가능성이 가장 큰 반응을 의미한다. 식 (7)는 설계변경에 대하여 선형 응답과 비선형 응답의 변화가 같은 방향이고 선형응답의 변화의 크기가 비선형응답의 변화의 크기보다 크다는 것을 의미한다. 증명은 생략한다.

### 2.2.4 NROESL 알고리즘의 해의 최적성

제안한 알고리즘이 수렴하였을 때, 원래의 비선형 반응 최적화 식인 식 (1a)-(1d)의 KKT 필요조건과 등가정하중에 의해 변환된 선형 반응 최적설계 식인 식 (5a)-(5e)의 KKT 필요조건이 같다는 것을 보임으로써 알고리즘의 해의 최적성에 대하여 설명한다. 알고리즘이 수렴조건 식 (4)에 의하여  $k$  번째 사이클에서 수렴한다고 가정하면 다음이 성립한다.

$$\|f_{eq}^{(k)}\| \cong \|f_{eq}^{(k-1)}\| \quad (9a)$$

$$\mathbf{b}^{(k)} \neq \mathbf{b}^{(k-1)} \quad (9b)$$

식 (9a)은 순차적인 절차에 의한 두개의 설계변수에 대하여 비선형 해석을 수행하고, 이들의 응답의 변화가 없고 결국 등가하중이 같아지는 것을 의미한다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial f_{eq}}{\partial b_i} = \frac{\partial(\mathbf{K}_L \mathbf{z}_N)}{\partial b_i} = 0; \quad i=1, \dots, n \quad (10)$$

여기서  $b_i$ 는  $i$ 번째 설계변수이다.

일반적인 비선형 응답 최적설계의 KKT조건과 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} + \sum_{j=1}^m \mu_j \left[ \frac{\partial g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N)}{\partial b_i} + (\nabla_{\mathbf{z}_N} g_j)^T \cdot \frac{d\mathbf{z}_N}{db_i} \right] = 0$$

$$\mu_j \cdot g_j = 0; \quad \mu_j \geq 0; \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m \quad (11)$$

여기서  $n$ 은 설계변수의 개수이고  $m$ 은 제한조건 개수이다.  $d\mathbf{z}_N/db_i$ 는 음함수 미분을 사용하여 식 (10)로부터 계산할 수 있다.

제안한 알고리즘의 KKT 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} + \sum_{j=1}^m \mu_j \left[ \frac{\partial g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}_L)}{\partial b_i} + (\nabla_{\mathbf{z}_L} g_j)^T \cdot \frac{d\mathbf{z}_L}{db_i} \right] = 0$$

$$\mu_j \cdot g_j = 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad j=1, \dots, m \quad (12)$$

두 문제에 대한 KKT 조건은 각각 식 (11)과 식 (12)이다. 두 문제의 제한조건은 동일한 형태를 가지고 있고 상태변수는 각각  $\mathbf{z}_N$ 와  $\mathbf{z}_L$ 이다. 상태변수  $\mathbf{z}_N$ 와  $\mathbf{z}_L$ 는 설계변수  $\mathbf{b}$ 의 함수이고, 등식제한조건인 각자의 평형방정식을 만족해야 한다. 알고리즘의  $k-1$ 번째 사이클의 선형응답 최적설계 수행 이후에 다음을 만족한다.

$$\mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k)}) \mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq}^{(k-1)} \quad (13)$$

$k-1$ 번째 사이클의 선형응답 최적설계 수행의 결과를 이용하여 비선형 응답 해석을 수행한 후 등가하중을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{(k)} = \mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k)}) \mathbf{z}_N \quad (14)$$

$k$ 번째 사이클에서 알고리즘이 수렴한다면 식 (9)를 만족한다. 식 (9)와 식 (13)-(14)로부터 다음이 성립한다.

$$\mathbf{K}_L \mathbf{z}_L = \mathbf{K}_L \mathbf{z}_N = \mathbf{f}_{eq} = \text{constant} \quad (15)$$

$$\mathbf{z}_L = \mathbf{z}_N = \mathbf{K}_L^{-1} \mathbf{f}_{eq} \quad (16)$$

식 (15)를 미분하면

$$\frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_L + \mathbf{K}_L \frac{\partial \mathbf{z}_L}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_N + \mathbf{K}_L \frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial b_i} = 0 \quad (17)$$

식 (17)을 다시 정리하면

$$\frac{\partial \mathbf{z}_L}{\partial b_i} = -\mathbf{K}_L^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_L \quad (18)$$

와

$$\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial b_i} = -\mathbf{K}_L^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{z}_N \quad (19)$$

식 (16)과 식 (18)-(19)로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{z}_L}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial b_i} \quad (20)$$

이제 식 (11)과 식 (12)를 비교하자. 두 식에서 목적함수의 설계변수에 대한 미분치인  $\partial f/\partial b_i$ 는 동일하다. 제한조건에 대한 미분치  $\partial g_j/\partial b_i$  또한 식 (11)과 식 (12)의 것이 같다. 상태변수  $\mathbf{z}_N$ 와  $\mathbf{z}_L$ 이 같고 등가하중을 이용한 응답의 변환에서 비선형 응답을 선형응답으로 대체할 때 제한조건의 형태는 변하지 않으므로  $\partial g_j/\partial \mathbf{z}_N$ 과  $\partial g_j/\partial \mathbf{z}_L$ 도 동일하다. 마지막으로 식 (20)에 의해 식 (11)과 식 (12)가 완전히 동일한 식이 된다. 물론 식 (11)과 식 (12)에서 Lagrange 승수 식인 식 또한 서로 같다. 따라서 두 문제의 KKT조건은 동일하다.

### 3. 구조 최적설계 예제

#### 3.1 아치형 셸 구조물의 치수 최적설계

제안한 알고리즘을 셸 요소에 적용하기 위하여 Fig. 1과 같이 아치형 셸 구조물을 선택하였다. 설계변수는 Fig. 1(c)에서처럼 아치구조물을 이루고 있는 세 개의 셸 구조물의 두께  $t_1, t_2, t_3$ 이다. 탄성재료로 가정하고 해석하였으며 기하비선형을 갖는 구조물이다. 재료의 탄성계수와 포아송비는 각각  $E=206.8\text{GPa}$ 와  $\nu=0.3$ 이다. 문제의 정식화는 다음과 같다.

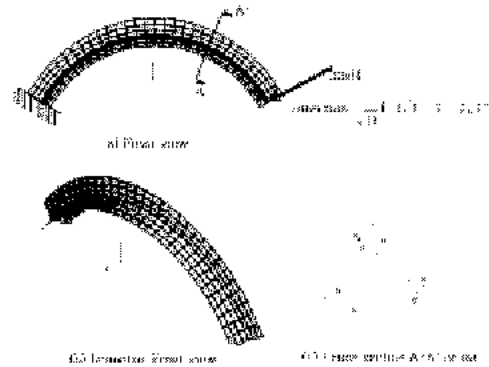


Fig. 1 Arch type shell structure

$$\text{Find shell thickness } (t_1, t_2, t_3) \quad (22a)$$

$$\text{to minimize mass} \quad (22b)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{t}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 \quad (22c)$$

$$s_j - 500.0 \leq 0, j=1, \dots, \text{no. of elements} \quad (22d)$$

$$0.1 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 10.0 \quad (22e)$$

먼저 설계방법 I로써 초기설계  $t_1=t_2=t_3=1.0$ 에 대하여 제안한 방법과 기존의 방법을 이용하여 비선형 응답 최적설계를 수행하였다. 비선형 해석을 위하여 두 방법에서 모두 ABAQUS를 이용하였으며, 제안한 방법에서 선형 최적화와 기존의 방법에서 비선형 응답 최적화를 위하여 DOT의 MMFD를 이용하였다. 최적설계 결과를 Table 1에 나타내었다. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계 결과와 유한차분법을 이용한 기존의 최적설계 방법으로 풀 결과를 비교하였다. 등가정하중을 이용한 최적설계에서는 11번의 비선형 해석을 수행하였다. 또한 선형 응답 최적설계는 50번의 반복회 동안 이루어졌다. 기존의 방법으로는 6번의 반복회에 40번의 비선형 해석을 수행하였다. 제안한 방법에서 많은 선형 응답 최적화의 반복회가 이루어진다. 하지만 비선형 해석을 수행하는 시간에 비해 선형 해석의 수행은 매우 짧으므로 제안한 방법으로 훨씬 빨리 수행할 수 있다. 상용소프트웨어의 사용환경에 의해 두 방법의 총 실행시간을 비교하는 것은 앞서 설명한 바와 같이 무리가 따를 것으로 생각된다.

Table 1 Optimum results for the arch type shell structure

Design variable ( $\times 10^{-3}\text{m}$ )	Design I			Design II		
	Initial design	NROESL	Conventional design	Initial design	NROESL	Conventional design
$t_1$	1.0	2.1847	2.0524	2.5	1.9154	2.2752
$t_2$	1.0	0.1000	2.1230	2.5	2.4995	0.1000
$t_3$	1.0	2.6345	2.1977	2.5	1.8639	2.4872
Mass (kg)	31.01	49.94	65.92	77.53	65.16	49.31
$s_{max}$ (MPa)	1782.4	499.58	500.0	332.57	501.28	499.97
No. of iterations (cycles)		11	6		11	13
No. of nonlinear analyses		11	40		11	61
No. of nonlinear analyses except for gradient calls		-	22		-	22
Total no. of iterations for linear response optimization		50	-		42	-

이 문제는 초기 설계값과 최적화 풀이 방법에 따라 굉장히 많은 국부 최적해가 존재한다. 설계 방법 II에서는  $t_1=t_2=t_3=2.5$ 에 대하여 제안한 방법에서 선형 최적화와 기존의 방법에서 비선형 응답 최적화를 위하여 DOT의 SLP 방법을 이용하였다. 기존의 방법에서 설계 방법 I 보다 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 하지만 제안한 방법은 설계 방법 I에서 보다 나쁜 결과를 얻었다. 그러나 설계 방법 II에서도 여전히 비선형 해석을 수행하는 회수에 있어서는 매우 많은 것을 알 수 있다. 민감도를 구하기 위해 비선형 해석을 수행하는 회수를

제외하고도 22회의 비선형 해석이 이루어졌다.

두 가지 설계에서 살펴본 바와 같이 제안한 NROESL방법에서나 기존의 방법에서 초기설계에 따라 각각 좀 더 좋은 국부해를 구할 수가 있었다. 그러나 제안한 방법을 이용하면 기존의 방법에 비하여 적은 비선형 해석의 회수로 최적화를 이룰 수 있었다. 비선형 해석을 하는 데 많은 시간이 걸리는 문제인 경우 제안한 방법이 선형 해석의 회수가 많더라도, 유용성을 명백히 확인할 수 있을 것으로 판단된다.

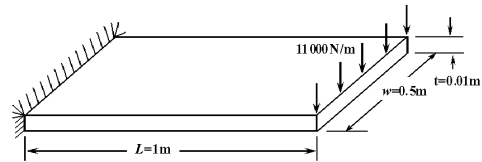


Fig. 2 Boundary and loading condition of a plate

### 3.1 사각 평판의 형상최적설계

이번 문제는 제안한 비선형 응답 최적화 방법을 통하여 구조물의 형상 최적설계를 수행하고자 한다. Fig 2와 같은 크기를 갖는 간단한 사각 평판을 고려하였다. 기하 비선형과 재료 비선형이 동시에 존재하는 문제로 가정하였다. 재료 비선형은 쌍일차(bilinear) 거동을 하는 물성을 갖는 재료를 사용하였다. 재료의 물성은 탄성계수  $E=200\text{GPa}$ , 경화부분의 탄성계수  $E_k=50\text{GPa}$  과 항복응력  $\sigma_y=300.0\text{MPa}$ 이다. Fig 2에 지지조건과 하중조건을 나타내었다. 형상 최적설계를 위하여 설계변수와 유한요소 모델과의 관계는 설계영역(design domain)법과 교란 벡터법을 벡터법을 사용하였다. Fig 3에 3개의 설계변수를 화살표로 나타내었다. 전체 평판에서 설계 영역을 하나로 나타내고 측면의 양쪽 끝과 중간에 설계변수를 설정하였다. 설계변수가 가해지지 않은 절점은 설계변수가 설정된 절점과의 내삽법으로 변화를 구한다. 비선형 응답 최적화의 정식화는 다음과 같다.

Find perturbation vectors for shapechange ( $b_1, b_2, b_3$ ) to minimize mass

subject to

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 \quad (23)$$

$$s_j - 350.0 \leq 0, j=1, \dots, \text{no. of elements}$$

$$-1.0 \leq b_1, b_2, b_3 \leq 0.2$$

제안한 방법과 유한차분법을 통한 민감도 계산을 이용한 기존의 비선형 응답 구조 최적화에 적용하였다. 두 방법에서 모두 비선형 구조해석을 위해 ABAQUS를 사용하였다. 기존의 방법에서는 최적화를 위하여 DOT를 사용하였으며, 제안한 방법

에서는 ABAQUS를 통해 선형해석을 수행하여 유한 차분법으로 민감도를 계산하고 DOT를 사용하여 선형 응답 최적설계를 수행하였다.

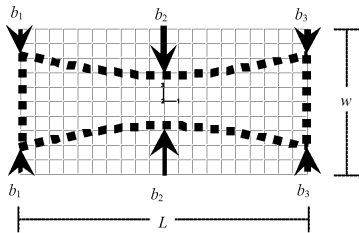


Fig. 3 Perturbation vectors as design variables and a prospective shape change

Table 2 Optimum results of the quadrangular plate

Design variable (m)	Optimum results	
	NROESL	Conventional Method
1	-0.0172	-0.0268
2	0.0367	0.0568
3	0.2	0.1586
Mass (kg)	20.992	5619.2
Number of cycles(iterations)	7	16
Number of nonlinear analyses	7	215
Number of nonlinear analyses except for gradient calls	-	167
Total number of iterations for linear response optimization	48	-

Table 2와 Fig 4에 설계결과를 나타내었다. 등가하중을 이용한 비선형 응답 최적화 방법과 기존의 방법을 사용한 최적화에서 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 실제, 이 문제와 같은 경우 자유단의 폭이 0이 되는 삼각형 구조물이 되는 것이 응력을 최소화하며 고르게 분포시키는 가장 이상적인 결과임을 알 수 있다. 본 최적화 문제에서는 자유단의 과도한 설계변경으로 인한 유한요소 모델의 과도 변형을 고려하여 설계변경 상한값을 두었다. 또한 설계변수  $b_2$ 의 경우 0의 값을 가지면  $b_1$ 과  $b_3$  사이가 이상적인 경우와 같이 측면이 선형으로 변할 수 있지만, 자유단의 설계변경 제한으로 인하여 측면 중간의 설계변수  $b_2$ 의 값이 0이 되지 않고 측면이 완만한 곡선을 이루게 되었다.

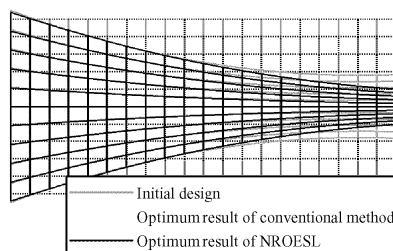


Fig. 4 Initial design and optimization results of the plate

등가정하중을 이용한 방법에서는 등가정하중을 구하기 위한 비선형 해석을 7회 수행하였다. 7회의 사이클 동안 선형 응답 최적화 각각 이루어졌으며 총 48회의 반복회 과정을 거쳤다. 기존의 방법으로는 16회의 반복회 동안 총 215번의 비선형 해석을 수행하였다. 제안한 방법을 이용하면 기존의 결과와 비슷한 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 또한 비선형 해석을 수행하는 회수도 크게 줄일 수가 있었다. 하지만 선형 최적화의 반복회가 추가적으로 포함된다. 따라서 같은 구조물에서 비선형 해석을 수행하는 시간이 선형해석을 수행하는 시간보다 훨씬 길다면 제안한 방법의 유용성을 두드러지게 확인할 수 있을 것으로 판단된다.

#### 4. 결론

기존의 잘 정립되어 있는 선형 반응 최적설계에 기초하여 등가정하중을 구하고, 이를 이용하여 비선형 응답 최적설계를 이룰 수 있는 방법을 제안하였다. 제안한 알고리즘의 강인성(robustness)과 유용성(availability)을 검증하기 위하여 알고리즘의 수렴 조건에 대하여 고찰하고, 제안한 최적화 절차의 해의 최적성에 대하여 검증하여 제안한 알고리즘의 이론적 바탕을 마련하였다. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계 기법을 수학예제와 다양한 구조 최적설계 예제에 적용하였다. 유한차분법을 이용한 기존의 비선형 응답 최적설계와 비교하여 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 비선형 해석을 하는 회수에 있어서 제안한 방법이 많은 이득을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

#### 후 기

이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구 되었음 (KRF-2003-041- D00093)

#### 참고문헌

1. Arora, J.S., Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
2. Wu, C.C. and Arora, J.S., "Design Sensitivity Analysis And Optimization Of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure," AIAA J., Vol. 25, No. 8, pp. 1118-1125, 1987.
3. 박기중, 박경진, "선형 등가하중을 이용한 비선형 거동을 하는 트러스 구조물의 최적설계," 대한기계학회 논문집 (A), Vol. 28, No. 4, pp. 467~474, 2004.
4. 박기중, 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조 최적설계, 한양대학교 박사학위 논문, 2004.