

# 방위 추정을 위한 강인 칼만 필터링 MUSIC 알고리즘에 관한 연구

편용국\*, 임황빈\*, 강기성\*

강원도립대학

## A study on the Robust Kalman Filter MUSIC Algorithm for DOA Estimation

Yong-Kug Pyeon\*, Hwang-Bin Yim\*, and Ki-Sung Kang\*

Gangwon Provincial University\*

### Abstract

본 논문에서는 레이더(Radar)나 소나(Sonar) 시스템 등에서 중요하게 여겨왔던 신호의 방위각 추정기법들은 신호원의 수를 정확히 알아야 한다는 문제점이 있었다. 이러한 문제점들을 최근에는 빠른 수렴속도를 가지는 칼만 필터를 사용하여 신호원의 정보 없이 잡음 부공간을 성공적으로 추정하는 방법을 제안하게 되었는데 이 방법은 중간대 이상의 신호대 잡음비(SNR)가 유지되는 경우 신호의 정보 없이 DOA를 추정할 수 있는 것으로 평가되어왔다. 그러나 이러한 알고리즘은 임펄스성 잡음이 섞인다면 성능저하를 가져올 수 있다. 따라서 본 논문에서는 칼만 필터를 바탕으로 한 MUSIC 알고리즘에 시변메모리인자와 후버 영향 함수를 도입하여 임펄스 잡음에 강인한 DOA 추정 알고리즘을 제안한다.

**Key Words** : Kalman filter ; Huber function ; variable memory factor ; MUSIC ;

### I. 서론

기존의 방위 추정 방법들은 주로 신호원(signal source)의 수를 먼저 알기 위해 신호원의 수를 추정하여 고 분해능(high resolution) 방위 추정 방법(direction-of-arrival : DOA estimation)들에 적용해 왔다<sup>[1][2]</sup>. 대부분의 고 분해능 방법들은 먼저 신호원의 수를 정확히 알아야 한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 최근에 Chen 등<sup>[3]</sup>은 빠른 수렴속도를 가진 칼만 필터(Kalman filter)를 사용하여 신호원의 정보 없이 잡음 부공간(noise subspace)을 성공적으로 추정하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 중간 이상의 신호 대 잡음비(Signal to Noise : SNR)가 유지되는 경우 신호 수 정보 없이 DOA를 추정할 수 있는 것으로 평가되고 있다. 그러나 이런 알고리즘은 잡음이 백색 가우시안일 경우 최적의 성능을 나타낸다. 만약 임펄스성 잡음이 섞인다면 성능은 매우 심각하게 저하된다.

본 논문에서는 Kalman 필터를 바탕으로 한 MUSIC 알고리즘에 시변 메모리 인자(time varying memory factor)와 Huber영향 함수를 도입하여 임펄스 잡음에 강인한 DOA 추정 알고리즘을 제안한다.

### II. 가변 메모리 Kalman Based MUSIC

그림 1과 같은  $M$ 개의 무지향성 균일 선형 어레이(omnidirectional uniform linear array) 시스템을 생각해 보자.

$k$ 번째 스냅샷(snapshot)에서 수신된  $q$ 개의 서로 무상관된(uncorrelated) 어레이 신호벡터  $X(k)$ 와 센서 잡음  $n(k)$ 의 수학적 표현은 다음과 같다.

$$X(k) = AS(k) + n(k) \quad (1)$$

여기서  $A = [a(\theta_1), \dots, a(\theta_q)]$ 는  $M \times q$  행렬이며  $a(\theta) = [1, e^{j(2\pi/\lambda)d\sin\theta}, \dots, e^{j(2\pi/\lambda)d(M-1)\sin\theta}]^T$ 로 표현되는  $M \times 1$  벡터이다. 또한 각 수식에서 사용된 변수는 다음과 같다.

- $s(k)$   $q \times 1$  : 서로 무상관된(uncorrelated) 신호 파형 벡터.
- $n(k)$   $M \times 1$  : 센서의 가산 잡음 벡터.
- $\lambda$  : 파장.
- $d$  : 센서간의 간격.

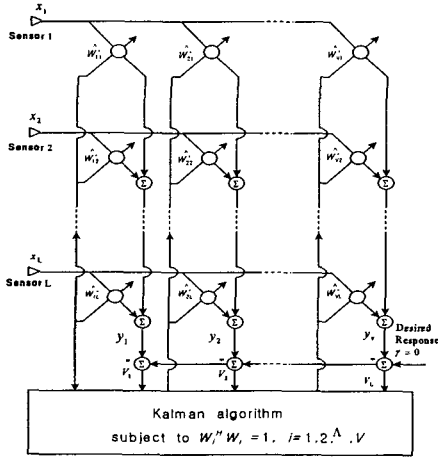


그림 1. 칼만 필터를 이용한 잡음 부공간 추정기.

식 (1)으로 수신된 벡터는 계수 행렬(adjustable)에 의해 곱해지고  $V$ 개의 출력( $1 \leq q \leq V \leq M$ )은 식 (2)과 같다.

$$Y(k) = \widehat{W}^T(k) X(k), \quad (2)$$

여기서,  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_V]^T$ .

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_1 & \widehat{W}_2 & \dots & \widehat{W}_V \end{bmatrix} \text{이고, } \widehat{W}_i = [\widehat{w}_{i1}, \widehat{w}_{i2}, \dots, \widehat{w}_{iM}]^T.$$

$X = [x_1, x_2, \dots, x_M]$  이다.

위에 정의된 식과 다음 지배 방정식을 최소화하는 행렬  $W$ 는 표 1과 같이 구해진다<sup>[3]</sup>.

$$\text{Minimize } J_1 = \widehat{W}_1^T R \widehat{W}_1, \quad (3a)$$

$$\text{조건 } \widehat{W}_1^T \widehat{W}_1 = 1, \quad (3b)$$

표 1. 칼만 잡음 부공간 추정기 알고리즘.

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{P(k-1)X(k)}{(X^T(k)P(k-1)X(k) + Q(k))} \\ Q(k) &= \text{var}[v_{oi}(k)] \\ P(k) &= P(k-1) - G(k)X(k)^T P(k-1) \\ \widehat{W}_{id}(k) &= \widehat{W}_i(k-1) - G(k)X^T(k) \widehat{W}_i(k-1) \\ i &= 1, 2, \dots, V \end{aligned}$$

$$\widehat{W}_i(k) = \frac{\widehat{W}_{id}(k)}{\|\widehat{W}_{id}\|}, \quad i=1, 2, \dots, V$$

위의 알고리즘에 가변 메모리 인자를 도입하기 위해서 다음과 같은 잔차 에너지를 생각한다.

$$E_k = \sum_{j=1}^k w(j, k) Q^{-1}(j) [0 - X^T(j-1) W(j)]^2, \quad (4)$$

$Q(j)$ 는 관측 오차의 분산 값, 가중치 계수  $w(j, k)$ 는 가변 메모리인자(Variable Memory Factor : VMF)이고 식 (5)의 값을 갖는 가변 메모리인자이다.

$$w(j, k) = \begin{cases} \prod_{i=j+1}^k \lambda(i), & 1 \leq j \leq k-1, \\ 1, & j \geq k. \end{cases} \quad (5)$$

식 (5)로부터 가변 메모리 인자는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$w(k, k) = 1, \quad w(k-1, k) = \lambda(k), \quad 0 < \lambda(k) \leq 1. \quad (6)$$

식 (5)을 이용하여 식 (4)를 회귀식으로 나타내면 아래와 같다.

$$E_k = \lambda(k) E_{k-1} + w(k, k) Q^{-1}(k) [d(k) - X^T(k-1) W(k)]^2 \quad (7)$$

식 (7)을  $\lambda(k)$ 에 대해 정리하면 식 (8)과 같다.

$$\lambda(k) = \frac{E_k}{E_{k-1}} - \frac{Q^{-1}(k)}{E_{k-1}} [d(k) - X^T(k-1) W(k)]^2. \quad (8)$$

$$\hat{e}(k) = -X^T(k-1) W(k-1) \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)을 식 (8)에 적용하면 강인 칼만 필터의 가변 메모리인자  $\lambda(k)$ 는 식 (10)과 같이 유도된다.

$$\lambda(k) = \frac{E_k}{E_{k-1}} - \frac{Q^{-1}(k)}{E_{k-1}} \hat{e}^2(k) [1 - X^T(k-1) G(k)]^2 \quad (10)$$

$\lambda(k)$ 의 계산을 간단히 하기 위한 방법으로  $E_k = E_{k-1} = \dots = E_1$ 와 같이 할 수 있다<sup>[4]</sup>. 이러한 가정을 사용하면 식 (10)은 식 (11)와 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\lambda(k) \approx 1 - \frac{Q^{-1}(k)}{E_1} e^2(k) [1 - X^T(k) K(k)]^2 \quad (11)$$

표 2. 가변메모리인자를 이용한 강인 칼만 적응 알고리즘.

---


$$G(k) = \frac{P(k-1) X(k-1)}{\lambda(k-1) Q(k) + X^T(k-1) P(k-1) X(k-1)}$$

$$e(k) = -X^T(k-1) W(k-1)$$

$$Q(k) = \text{var}[v_a(k)]$$

$$\lambda(k) = 1 - \frac{R^{-1}(k)}{E_1} e^2(k) [1 - X^T(k) G(k)]^2$$

$$W(k) = W(k-1) + G(k) e(k)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda(k)} [P(k-1) - G(k) X^T(k-1) P(k-1)]$$


---

### III. 시변 메모리와 후버 함수로 구현된 강인 Kalman Based MUSIC

칼만 알고리즘에 충격성 잡음이 포함된 입력이 들어오는 경우 식 (12)과 같은 강인 기준함수(robust criterion function)을 정의하자.

$$J_k(a) = \sum_{j=1}^k \lambda(k) k^{-j} \rho \left[ \frac{y(j) - X^T(j-1) W(j)}{\sigma(j)} \right], \quad (12)$$

여기서  $\sigma^2(j)$ 는  $v(k)$ 의 분산, 즉 관측 잡음(measurement equation)이다.  $\rho(\cdot)$ 는 강인 비용함수를 Huber의 비용함수이다. 이를 미분하면 Huber의 영향함수가 된다.

$$\rho_H(x) = \begin{cases} \tau|x| - (\tau^2/2), & |x| \geq \tau, \\ x^2/2, & |x| < \tau, \end{cases} \quad (13)$$

$$\Psi_H(x) = \begin{cases} \tau \text{sgn}(x), & |x| \geq \tau, \\ x, & |x| < \tau, \end{cases} \quad (14)$$

추정하고자 하는 변수의 최적의 추정치는 식 (15)로 나타나 진다.

$$\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j}(k) \frac{X(j-1)}{\sigma(j)} \Psi_H \left( \frac{-X^T(j-1) W(j)}{\sigma(j)} \right) = 0 \quad (15)$$

일반적으로 식(15)은 비선형함수이기 때문에 해를 직접 구하는 것은 어렵다. 가중치 함수  $\psi(x) = \Psi_H(x)/x$ 로 정의하면 즉,

$$\psi(-X^T(j-1) W(j)/\sigma(j)) = \frac{\Psi_H((-X^T(j-1) W(j))/\sigma(j))}{(-X^T(j-1) W(j))/\sigma(j)} \quad (16)$$

과 같이 나타내면 식 (15)은 근사적으로 가중치 최소 자승 식으로 근사화 된다. 그러나 계수 벡터  $W(j)$ 를 미리 알 수가 없으므로 식 (17)로 표현되는 추정오차를 대신 사용하여야 한다.

$$\hat{e}(j) = \frac{0 - X^T(j-1) W(j-1)}{\sigma(j)} \quad (17)$$

그러면 식 (15)은 아래와 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j}(k) \frac{X(j-1)}{Q^{-1}(j)} (-X^T(j-1) W(j)) \psi(\hat{e}(j)) = 0, \quad (18)$$

$$\text{여기서, } \psi(\hat{e}(j)) = \begin{cases} \frac{\Psi(\hat{e}(j))}{\hat{e}(j)}, & \text{if } \hat{e}(j) \neq 0 \\ 1, & \text{if } \hat{e}(j) = 0 \end{cases} \quad \text{이고}$$

$Q(j) = \sigma^2(j)$ 로 정의된 변형된 Huber 함수이다. 결국 식 (18)은 가중치 함수  $\psi(\cdot)$ 가 포함된 최소 자승추정이 되어 [5]에서 사용한 방법과 유사하게 하여 다음과 같은 강인 칼만 이득을 유도할 수 있다.

$$G_{\text{robust}}(k) = \frac{K(k-1) X(k)}{(X^T(k) K(k-1) X(k) + Q(k) \psi^{-1}(\hat{e}(k)))}. \quad (19)$$

추정오차 또한 충격성 잡음에 의한 입력  $X(k)$ 의 영향으로 Huber의 함수에 의해 다음과 같이 제한되어야 한다.

$$e_H(k) = \Psi_H(-W^T(k-1) X(k)). \quad (20)$$

식 (19), (20)과 가변메모리인자와 함께 적용하면 표 3과 같이 가변 메모리 인자 강인 칼만 잡음 부공간 추정기를 얻는다.

표 3. 제안된 가변 메모리 인자 강인 칼만 잡음 부공간 추정 알고리즘.

$$\begin{aligned} \tilde{e}(k) &= -W^f(k)X(k) \\ G_{robust}(k) &= \frac{K(k-1)X(k)}{(X^T(k)K(k-1)X(k) + Q(k)\psi^{-1}(\tilde{e}(k)))} \\ e_H(k) &= \Psi_H(-W^f(k-1)X(k)) \\ \lambda(k) &= 1 - \frac{R^{-1}(k)}{E_1} \tilde{e}^2(k)[1 - X^T(k)G_{robust}(k)]^2 \\ K(k) &= \frac{1}{\lambda(k)} [K(k-1) - G_{robust}(k)X(k)^TK(k-1)] \\ W_{id}^i(k) &= W_{id}^i(k-1) + G_{robust}(k)e_H(k) \\ i &= 1, 2, \dots, V \\ W_i(k) &= \frac{W_{id}^i(k)}{\|W_{id}^i(k)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, V \end{aligned}$$

#### IV. 실험 및 고찰

제안된 방법의 성능을 검사하기 위해서 표 4와 같은 시험용 신호를 발생시켜서 100번의 독립 시행을 하였다.

표 4. 실험 사양.

센서수: 8개  
배열 형태: 등 간격 선형 어레이  
센서간의 간격:  $0.5\lambda$  ( $\lambda$ 는 파장을 의미한다.)  
신호대 잡음비: 20 dB  
임펄스: 150, 250, 350, 410번째 샘플에 위치

결과는 그림 2부터 그림 3에 걸쳐 도시하였다. 그림 2에는 Huber함수 없이 가변 메모리만을 사용했을 때 결과이다. 그림 3은 제안된 알고리즘을 사용했을 때의 결과이다.

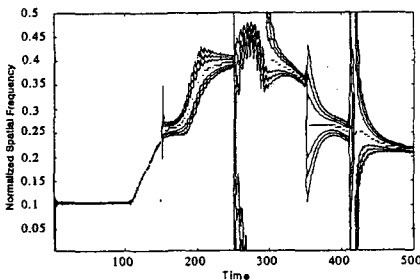


그림 2. 가변 메모리만 사용했을 때 추정 결과.

가변 메모리에 Huber함수를 결합함으로써 성능이 더 향상됨을 알 수 있다.

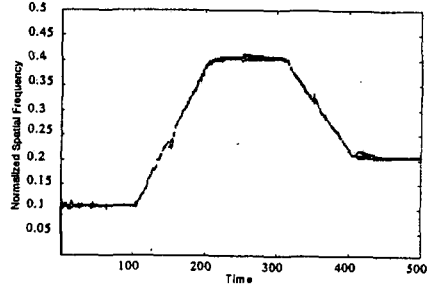


그림 3. 제안된 알고리즘의 추정 결과.

#### V. 결론

본 논문에서는 칼만 필터를 바탕으로 한 MUSIC 알고리즘에 시변 메모리 인자(time varying memory factor)와 후버 영향 함수를 도입하여 임펄스 잡음에 강인한 DOA 추정 알고리즘을 유도하고 그 성능을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 증명하였다.

#### 참고 문헌

- [1] S. U. Pillai, *Array Signal Processing*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [2] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 33, pp. 387-392, April 1985.
- [3] Yuan-Hwang Chen and Ching-Tai Chiang, "Kalman-based estimator for DOA estimations," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3543-3547, DEC. 1994.
- [4] Sang-Wook Lee, Jun-Seok Lim, SeongJoon Back, Koeng-Mo Sung, "Time-varying signal frequency estimation by VFF Kalman filtering," *Signal Processing 77*, pp. 343-347, 1999.
- [5] G. A. Mack, Vijay K. Jain, "Speech parameter estimation by time-weighted-error Kalman filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, no.5, pp. 1300-1303, Oct. 1983.