다중 층간분리부가 있는 복합재 원통쉘의 지그재그 고차이론에 기초한 유한요소 진동해석

조맹효* 오진호** 김흥수***

A Finite Element Analysis based on Higher-Order Zig-Zag Shell Theory for Laminated Composites Cylinderical Shell with Multiple Delaminations

Maenghyo Cho* Jinho Oh**

Abstract

A new three-node triangular shell element based on higher order zig-zag theory is developed for laminated composite shells with multiple delaminations. The present higher order zig-zag shell theory is described in a general curvilinear coordinate system and in general tensor notation. All the complicated curvatures of surface including twisting curvatures can be described in an exact manner in the present shell element because this element is based on geometrically exact surface representation. The displacement field of the proposed finite element includes slope of deflection, which requires continuity between element interfaces. Thus the nonconforming shape function of Specht's three-node triangular plate bending element is employed to interpolate out-of-plane displacement. The present element passes the bending and twisting patch tests in flat surface configurations. The developed element is evaluated through the eigenvalue problems of composite cylindrical shells with multiple delaminations. Through the numerical examples it is demonstrated that the proposed shell element is efficient because it has minimal degrees of freedom per node. The present shell element should serve as a powerful tool in the prediction of natural frequency and modes of multi-layered thick laminated shell structures with arbitrary-shaped multiple delaminations.

Key Words: Multiple delaminations; Zig-zag theory; Finite element; Natural frequency; Mode shape

1. 서 론

과학기술의 발달과 더불어 최근 가장 각광 받고 있는 분야가 우주항공 분야이다. 특히 인공위성과 항공기의 경우 고강도와 강성을 요구하기 때문에 구조물의 주변 환경에 적합한 구조물을 사용해야 한다. Graphite/ Epoxy로 이루어진 복합재료의 경우 고강도와 강성과 더불어 경량화 까지 가능하기 때문에 가장 널리 사용되고 있다. 실제 사용되고 있는 구조물은 곡률을 가지는 쉘로 구성되었기 때문에, 쉘 복합재 구조물의 정확한 해석은 매우 중요하다. 현재 쉘 복합재 구조물의 해석에 대한 많은 연구가 보고 되고 있다[1,2].

해석방법 중 지그재그 이론이 정확성과 효율성으로 인해 가장 주목을 받고 있는 이론이다. 지그재그 이론은 변위와 횡전단 응력연속조건을 층 경계면마다 만족하고 또한, 변위장을 모사하기 위해 층의 수와 상관없이 5개 변수만 필요하게 된다. 그 결과, 지그재그 이론은 계산상에서 많은 장점을 갖게 된다.

그러나, 층간 분리가 내재된 판 과 쉘 구조물에는 열림과 미끄러짐이 발생하기 때문에, 층간 분리 해석에 적합한 이론을 사용해야 한다. 다중 층간분리부가 내재된 복합재 보[3], 판[4], 쉘[5]을 해석하기 위한 방법이 개발 되었다. 지금까지 층간분리부

* 서울대학교 교수
** 서울대학교 대학원생
*** 인하대학교 연구교수

가 내재된 복합재 쉘에 적용된 지그재그 이론은 두께가 얇다는 가정하의 두 방향 곡선 쉘이론[6]이 적용되었다. 두께가 얇다는 가정 없이 층간 분리가 내재된 기하학적으로 정확한 쉘 이론이 Kim 과 Cho에 의해 개발 되었다[5]. 본 연구에서는, 층간 분리가 내재된 복합재 구조물 해석이론을 유한요소로 확장하여 임의의 하중과 경계조건에서도 해석이 가능하도록 하였다. 일반 텐서표현을 사용함으로써, 임의의 곡면인 경우에도 해석 가능하도록 하였다.

현재이론의 타당성을 검토하기 위해, 층간분리가 내재된 실린더의 Modal 해석을 수행하였다. 해석결과 고유진동수와 고유모드를 얻을 수 있다. 현재이론에 기초를 둔 유한요소 Modal 해석결과를 Nastran 해석 결과와 비교 하였다. 제안된 변위장은 층간분리의 수, 모양, 크기, 위치가 변하더라도 합리적인 해석결과를 도출 할 수 있다. 결국, 현재 제안된 지그재그 이론에 기초를 둔 유한 요소 해석 기법은 다중 층간분리가 내재된 쉘 구조물을 진동해석할 때, 최소한의 자유도만으로 정확한 해석이 가능함을 확인 할 수 있다.

2. 변위장 모델링

2.1 변위장

층간분리가 내재된 복합재 쉘을 모델하기 위해서, 변위장은 다음과 같이 가정 된다.

$$U_\alpha(x^i) = u_\alpha + \psi_\alpha x^3 + \xi_\alpha (x^3)^2 + \phi_\alpha (x^3)^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)} (x^3 - x^3_{(k)}) H(x^3 - x^3_{(k)}) + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_\alpha^{(k)} H(x^3 - x^3_{(k)}) \quad (1)$$

$$U_3(x^i) = u_3 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_3^{(k)} H(x^3 - x^3_{(k)}) \quad (2)$$

여기서, u_i 는 기준면에서 정의된 변위이고, ψ_α 는 기준면에 수직은 축으로부터 시작된 회전각도이다. N 은 층의 수이고, $H(x^3 - x^3_{(k)})$ 는 단위계단 함수이다. $S_\alpha^{(k)}$ 는 각 층 사이의 횡전단 각도의 변화량이다. $\bar{u}_i^{(k)}$ 는 층간분리부에서 미끄러짐과 열림 변위를 나타낸다.

일반 좌표계에서의 그린 변형률 텐서는 다음과 같다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i|j} + V_{j|i} + V^k_{\ |i} V_{k|i}) \quad (3)$$

쉘 구조물의 모든 층 경계면은 $\bar{u}_i^{(k)}$로 시뮬레이션 할 수 있다. 즉, 층간 분리가 되지 않은 경계면은 $\bar{u}_i^{(k)}$ 값을 0로 만들면 된다. 윗면과 아랫면의 횡 전단 구속조건 $e_{\alpha 3}|_{x^3=0,h}=0$ 을 사용하여, 자유도의 수도 줄일 수 있다.

현재이론에서는 층간 분리 경계면에서의 제로 횡 전단 응력은 응력연속 조건을 만족하기 때문에, 층 사이의 모든 경계면에서 횡 전단 응력 연속조건이 만족된다. 이러한, 연속조건을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$^{(k)}\sigma^{\alpha 3}|_{x^3=x^3_{(k)}} = {}^{(k+1)}\sigma^{\alpha 3}|_{x^3=x^3_{(k)}}, \quad (k=1,2,...,N-1) \quad (4)$$

위의 식은 2(N-1)개의 대수방정식을 준다. 식 (3)과 (4)를 이용하여 아래와 같은 최종적인 변위장을 얻을 수 있다.

$$U_\alpha = \mu_\alpha^\beta u_\beta - u_{3||\alpha} x^3 + f_\alpha^\beta \phi_\beta + \sum_{k=1}^{N-1} (g_{(k)})_\alpha^\beta \bar{u}_{3||\beta}^{(k)} + \sum_{k=1}^{N-1} (h_{(k)})_\alpha^\beta \bar{u}_\beta^{(k)} \quad (5)$$

$$U_3 = u_3 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_3^{(k)} H(x^3 - x^3_{(k)}) \quad (6)$$

여기서,

$$f_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta (x^3)^3 - \frac{3h}{2}(x^3)^2 (\hat{\mu}_1^{-1})_\alpha^\gamma (\hat{\mu}_2)_\gamma^\beta - \frac{1}{2h}(x^3)^2 (\hat{\mu}_1^{-1})_\alpha^\lambda \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\lambda^\gamma (a^{(k)})_\gamma^\beta + \sum_{k=1}^{N-1} (a^{(k)})_\alpha^\beta (x^3 - x^3_{(k)}) H(x^3 - x^3_{(k)}) \quad (7)$$

$$(g_{(k)})_\alpha^\beta = -(\mu_{(k)}^{-1})_\alpha^\beta (x^3 - x^3_{(k)}) H(x^3 - x^3_{(k)}) \quad (8)$$

$$(h_{(k)})_\alpha^\beta = \{\delta_\alpha^\beta - (\mu_{(k)}^{-1})_\alpha^\lambda b_\lambda^\beta (x^3 - x^3_{(k)}) \quad (9)$$

3. 유한 요소 해석

3.1 강성 행렬 정식화

유한요소 정식화에서는 파라메트릭 좌표계 과를 사용한다. 노드 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\{a\} = \{u_1, u_2, u_3, u_{3,1}, u_{3,2}, \phi_1, \phi_2, \bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3, \bar{u}_{3,1}^k, \bar{u}_{3,2}^k\} \quad (10)$$

면적 좌표계로, L_1, L_2, 와 L_3 가 내삽함수로 사용되어진다.

전체 포텐샬 에너지는 굽힘(멤브레인 포함)에너지와 횡 전단 변형에너지로 나눌 수 있다. 굽힘 에너지와 횡방향 전단 에너지는 아래와 같이 주어진다.

$$U_b^e = \frac{1}{2}\int_{A^e}\int_0^h \{e\}^T[Q_{mb}]^{(k)}\{e\}dzdA^e$$
$$= \int_{A^e}\{e\}^T[A_{mb}]\{e\}dA^e \quad (11)$$

$$U_s^e = \frac{1}{2}\int_{A^e}\int_0^h \{\gamma\}^T[Q_s]^{(k)}\{\gamma\}dzdA^e$$
$$= \int_{A^e}\{\gamma\}^T[A_s]\{\gamma\}dA^e \quad (12)$$

여기서, $[A_{mb}]$과 $[A_s]$ 은 멤브레인 굽힘 강성 행렬과 횡 전단 강성 행렬을 두께방향으로 적분한 행렬이다. 주 변위장은 아래와 같은 형상함수와 노드 미지수로 표현된다.

$$u_1 = \sum_{i=1}^{3} L_i u_{1i}^o \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{3} L_i u_{2i}^o \quad (13)$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^{3}\{u_{3i}N_i + u_{3,1i}N_{xi} + u_{3,2i}N_{yi}\} \quad (14)$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{3} L_i \phi_{1i} \qquad \phi_2 = \sum_{i=1}^{3} L_i \phi_{2i} \quad (15)$$

$$\bar{u}_1^k = \sum_{i=1}^{3} L_i \bar{u}_{1i}^{ko} \qquad \bar{u}_2^k = \sum_{i=1}^{3} L_i \bar{u}_{2i}^{ko} \quad (16)$$

$$\bar{u}_3^k = \sum_{i=1}^{3}\{\bar{u}_{3i}^k N_i + \bar{u}_{3,1i}^k N_{xi} + \bar{u}_{3,2i}^k N_{yi}\} \quad (17)$$

3.2 질량 행렬 정식화

유한요소를 이용하여 Modal 해석을 수행시, 질량 행렬이 필요하게 된다. Modal 해석문제는 다음과 같다.

$$(K^e - \omega^2 M^e)\{a\}^e = \{0\} \quad (18)$$

여기서 K^e 와 M^e는 각각 요소 강성행렬과 질량 행렬을 나타낸다. ω는 고유 진동수를 나타내고, $\{a\}^e$는 고유 진동수에 대응되는 고유 모드를 나타낸다. 하나의 요소에서 질량행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$M^e = \int_{V_e} \rho[N]^T[N]dV \quad (19)$$

4. 수치 해석 결과

고차 지그재그 쉘이론에 기초를 둔 삼각형 쉘 요소를 사용한 Modal 해석의 정확성을 조사하기 위해서, 현재결과를 Nastran 해석결과와 비교 하였다. 이러한 해석 결과은 본 연구의 타당성을 보여준다. 그림 1은 본 수치 해석에서 사용된 실린더의 형상을 나타낸다.

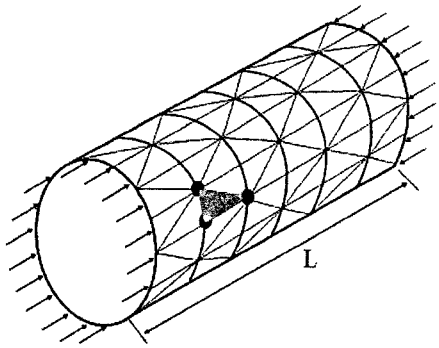

그림 1. 실린더의 삼각형 메쉬 형상

실린더 쉘의 수치 해석에서는 양단 고정 경계조건이 부과 된다. 양단 고정 경계조건은 아래와 같다.

$$x=0, L$$
$$u_\alpha = 0,\ u_3 = 0,\ u_{3,\alpha} = 0,\ \phi_\alpha = 0,$$
$$\bar{u}_\alpha^k = 0,\ \bar{u}_3^k = 0,\ \bar{u}_{3,\alpha}^k = 0 \quad (20)$$

실린더 형상 반경과 두께비는 R/h=30 이다.

3.1 층간분리가 없는 등방성 쉘

그림 2는 층간 분리가 없는 경우 Nastran 해석결과와 본 연구 해석결과를 나타낸다. 등방성 쉘의 재료상수는 아래와 같다.

$$E_1 = 1\times10^6\, psi,\ E_2 = E_1,\ \nu_{12} = 0.25,$$
$$G_{12} = E_1/(2(1+\nu)),\ G_{23} = G_{12},\ G_{31} = G_{12} \quad (21)$$

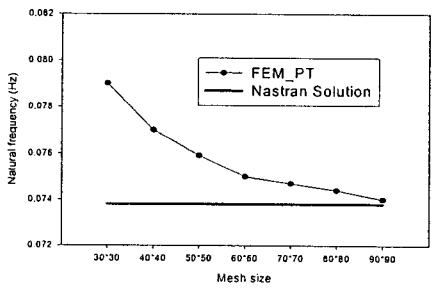

그림 2. 층간 분리가 없는 경우 메쉬 크기에 따르는 등방성 쉘의 고유진동수 (L/h=30)

3.2 층간분리를 갖는 복합재 쉘[0/90/90/0]

복합재 쉘의 재료상수는 아래와 같다.

$$E_2 = 1\times10^6 psi,\ E_1 = 25E_2,\ \nu_{12} = 0.25,$$
$$G_{12} = 0.5E_2, G_{23} = 0.4E_2, G_{31} = G_{12}, \nu_{23} = 0.25,\ \nu_{13} = 0.25 \quad (22)$$

그림 3은 실린더의 가운데 부분에 층간 분리를 갖는 복합재료의 고유 진동수를 나타낸다. 쉘의 길이를 길어지면, 고유 진동수가 작아짐을 알 수 있다. 또한 층간분리 영역이 넓어짐에 따라서 고유 진동수가 감소됨을 확인 할 수 있다.

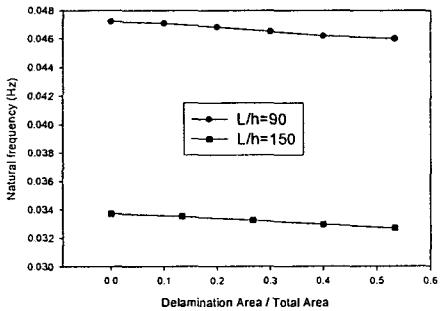

그림 3. 층간분리를 갖는 복합재 [0/90//90/0] 실린더 고유 진동수

5. 결 론

층간 분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물의 진동 해석에 적용할 수 있는 고차 지그재그 쉘이론에 기초를 둔 3절점 유한요소를 개발 하였다.

본 연구를 통하여, 최소한의 자유도의 수만으로 층간분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물의 해석이 가능하게 되었다. 또한, 굽힘 패치 테스트를 통과하는 비적합 C^1 삼각형 요소를 통해, 임의의 형상을 가진 층간 분리부 문제도 해석이 가능하게 되었다.

수치해석으로, 실린더의 Modal 해석을 수행하였다. 본 연구에서 개발된 유한요소법을 통해 층간 분리부가 내재된 복합재 쉘 구조물의 동적 거동 특성을 예측할 수 있는 강력한 도구로 사용될 수 있다고 사료된다.

후 기

이 논문은 2004년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(1) Noor, A.K., Burton, W.S., 1990, "Assessment of computational models for multilayered composite plates and shells." Applied Mech anics Reviews, Vol.45, No.4, pp.67-97.

(2). Reddy, J.N., Robbins, Jr., D.H., 1994, "The -ories and Computational models for composite laminates." Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No.1, pp.147-169.

(3). Cho, M., Kim, J.S., 2001, "Higher order zig -zag theory of laminated composites with multiple delaminations." J. of Appl. Mech., Vol .68, No.6, pp.869-877.

(4). Kim, J.S., Cho, M., 2002, "Buckling analysis for delaminated composites using plate bending elements based on higher-order zig-zag theory." Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol.55, No.11, pp.1323 -1343.

(5). Kim, J.S., Cho, M., 2003, "Efficient higher order shell theory for laminated composites with multiple delaminations." AIAA J., Vol.41, No.5, pp.941-950.

(6). Gu, H., Chattopadhyay, A., 1996, "Delamination buckling and postbuckling of composite cylindrical shells." AIAA J., Vol.34, No.6, pp.1279-1286.

(7). Specht, B., 1988, "Modified shape functions for the three-node plate bending element passing the patch test," Int. J. for Numer. Meth. in Eng., Vol.26, pp.705-715.