

# 경사기능판의 열적 후좌굴 및 진동 해석

박재상\* · 김지환\*\*

## Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates

Jae-Sang Park and Ji-Hwan Kim

**Key Words** : Functionally Graded Plates, Thermal postbuckling, Vibration

### ABSTRACT

Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates (FG plates) are performed. The nonlinear finite element equation based on the first-order shear deformation plate theory is formulated for the FG plate. The von Karman strain-displacement relation is used to account for the thermal large deflection. The incremental method considering the effect of the initial deflection and the initial stress is adopted for temperature-dependent material properties of functionally graded materials. The numerical result shows characteristics of the thermal postbuckling and vibration of FG plates in the pre- and post-buckled regions.

### 1. 서 론

경사기능재료(Functionally Graded Materials)는 두 가지 혹은 그 이상의 재료의 체적비(volume fraction)가 구조물의 어느 한 방향을 따라 연속적으로 변하도록 만들어진 복합재료이다. 층간에서의 열응력 집중현상을 갖는 섬유 강화 복합재료(Fiber-reinforced composites)와는 달리, 경사기능재료는 두께방향으로의 열응력 분포를 완만하게 만들 수 있으므로, 초음속/극초음속 영역에서의 극심한 공력가열을 받는 우주왕복선 등에 사용될 수 있다.

경사기능구조물에 관한 기존의 연구사례를 살펴보면 다음과 같다. Reddy [1]는 정적 처짐 및 응

력해석을 3 차 전단변형평판이론에 근거하여 이론해와 유한요소해를 제시하였으며, Praveen 과 Reddy [2]는 비선형 과도 열탄성 해석을 수행하였다. Cho 와 Oden [3]은 열 응력 특성을 Crank-Nicolson-Galerkin 기법을 사용하여 연구하였다. Javaheri 와 Eslami [4]는 고전 평판이론을 적용하여 열적 좌굴해석을 수행하였다. Yang 과 Shen [5]은 열 환경에서의 진동 특성 및 과도 응답을 고차 전단평판이론을 사용하여 연구하였다. 또한, 열적 후좌굴 및 후좌굴된 구조물의 진동특성에 관한 연구는 다음과 같다. Averill 과 Reddy [6]는 복합재료 평판 및 셸의 열적 후좌굴 해석을 수행하였다. Zhou 등 [7]은 초기 변위를 고려한 고전 적층판 이론에 근거하여 열적 후좌굴된 복합재료 적층판의 자유진동을 해석하였다. Lee 와 Lee [8]은 1 차 전단변형판이론에 근거한 유한요소법을 사용하여 열적 후좌굴 상태의 복합재료 적층판의 진동 특성을 조사하였다. Park 등 [9]은 증분법(Incremental method)을

\* 서울대학교 기계항공공학부

\*\* 서울대학교 기계항공공학부 교수

하였다. Park 등 [9]은 증분법(Incremental method)을 사용하여 형상기압합금선이 삽입된 복합재료 적층판의 열적 후좌굴 및 후좌굴 상태에서의 진동 특성을 연구하였다.

경사기능재료의 물성치는 멱법칙(Power law)에 의하여 두께방향에 따라 변할 뿐만 아니라, 온도에 대하여 비선형적으로 변한다. 따라서, 본 논문에서는 이와 같이 물성치가 온도에 종속적인 경사기능재료의 특성을 나타내기 위하여 초기 변위와 초기 응력을 고려하는 증분 형태로 비선형 유한요소 지배방정식을 유도하였다. 경사기능판은 1 차 전단변형 판이론을 적용하여 모델링하였으며 기하학적 비선형을 나타내기 위하여 von Karman의 변위-변형을 관계식을 사용하였다. 뉴턴-랩슨 반복법(Newton-Rapnson iterative method)을 적용하여 열적 후좌굴에 의한 대치짐(Large deflection)을 계산하였다. 열적 후좌굴 해석에서 구한 접선 강성행렬(Tangent stiffness matrix)을 이용하여 열적 후좌굴된 경사기능판의 자유 진동해석을 수행하였다. 세라믹-메탈의 경사기능판의 세라믹의 다양한 체적비의 멱지수(Power law exponent)에 대한 열적 후좌굴 및 진동 특성을 조사하였다.

## 2. 비선형 유한요소 정식화

### 2.1 증분형 변형을

기준온도( $T_{ref} = 300K$ )로부터의 상승된 온도 변화량( $dT$ )은 많은 미소 온도 변화량( $\Delta T = T - T_0$ )으로 나뉘어진다. 이 때, 미소 온도변화량  $\Delta T$ 에 대한 증분형 변형을(Incremental strain)은 아래와 같이 나타낼 수 있다[9]. 면내방향의 증분형 변형율은

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \epsilon_m + \Delta \epsilon_\theta + \Delta \epsilon_0 + z \Delta \kappa = \Delta \epsilon + z \Delta \kappa$$

혹은

$$\Delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{xx} \\ \Delta \epsilon_{yy} \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \\ 2 \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.a)$$

또한 두께방향의 증분형 전단변형율은

$$\Delta \gamma = \begin{Bmatrix} \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \end{Bmatrix} \quad (1.b)$$

여기서 하첨자 '0'는 초기값을 뜻한다.

### 2.2 경사기능재료의 물성치

경사기능재료의 물성치는 온도( $T$ )와 평판의 두께방향으로의 위치( $z$ )의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다[5].

$$P(z, T) = (P_t(T) - P_b(T))V_t(z) + P_b(T) \quad (2.a)$$

$$P_t(T) \text{ or } P_b(T) = P_0(P_{-1}T + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2.b)$$

여기서, 하첨자  $t$ 와  $b$ 는 각각 평판의 Top과 Bottom을 의미하며,  $P$ 는 경사기능재료의 물성치를,  $V$ 는 체적비이며 다음과 같이 나타내어진다.

$$V_t + V_m = 1 \quad (3.a)$$

$$V_t = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (0 \leq k < \infty) \quad (3.b)$$

식(3.b)의  $k$ 는 체적비의 멱지수이다. 본 논문에서는 Poisson' ratio  $\nu$ 는 0.3으로 일정하며, 그 외의 다른 물성치들은 식(2)와(3)에 의하여 계산된다.

### 2.3 구성 방정식

충분히 작은 미소 온도 변화량  $\Delta T = T - T_0$ 에 대하여 경사기능판의 물성치는 온도  $T$ 에서의 물성치로 나타내어질 수 있다고 가정할 수 있다. 따라서, 1 차 전단변형이론에 의한 구성방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다[9].

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{\Delta T} \\ \mathbf{M}_{\Delta T} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{Bmatrix} \quad (4.a)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_s \Delta \gamma + \mathbf{Q}_0 \quad (4.b)$$

### 2.4 지배 방정식

가상일의 원리(Principle of Virtual Work)에 의하여

열하중을 받는 경사기능판의 지배 방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$M\Delta\ddot{\mathbf{d}} + \left( \begin{array}{c} \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\Delta T} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{w0} \\ + \frac{1}{2}\mathbf{KN1}_{w0} + \frac{1}{2}\mathbf{KN1}_s + \frac{1}{3}\mathbf{KN2}_s \end{array} \right) \Delta\mathbf{d} \quad (5)$$

$$= \mathbf{P}_{\Delta T} - \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{w0\Delta T} - \mathbf{P}_{0w0}$$

위의 식 (5)에  $\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{d}_s + \mathbf{d}_l$  를 대입하면 다음과 같은 연성된 두 개의 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\Delta T} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{w0} \\ + \frac{1}{2}\mathbf{KN1}_{w0} + \frac{1}{2}\mathbf{KN1}_s + \frac{1}{3}\mathbf{KN2}_s \end{array} \right) \Delta\mathbf{d}_s \quad (6.a)$$

$$= \mathbf{P}_{\Delta T} - \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{w0\Delta T} - \mathbf{P}_{0w0}$$

$$M\ddot{\mathbf{d}}_l + \left( \begin{array}{c} \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\Delta T} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{w0} \\ + \mathbf{KN1}_{w0} + \mathbf{KN1}_s + \mathbf{KN2}_s \end{array} \right) \mathbf{d}_l = \mathbf{0} \quad (6.b)$$

식(6.a)에서 뉴턴-랩슨 반복법을 사용하여 정적 증분 변위  $\Delta\mathbf{d}_s$  를 구하면, 열적 후좌굴에 의한 전체 정적 변위는  $\mathbf{d}_s = \mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}_s$  로 계산할 수 있다. 또한, 식 (6.b)의 전체 강성행렬은 식 (6.a)의 접선 강성행렬과 같으므로, 후좌굴 해석에서의 수립된 변위로 구성된 접선 강성행렬을 사용하여 후좌굴된 경사기능판의 자유 진동해석을 식 (6.b)를 통하여 수행한다.

### 3. 수치해석결과 및 토의

#### 3.1 해석 프로그램의 검증

먼저 정사각형 경사기능판의 열적 좌굴해석을 수행하여 참고문헌 [4]의 결과와 비교하였다.

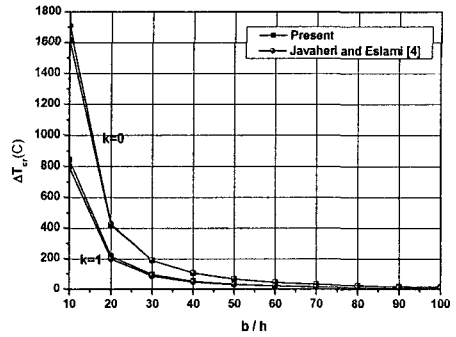


Fig. 1 Thermal buckling analysis of the FG plate

Fig.1 에서 보듯이 본 연구에서 사용된 유한요소 코드의 결과가 참고문헌 [4]의 이론해와 매우 잘 일치함을 알 수가 있다. 또한 본 연구에서 적용된 증분법을 이용하여 복합재료 적층판의 열적 후좌굴 해석을 수행하여 보았다. 참고문헌 [6]의 결과와 잘 일치함을 Fig.2 를 통하여 알 수가 있다.

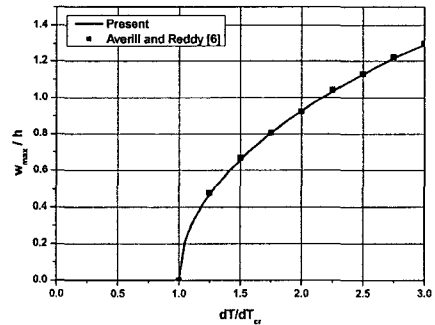


Fig.2 Thermal postbuckling analysis of the composite plate

#### 3.2 경사기능판의 열적 후좌굴 및 진동 해석

본 절에서는 다양한 체적비의 먹지수에 대한 경사기능판의 열적 후좌굴 해석을 수행하며, 후좌굴된 경사기능판의 온도에 따른 고유진동수 변화를 조사하였다. 본 수치 예제에는 0.30×0.30 (m)의 정사

Table 1. Material Properties for Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SUS304 [5]

		P <sub>-1</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>
E (Pa)	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	0	348.43×10 <sup>9</sup>	-3.070×10 <sup>-4</sup>	2.160×10 <sup>-7</sup>	-8.94610 <sup>-11</sup>
	SUS304	0	201.04×10 <sup>9</sup>	3.079×10 <sup>-4</sup>	-6.534×10 <sup>-7</sup>	0
α (1/K)	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	0	5.8723×10 <sup>-6</sup>	9.095×10 <sup>-4</sup>	0	0
	SUS304	0	12.330×10 <sup>-6</sup>	8.086×10 <sup>-4</sup>	0	0

각형이며 두께비가 1/100 인 경사기능판이 사용되었다. 또한, 경사기능판은 위쪽에는  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , 아래쪽에는 SUS304 로 구성되었다.  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  경사기능 재료의 물성치는 Table 1 과 같다. 온도분포는 두께방향으로 일정하다고 가정하였다.

체적비의 멱지수  $k=0.3, 1, 5$  를 갖는 경사기능판의 열적 후좌굴 결과를 등방성재료인 세라믹  $\text{Si}_3\text{N}_4$  와 메탈 SUS304 의 결과와 비교하여 Fig. 3 에 나타내었다. Fig. 3 에서 보듯이  $\text{Si}_3\text{N}_4$  와 SUS304 의 등방성 평판은 임계 온도(Critical temperature)에서 분기 좌굴(Bifurcation buckling) 거동을 보이거나, 비대칭 평판인 경사기능판은 온도가 증가함에 따라 처짐이 단조롭게 증가하는 거동을 보이고 있다. 또한, 체적비의 멱지수 값이 증가할수록 경사기능판의 처짐이 증가함을 알 수가 있다.

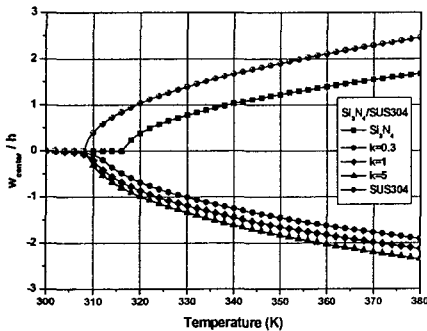


Fig. 3 Thermal postbuckling analysis of the FG plate

Fig.4 는  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  경사기능판의 온도 증가에 따른 1 차 고유진동수 변화를 보여주고 있다.  $\text{Si}_3\text{N}_4$  와 SUS304 의 등방성 평판의 1 차 고유진동수는 온도가 증가하여 임계온도에 도달하면 0 이 된다. 반면, 비대칭 평판인 경사기능판의 1 차 고유진동수는 온도가 증가하여 임계온도에 도달하여도 0 이 되지 않는다. 이것은 Fig.3 에서 보듯이 비대칭 평판인 경사기능판은 분기 좌굴거동을 갖지 않고, 온도가 증가할수록 처짐이 단조롭게 증가하기 때문이다. 또한, 경사기능판과 등방성 평판 모두 후좌굴 영역에서의 1 차 고유진동수는 온도가 증가할수록 증가하는데, 이는 열적 후좌굴로 인한 대 처짐이 비선형 강성행렬의 크기를 증가시키는데 기인한다.

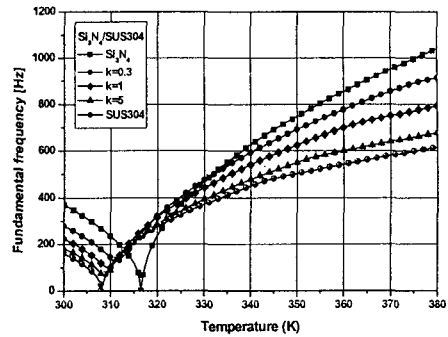


Fig.4 Fundamental frequencies of the FG plate in the pre- and post-buckled regions

#### 4. 결론

본 논문에서는 열하중을 받는 경사기능판의 열적 후좌굴 거동 및 후좌굴 상태에서의 고유 진동수의 특성을 유한요소법을 사용하여 연구하였다. 온도에 종속적인 경사기능재료의 특성을 나타내기 위하여 초기변위와 초기응력을 고려하는 증분법을 사용하였으며, 본 연구를 통하여 경사기능판의 열적 후좌굴 거동 및 후좌굴 상태에서의 진동 특성을 확인할 수 있었다.

#### 후 기

본 연구는 Brain Korea 21 의 지원에 의해 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) J.N. Reddy, "Analysis of functionally graded plates", Int. J. Numer. Meth. Engng., 2000, Vol.47, pp. 663-84
- (2) G.N. Praveen and J.N. Reddy, "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", Int. J. Solids Structures, 1998, Vol.35, No.33, pp.4457-76
- (3) J.R. Cho and J.T. Oden, "Functionally graded material : a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank-Nicolson-Galerkin scheme", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2000, Vol. 188, pp.17-38
- (4) R.Javaheri and M.R. Eslami, "Thermal buckling of functionally graded plates", AIAA Journal, 2002, Vol.40, No.1, pp.162-9
- (5) J.Yang and H.-S. Shen, "Vibration characteristics and

- transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments”, *J. Sound. Vibr.*, 2002, Vol. 255, Issue 3, pp. 579-602
- (6) R.C. Averill and J.N. Reddy, “Thermomechanically postbuckling analysis of laminated composite shells”, In: *The 34<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA-93-1337-CP, 1993, pp. 351-60
  - (7) R.C. Zhou, D.Y. Xue and C. Mei, “Vibration of thermally buckled composite plates with initial deflections using triangular elements”, In : *The 34<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA-93-1321-CP, 1993, pp. 226-35
  - (8) D.M. Lee and I. Lee, “Vibration behaviors of thermally postbuckled anisotropic plates using first-order shear deformable plate theory”, *Comput. Struct.*, 1997, Vol.63, No 3, pp. 371-8
  - (9) J.-S. Park, J.-H. Kim and S.-H. Moon, “Vibration of thermally post-buckled composite plates embedded with shape memory alloy fibers”, *Compos. Struct.*, 2004, Vol. 63, pp. 179-88